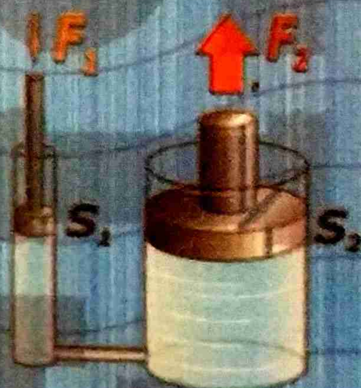
FÍSICA II

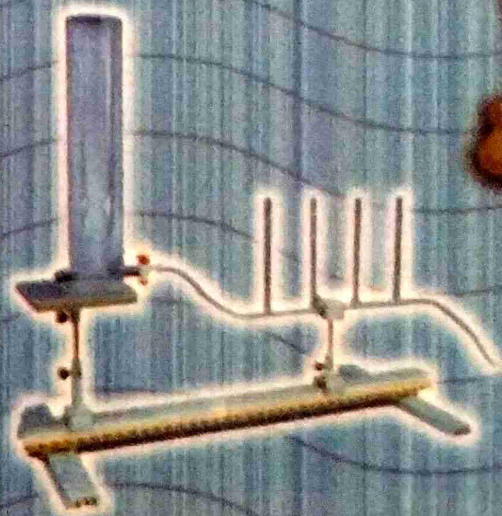
TEORÍA, PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

2013

- Elasticidad.
- Oscilaciones.
- Movimiento Ondulatorio.
- Hidrostática.
- Hidrodinámica.
- Temperatura y Dilatación.
- Calor - Propiedad de los Gases y Primera Ley de la Termodinámica.
- Entropía y la Segunda Ley de la Termodinámica.



MOSHERA EDITORIAL

Lic. HUMBERTO LEYVA N.
Ing. TANIA LEYVA R.

CONTENIDO



CAPÍTULO I

ELASTICIDAD



Se estudiará la elasticidad, fuerzas elásticas y los módulos de deformación, asimismo la energía que almacena un sólido cuando este se deforma por la acción de una fuerza.

SÓLIDOS

Se llaman así a los objetos que tienen forma y volumen definidos. Luego para deformarlos, se puede cambiar su forma y su volumen.

Sólido Cristalino

Una de las características es su propiedad, la *anisotropia* (todo cuerpo homogéneo tiene diferentes propiedades en diferentes direcciones). Así tenemos que las propiedades mecánicas, ópticas y eléctricas son diferentes según las distintas direcciones. Un ejemplo particular es el *coeficiente de dilatación térmica*.

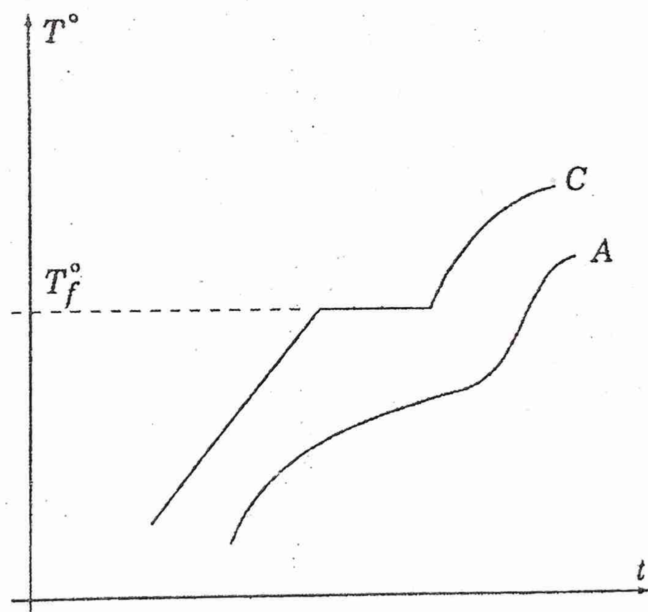


Fig. 1 *Variación de la temperatura con el tiempo*

Un cuerpo cristalino tiene sus átomos situados en forma regular y que se repiten en forma periódica en el espacio. También tiene un comportamiento diferente al cuerpo amorfo, cuando es fundido, debido a la acción de la temperatura, su gráfico aproximadamente es el *C*. en la figura 1.

Por último, diremos que los cuerpos cristalinos presentan simetría exterior fácil de observar. ***Ejemplo***: metales, cuarzo.

Sólido Amorfo

Son cuerpos isótropos (tienen las mismas propiedades en todas las direcciones). Estos sólidos tienen superficies irregulares de ruptura; por ejemplo, el vidrio (al romperse, los trocitos tienen forma irregular). Los sólidos amorfos, tienen comportamiento diferente debido a la acción de la temperatura, tal como se indica en el gráfico A de la figura 1.

FUERZAS ELÁSTICAS

Se presentan cuando la distancia entre los átomos ha variado, si se acercan entonces ha habido una fuerza de compresión, si se alejan los átomos, entonces está presente una fuerza de tracción.

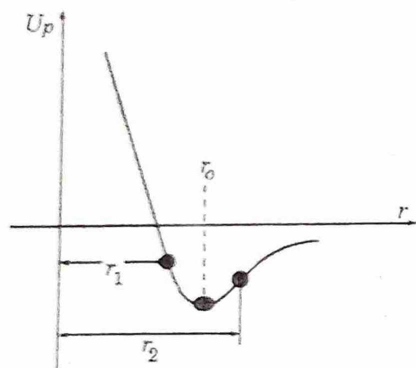


Fig. 2 *Energía Potencial de la red*

Veamos como podemos hacer un análisis cualitativo, sabiendo

$$F = -\frac{dUp}{dr}(\alpha)$$

Cuando el átomo se encuentra en la posición de equilibrio r_o, su estado de energía es mínimo y la fuerza es nula (la pendiente es cero).

Cuando se aplica una fuerza de compresión, el átomo ocupa una nueva posición r_1 y aparece una fuerza recuperadora elástica; la pendiente de la curva en esta región es negativa y con el signo negativo de la expresión (α), nos da el signo positivo de la fuerza, la cual da lugar a una fuerza repulsiva y lo lleva a la posición de equilibrio r_o. Todo lo contrario sucede cuando se aplica una fuerza de tracción y el átomo se lleva a la posición r_2.

ELASTICIDAD

Se llama así a la propiedad que tienen los cuerpos, de recuperar su forma y dimensiones originales cuando la fuerza aplicada cesa de actuar. Las deformaciones que se producen son reversibles y el trabajo realizado por la fuerza se transforma en ***Energía potencial de Deformación***. La elasticidad depende de la naturaleza del material, de la magnitud de la fuerza y de la historia previa del material.

PLASTICIDAD

Cuando al cesar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, este no recupera su forma o dimensiones originales, parcial o totalmente. Las deformaciones son irreversibles y el trabajo realizado por las fuerzas, parte de este se transforma en calor. La plasticidad depende de la presencia de las dislocaciones y como estas se desplazan en la estructura cristalina, ya que la plasticidad está relacionada con los cuerpos cristalinos.

DEFORMACIÓN ($\Delta L, \Delta S, \Delta V$)

Son todas las variaciones que se producen en su longitud, superficie, volumen y también de forma.

Deformación Unitaria (Δ)

Es una relación entre la deformación (ΔL, ΔS, ΔV) y su dimensión inicial (L_0, S_0, V_0). Así tendremos deformación unitaria longitudinal ($\Delta_L = \Delta L/L_0$), superficial ($\Delta_S = \Delta S/S_0$) y volumétrica ($\Delta_V = \Delta V/V_0$).

ESFUERZO

Se define como una relación entre las fuerzas (tracción o compresión) entre el área de la sección transversal. Su notación es σ. $\left(\sigma = \frac{F}{S}\right)$

LEY DE HOOKE

Todo cuerpo, bajo la acción de una fuerza, se deforma, esta deformación (x) es proporcional a la fuerza (F) que se aplica, dentro del intervalo en el cual el cuerpo se comporta elásticamente. Existe un límite de elasticidad, a partir del cual la deformación ya no es elástica (LE). Se pueden expresar dos gráficos, 3(a) y 3(b), equivalentes para la Ley de Hooke, (a) y (b), donde la región elástica está comprendida desde 0 hasta LE (límite de elasticidad) y la relación es lineal. La región no elástica está comprendida desde LE hasta PR (punto de ruptura del material), la región no es lineal.

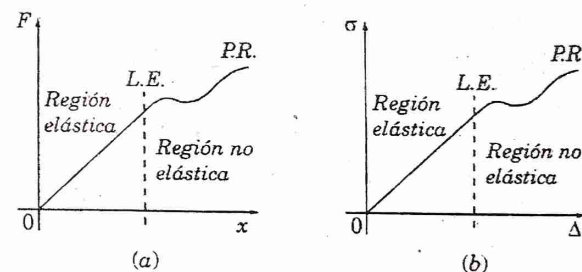


Fig. 3 Ley de Hooke

Deformación longitudinal o unilateral (E)

Para el caso de deformación longitudinal, se define el Módulo de Young (E), ver figura 4.

$$E = \frac{\text{Esfuerzo por Tensión o Compresión}}{\text{Deformación unitaria longitudinal}}$$

$$E = \frac{\sigma}{\Delta} = \frac{F/S}{\Delta L/L_o} = \frac{FL_o}{S\,\Delta L}$$

No existe cambio de forma.

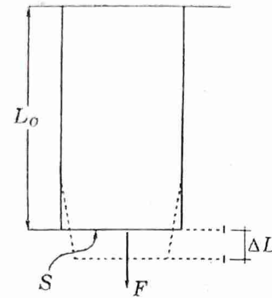


Fig. 4 Deformación por tracción

Deformación Multilateral o Volumétrica (*B*)

Si el cuerpo se somete a iguales esfuerzos de tracción o compresión por todos los lados, entonces el cuerpo sufrirá deformación volumétrica. En este caso se define el módulo de compresibilidad (*B*) y su inversa el coeficiente de compresibilidad (χ). Tener presente que en una compresión el ΔV es negativo, y en una tracción ΔV es positivo, ver figura 5.

$$B = \frac{\text{Esfuerzo volumétrico}}{\text{Deformación unitaria de volumen}} = \frac{\text{Variación de presión}}{\text{Def. unitaria de volumen}}$$

$$B = \frac{\Delta p}{\Delta} = \frac{\Delta p}{\left(\frac{\Delta V}{V_o}\right)} \quad , \quad \chi = \frac{1}{B}$$

No existe cambio de forma

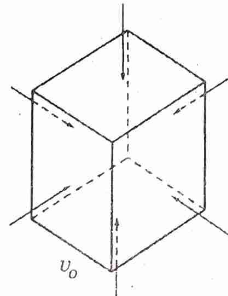


Fig. 5 Deformación Volumétrica

Deformación por cizalladura o elasticidad de forma η

Esta deformación se produce cuando se aplican fuerzas opuestas a dos cara contrarias del cuerpo, produciéndose un desplazamiento de planos paralelos en la dirección de la fuerza, fig. 6.

$$\eta = \frac{\text{Esfuerzo cortante}}{\text{Deformación cortante}} = \frac{\sigma_T}{\Phi} \quad , \quad \text{donde} \quad \eta : \text{módulo de rigidez}$$

$$\sigma_T = \frac{\text{Fuerza tangencial}}{\text{Superficie que se desplaza}} \quad , \quad \Phi = \frac{\text{Corrimiento}}{\text{Distancia entre las dos caras}} = \frac{y}{L_o}$$

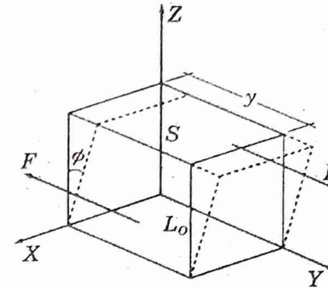


Fig. 6 Elasticidad de forma

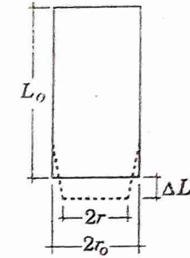


Fig. 7 Deformación lateral

En este caso el cambio de volumen es nulo ($\Delta V = 0$).

Deformación lateral (μ)

Cuando la muestra se estira, se observa que lateralmente sufre una contracción. Para medirla se usa el coeficiente de Poisson (μ), figura 7.

$$\mu = \frac{\text{Contracción lateral relativa}}{\text{Alargamiento longitudinal relativo}}$$

Para el caso de un cilindro de radio r_0 y longitud L_0, las variaciones en sus dimensiones son Δr y ΔL, entonces el coeficiente se expresa:

$$\mu = \frac{\Delta r/r_0}{\Delta L/L_0}$$

donde $0.25 < \mu < 0.5$ y $\mu = 0$ para cuerpos porosos.

Torsión

Es una deformación por cizallamiento puro, pero no homogéneo, figura 8. Se produce cuando se aplica un par de fuerzas (*F*, en la parte superior de la barra) y la sección inferior de la barra está fija. Se demuestra que el torque aplicado es igual a:

$$\tau = \frac{\pi\eta R^4\theta}{2L_0}$$

En este caso tampoco hay variación de volumen.

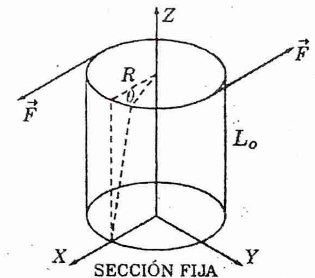


Fig. 8 Torsión

Energía elástica acumulada en una barra

Cuando una barra es sometida a una fuerza F de tracción, esta se alarga una distancia ΔL y el trabajo realizado por esta fuerza, se transforma en energía elástica almacenada en la barra, figura 9. Tomando diferencial de la deformación, debido a la fuerza F, usando el módulo de Young e integrando se obtiene la siguiente expresión:

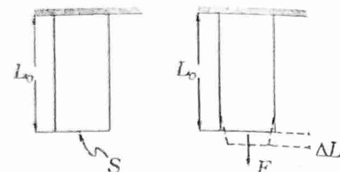


Fig. 9 Energía elástica almacenada en una barra.

$$dU = F\,d(\Delta L) = F\,d(L_0\Delta) = F\,L_0 d\Delta = \sigma\,S L_0 d\Delta$$

$$dU = (E\Delta)\,S\,L_0 d\Delta = E\,V_0 \Delta d\Delta \;,\; U = \tfrac{1}{2} E\,V_0 \Delta^2$$

Relaciones entre los módulos elásticos: $\eta = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$ $B = \dfrac{E}{3(1-2\mu)}$

Deformación volumétrica (Ley de Hooke generalizada)

Se tiene un sólido de lados L_x, L_y, L_z; sobre el cual actúan los esfuerzos σ_x, σ_y, σ_z; que dan lugar a tracciones (positivo) y compresiones (negativo), figura 10.

Debido a la tracción σ_x, el cuerpo, se deformará a lo largo del eje x (alargamiento) y se contraerá lateralmente a lo largo de los ejes Z e Y, expresándose:

$$\Delta' x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \mu = \frac{-\Delta y}{\Delta' x} \quad \mu = -\frac{\Delta z}{\Delta' x}$$

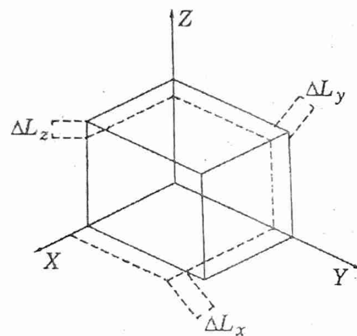


Fig. 10 Deformación volumétrica

De igual forma se procede, cuando se tiene σ_y, y se obtiene:

$$\Delta y = \frac{\sigma_y}{E} \quad \mu = -\frac{\Delta'' x}{\Delta y} \quad \mu = -\frac{\Delta z}{\Delta y}$$

Para σ_z: $\quad \Delta z = \dfrac{\sigma_z}{E} \;;\; \mu = -\dfrac{\Delta y}{\Delta z} \;;\; \mu = -\dfrac{\Delta''' x}{\Delta z}$

Sumando las deformaciones en las direcciones X, Y, Z, por ejemplo en el eje X:

$$\Delta_x = \Delta'_x + \Delta''_x + \Delta'''_x$$

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E} = \frac{\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)}{E}$$

$$\Delta_y = \frac{\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} \quad \text{y} \quad \Delta_z = \frac{\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Como el volumen del paralelepípedo es $V = L_x\,L_y\,L_z$, diferenciando se obtiene:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L_x}{L_x} + \frac{\Delta L_y}{L_y} + \frac{\Delta L_z}{L_z}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \Delta_x + \Delta_y + \Delta_z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

usando la expresión (1) en (2)

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} + \frac{\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} + \frac{\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(1-2\mu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad \text{Deformación volumétrica}$$

CASO ESPECIAL

Si $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$

Luego: $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(1-2\mu)}{E}(\sigma + \sigma + \sigma) \quad \text{y}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \Delta_x + \Delta_y + \Delta_z = 3\Delta$$

$$3\Delta = \frac{(1-2\mu)}{E} 3\sigma \;,\; \Delta = \frac{(1-2\mu)}{E}\sigma$$

PROBLEMAS RESUELTOS

(01) Sea una barra de longitud L_0 que al calentarla desde 0°C hasta t °C se dilata en una magnitud ΔL, si α es el coeficiente lineal del material de la barra. Para reducir la barra mediante una deformación elástica de compresión, en la magnitud ΔL hay que aplicarle una carga σ_n, si E es el módulo de Young del material, hallar σ_n.

Solución:

Cuando la barra se calienta desde 0°C hasta t °C, el cuerpo se dilata una longitud:

$$\Delta L = L_0\, \alpha\, t° \quad \text{............} \quad (1)$$

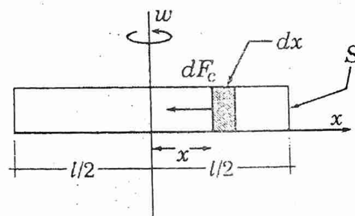
También se puede dilatar la barra debido a la carga σ_n:

$$E = \sigma_n/\Delta = \sigma_n/(\Delta L/L_0) \quad \Delta L = \sigma_n\, L_0/E \quad \text{............} \quad (2)$$

Igualando las expresiones (1) y (2): $L_0\, \alpha\, t° = \sigma_n\, L_0/E$

$$\sigma_n = \alpha E t°$$

(02) Una barra de cobre de longitud l = 1 m, dispuesta horizontalmente gira alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. ¿Con qué frecuencia de rotación se despedazará la barra?



Solución:

Se conoce la densidad: $\rho_{Cu} = 8.9\ \text{g/cm}^3$

Resistencia a la rotura: $\sigma_{r(Cu)} = 3 \times 10^8\ \text{N/m}^2$.

Cuando la barra gira con velocidad angular ω, se tiene la fuerza centrípeta para el diferencia de masa dm:

$$dF_C = dm\frac{V^2}{x} = dm\frac{(\omega x)^2}{x} = \omega^2 \times dm \quad , \quad dm = \rho \cdot dv = \rho S dx$$

$$F_C = \omega^2 \rho\, S \int_0^{l/2} x dx = \tfrac{1}{2}\omega^2\ \rho\, S \frac{l^2}{4} \quad \text{............} \quad (1)$$

Se ha usado $dm = \rho\, dV = \rho\, S\, dx$

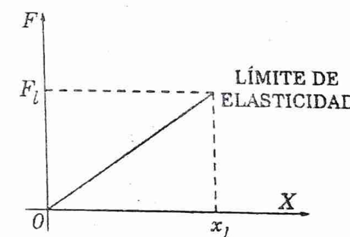
La barra gira y se romperá cuando supere la fuerza asociada a la resistencia a la rotura $F_r = \sigma_r S$ .... (2)

Igualando (1) y (2):

$$\tfrac{1}{8} w^2 \rho\, S\, l^2 = \sigma_r S \quad \text{y} \quad \omega = 2\pi\upsilon$$

$$\upsilon = \frac{1}{\pi l}\left(\frac{2\sigma_r}{\rho}\right)^{1/2} \approx 0.827 \times 10^2\ RPS \qquad \upsilon = 83\ RPS$$

(03) Al censar un alambre de Cu, cuya sección transversal tenía 1.5 mm² de área, se observó que el comienzo de la deformación permanente correspondía a la carga de 4.5 Kgf. ¿Cuál es el límite de elasticidad del material de que está hecho el alambre?

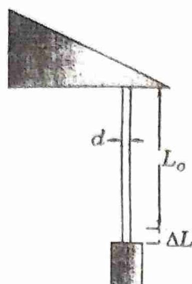


Solución:

Según el problema, cuando se aplica una fuerza $F_l = 4.5\ Kgf$, el alambre se estira x_l; luego el límite de elasticidad está dado por:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{4.5 \times 9.8\text{N}}{1.5 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} = 2.94 \times 10^7\ \text{N/m}^2$$

(04) Del tejado de una casa cuelga un alambre de acero de 40 m de longitud y 2 mm de diámetro. (a) ¿Qué carga máxima se puede colgar de este alambre sin que llegue a romperse?, (b) ¿Cuánto se alargará este alambre si de él se cuelga un hombre que pesa 70 Kg. (c) ¿Se notará alargamiento permanente cuando el hombre antedicho suelte el alambre?. El límite de elasticidad del acero es igual a $2.94\times10^8\ \text{N/m}^2$.



Solución:

Se conoce $d = 2\times10^{-3}\ \text{m}$, $L_0 = 40\ \text{m}$

La tensión a la rotura $\sigma_{r(acero)} = 7.85\times10^8\ \text{N/m}^2$

Límite de elasticidad : $\sigma = 2.94\times10^8\ \text{N/m}^2$

Módulo de Young : $E = 21.6\times10^{10}\ \text{N/m}^2$

a) La carga máxima pedida: $F = \sigma_r S$

$$F = \sigma_r \frac{\pi d^2}{4} = 7.85\times10^8\ \frac{N}{m^2}\times 3.14\ \frac{(2\times10^{-3})^2}{4} m^2 = 2469\ N$$

$$F = 251\ Kgf$$

b) El alargamiento solicitado $\Delta L = F\ L_o/ES$

$$\Delta L = \frac{70\times9.8\times40}{3.14\times10^{-6}\times21.6\times10^{10}}\ m = 0.04m$$

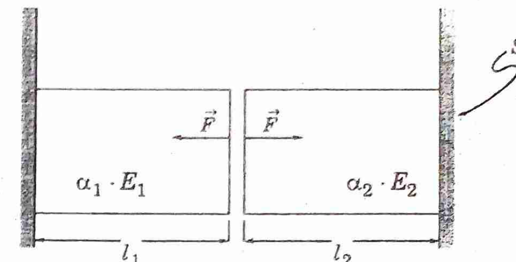
$$\Delta L = 4\ cm$$

c) Hallemos el esfuerzo que ejerce el hombre y lo comparamos con el límite de elasticidad.

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{70\times9.8}{3.14\times(2\times10^{-3})^2/4} = 2.47\times10^8\ \text{N/m}^2$$

Se puede ver que $\sigma < 2.94\times10^8\ \text{N/m}^2$, y como no supera el límite, la respuesta es no se notará el alargamiento.

(05) Entre dos paredes macizas se hallan dos barras hechas de diferentes materiales. La sección de las barras es S. Sus longitudes son l_1 y l_2. Las barras se calientan en Δt grados. Hallar las fuerzas con que las barras actúan la una sobre la otra; si los coeficientes de expansión térmica de las barras α_1 y α_2 y los módulos de elasticidad del material de las barras α_1 y α_2 son conocidos (módulos de Young). La deformación de las paredes se desprecia.



Solución:

En este problema nuevamente comparamos el alargamiento debido a la temperatura y la compresión debido a la elasticidad.

El alargamiento debido a la temperatura en las dos barras.

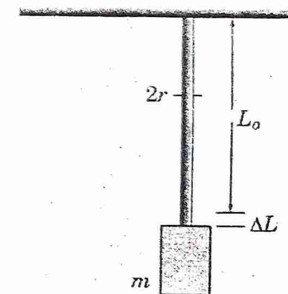
$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \alpha_1 l_1 \Delta t° + \alpha_2 l_2 \Delta t° \quad \text{.......... (1)}$$

La compresión de las barras, debido a la elasticidad en las dos barras:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \left(\frac{Fl_1}{SE_1}\right) + \left(\frac{Fl_2}{SE_2}\right) \quad \text{.......... (2)}$$

Igualando (1) y (2) y despejando F : $F = \Delta t \dfrac{(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)S}{\left(\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2}\right)}$

(06) Una carga de 100 Kgf está colgada de un alambre de acero de 1 m de longitud y 1 mm de radio. ¿A qué es igual el trabajo de tracción del alambre?



Solución:

Se conoce

$E = 21.6\times10^{10}\ \text{N/m}^2$, $r = 10^{-3}\ \text{m}$

$F = 10^2\times 9.8\ \text{N}$, $S = \pi r^2 = 3.14\times(10^{-3})^2\ \text{m}^2$

Se sabe que el trabajo debido a la tracción del alambre está dado por

$$W = \tfrac{1}{2} E S L_0 \Delta^2$$

La deformación unitaria: $\Delta = F/SE$

Reemplazando, $W = \frac{1}{2} E S L_0 \,(F/SE)^2 = L_0\; F^2/2\,SE$

$$W = \frac{1m \times (10^2 \times 9.8N)^2}{2 \times 3.14 \times (10^{-3})^2 m^2 \times 21.6 \times 10^{10}\; N/m^2} = 0.70 \text{ Joules}$$

(07) Hallar el módulo de Poisson para el cual el volumen de un alambre no varía al alargarse.

Solución:

El volumen inicial $V_0 = \pi r_0^2 l_0$

El volumen final $V_f = \pi(r_0 - \Delta r)^2\,(l_0 + \Delta l)$

donde el radio se acorta y la longitud se alarga.

Como el volumen no varía $v_0 = V_f$

$$\pi r_0^2\; l_0 = \pi(r_0 - \Delta r)^2\,(l_0 + \Delta l)$$

$$\pi r_0\; l_0 = \pi(r_0^2 l_0 - 2r_0 l_0 \Delta r + l_0 \Delta r^2 + r_0^2 \Delta l - 2r_0 \Delta l \Delta r + \Delta l \Delta r^2)$$

donde los términos que poseen Δr^2, $\Delta l \cdot \Delta r$ son nulos.

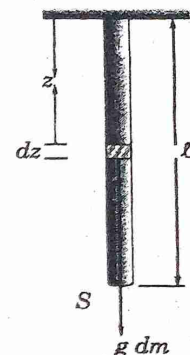
Simplificando $2\pi r_0\, l_0\, \Delta r = \pi r_0^2 \Delta l \quad 2 l_0 \Delta r = r_0 \Delta l$

Como por definición $\mu = \dfrac{\frac{\Delta r}{r_0}}{\frac{\Delta l}{l_0}}$,

$$\mu = \frac{\frac{\Delta r}{r_0}}{\frac{\Delta L}{l_0}} = \frac{1}{2}$$

Luego: $\mu = 0.5$

(08) Una barra de cobre de longitud l se suspende de uno de los extremos de un techo. Hallar (a) el alargamiento de la barra. Δl bajo la acción de su propio peso. (b) El incremento relativo de su volumen $(\Delta V/V)$.



Solución:

a) Debemos suponer que la gravedad permanece constante, porque el cambio de gravedad es cero. Como la fuerza se ejerce sobre la barra es su propio peso, entonces tomemos un diferencial de su peso.

$$dp = g\,dm = g\rho S\,dz$$

$$p = \rho g S \int_0^{l_0} dz = \rho\, g\, S\, l_0 \quad \ldots\ldots (1)$$

Por definición: $E = \dfrac{\frac{F}{S}}{\frac{\Delta l}{l_0}}$ y $F = ES\frac{\Delta l}{l_0}$ ……(2)

Igualando (1) y (2) , $ES\frac{\Delta l}{l_0} = \rho\, g\, S\, l_0$

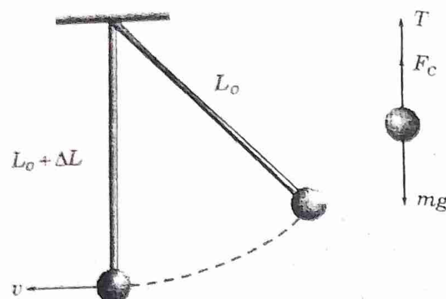
$$\Delta l = \rho g\; l_0^2 / E$$

b) En teoría se demuestra $\frac{\Delta V}{V} = \frac{(1-2\mu)\sigma}{E}$ ……(3)

Como $E = \frac{\sigma}{(\Delta l/l_0)}$ $\quad \frac{\sigma}{E} = \frac{\Delta l}{l_0}$ ……(4)

Reemplazando (4) en (3): $\frac{\Delta V}{V} = (1 - 2\mu)\,\frac{\Delta l}{l_0}$

(09) Una esfera de hierro de 20 cm de diámetro y 25 Kgf de peso, se encuentra suspendida de un punto a 2m sobre el suelo por un alambre de 3 m de longitud. El diámetro del alambre es 0.10 cm., se le comunica una oscilación al péndulo así formado de manera que el centro de la esfera, en la posición más baja está animado de una velocidad de 2 m/s. ¿A qué distancia pasará del suelo?. El módulo de Young del hierro es $1.89 \times 10^6\ \text{kgf/cm}^2$.



Solución:

Las fuerzas que actúan sobre la esfera en su posición más baja:

$\Sigma = T - W = F_c$

$T = F_c + W \quad , \quad T = \frac{mv^2}{L_0+\Delta L} + mg$ .... (1)

La fuerza que produce estiramiento ΔL es la tensión.

Como por definición $E = \frac{T/S}{\Delta L/L_0}$ $\quad T = \frac{SE}{L_0}\Delta L$ .... (2)

Reemplazando valores en (2):

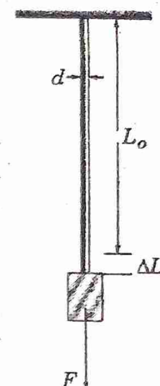
$T = \frac{3.14 \times (0.10)^2 \times 1.89 \times 10^6 \times 9.8 \times \Delta L}{4 \times 3.0} = 48466\ \Delta L\ N$ .... (3)

De (3) en (1): $48466\ \Delta L = \frac{mv^2}{(L_0+\Delta L)} + mg$

$\Delta L^2 + 3\Delta L - 0.017 = 0 \quad \Delta L = 0.05m = 5\text{ cm}$

La esfera pasará a una distancia de 2m – 0.05 m = 1.95 m del suelo.

(10) (a) Calcule la extensión de un alambre de acero que tiene una longitud de 2 m y diámetro 1 mm cuando es cargado con un peso de 10 Kgf si el módulo de Young para el acero es $21.6\times10^{10}\ \text{N/m}^2$. (b) ¿Cuánta energía se almacenará al estirar el alambre?



Solución:

a) De la definición $E = \frac{F/S}{\Delta L/L_o}$, y por lo tanto $\Delta L = \frac{FL_o}{ES}$

Reemplazando valores:

$\Delta L = \frac{10 \times 9{,}8 \times 2}{2 \cdot 16 \times 10^{10} \times \frac{\pi}{4}(10^{-3})^2} = 11.55 \times 10^{-4}\ m = 0.115\text{ cm}$

$\Delta L = 0.115\text{ cm}$

(11) Calcule la densidad del agua a 8 Km de profundidad si su coeficiente de compresibilidad es $\chi = 4.8\times10^{-10}\ \text{m}^2/\text{N}$.

Solución:

Por definición del módulo de compresibilidad: $B = \frac{1}{\chi} = -\frac{p}{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)}$

Por tanto: $\frac{\Delta V}{V} = -p\chi$ .... (1)

De $\rho = \frac{m}{V}$ se obtiene por derivación $\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V}$ .... (2)

De (1) en (2) $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 1 \times 980 \times 8 \times 10^5 \times 4.8 \times 10^{-10} \times \frac{10^4}{10^5} = 0.038$

$\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0} = 0.038$, de donde $\rho = \rho_0(1+0.038) = 1.038\ \rho_0$

$\rho = 1.038\times10^3\ \text{Kg/m}^3$

(12) (a) ¿Qué presión p debe actuar sobre todas las caras de un cubo de caucho, para que su densidad aumente en el 1 por 100?. (b) ¿Qué fuerza por área nos proporciona el alargamiento del cubo en un 10 por 100 en la dirección de una de sus aristas?. Se sabe que $E = 7.2\ \text{Kgf/cm}^2$ y $\mu = 0.499$.

Solución:

a) En teoría se ha deducido $\frac{\Delta V}{V} = \frac{(1-2\mu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

Como la presión es la misma para todas las caras, se tiene:

$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\sigma}{E}(1-2\mu)$ .... (1)

Además $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta p}{p}$ .... (2)

Tomar en cuenta que $\sigma = p =$ presión .

De (1) y (2): $p = \left(\frac{\Delta p}{p}\right)\frac{E}{3(1-2\mu)} = \frac{0.01 \times 7.2\ \text{Kgf/cm}^2}{3(1-2\times 0.499)} = 12\ \text{Kgf/cm}^2$

$p = 12\ \text{Kgf/cm}^2$

b) Nos piden el esfuerzo: $E = \frac{\sigma}{\Delta}$, como dato $\Delta = 0.10$

$\sigma = \Delta E = 0.10 \times 7.2\ \text{Kgf/cm}^2 = 0.72\ \text{Kgf/cm}^2$

$= 0.72\ \text{Kgf/cm}^2$

(13) ¿Cuál es la presión necesaria para comprimir un cubo de hule al 90% de su volumen original?. Compara esta presión con la presión atmosférica. La compresibilidad del hule es de $40 \times 10^{-11}\ \text{m}^2/\text{N}$.

Solución:

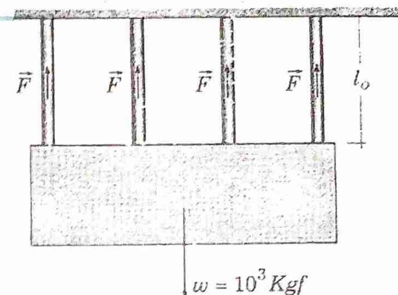
Por definición: $B = \frac{p}{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)}$ por tanto $\frac{\Delta V}{V} = 0.10$

$p = B\left(\frac{\Delta V}{V}\right) = \frac{1}{40 \times 10^{-11}\ \text{m}^2/\text{N}} \times 0.10 = 2.5 \times 10^8\ \text{N/m}^2$

$p = 2.5 \times 10^8\ \text{N/m}^2$

(14) La suspensión de un ascensor montacargas está constituida por 4 cables iguales de acero de 1.00 cm. de diámetro cada uno. Cuando el suelo del ascensor se encuentra a nivel del primer piso del edificio, la longitud de los cables de suspensión es de 20 m. Si se introduce en el ascensor una máquina de 1000 Kgf, ¿a qué distancia por debajo del nivel del suelo, quedará el piso del ascensor?. Se supone que el descenso se debe exclusivamente al alargamiento de los cables de suspensión $E = 2 \times 10^6\ \text{Kgf/cm}^2$.

Solución:



$\Sigma F = 0$ $\quad 4F - W = 0$ $\quad F = W/4$

Por definición $E = \frac{F l_0}{S \Delta l}$

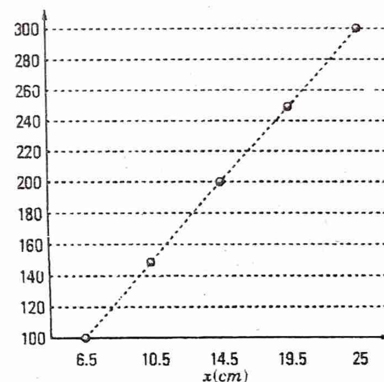
$\Delta l = \frac{W l_0}{4SE} = \frac{1000 \times 20}{4 \times \pi \frac{(10^{-2})^2}{4} \times \frac{2 \times 10^6}{10^{-4}}} = 3 \times 10^{-3}\ \text{m}$

$\Delta l = 3\ \text{mm}$

(15) El extremo superior de un cordón de goma está fijo y las extensiones causadas por suspender varias masas M de su extremo inferior han sido medidas. Los resultados se muestran en la tabla.

M(g)	Ext (cm)	M(g)	Ext (cm)
100	6.5	250	19.5
150	10.5	300	25.0
200	14.5		

Haga la gráfica carga versus extensión y de ella determine el trabajo que se hace en aumentar la extensión del cordón desde 7.5 cm. hasta 22.5 cm.



Solución:

Primero hallamos la constante de elasticidad K del cordón de goma, a partir de la pendiente de la recta (por mínimos cuadrados).

$K = \frac{300-100}{25-6.5} = 10.8\ \text{gf/cm} = 10.6 \times 10^3\ \text{dinas/cm}$

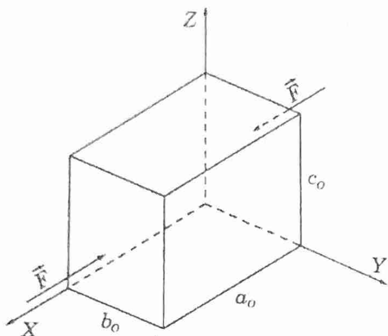
Para determinar el trabajo se usa la expresión vista en teoría:

$$W = \int F(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} Kx dx = \frac{1}{2}K\left[x_2^2 - x_1^2\right]$$

Donde $x_1 = 7.5$ cm y $x_2 = 22.5$ cm

Por tanto: $W = 4.77 \times 10^6$ Ergios.

(16) Se aplican fuerzas de compresión a dos caras opuestas de un bloque rectangular de volumen $V_o = a_o b_o c_o$. La disminución relativa del volumen es 0.0004 y la disminución relativa de la longitud del bloque es 0.02. Hallar μ.



Solución:

Se dedujo en teoría $\frac{\Delta V}{V} = (1-2\mu)\frac{(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)}{E}$

En este caso, la fuerza se aplica a lo largo del eje X, entonces $\sigma_y = \sigma_z = 0$

Como es una compresión a lo largo del eje X : $\frac{-\Delta V}{V} = (1-2\mu)\frac{\sigma_x}{E}$ .... (1)

Además $E = \frac{\sigma_x}{\Delta x'}$, por dato $\Delta x = -\frac{\Delta a}{a_0}$, entonces $-\frac{\Delta a}{a_0} = +\frac{\sigma_x}{E}$ .... (2)

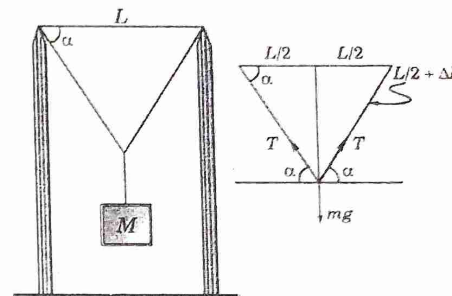
Reemplazando (2) en (1): $-\frac{\Delta V}{V} = (1-2\mu)\left(-\frac{\Delta a}{a_0}\right)$

$$\frac{\Delta V}{V} = 0.0004 \quad , \quad \frac{\Delta a}{a_0} = 0.02$$

$$0.0004 = (1-2\mu)(0.02)$$

el coeficiente de Poisson: $\mu = 0.49$

(17) Entre dos columnas fue tendido un alambre de longitud L. En el alambre, exactamente en el centro, fue colgado un farol de masa M. El área de la sección transversal del alambre es S, el módulo de Young es E. Hallar α, del alambre, considerándolo pequeño.



Solución:

El diagrama de fuerzas es el siguiente:

$\Sigma F_y = 0$ (equilibrio)

$2T \text{ sen } \alpha - \text{mg} = 0$

$T = \text{mg}/2 \text{ sen } \alpha$ .... (1)

Por definición $E = \frac{\sigma}{\Delta} = \frac{T}{S\Delta} = \frac{T\left(\frac{L}{2}\right)}{S\,\Delta L}$

$T = 2\,ES\left(\frac{\Delta L}{L}\right)$ .... (2)

También $\cos\alpha = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{2}+\Delta L}$; $\Delta L = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)$ .... (3)

De (2) , (3) en (1) : $2\,ES\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)\right] = \frac{\text{mg}}{2\text{ sen }\alpha}$

Haciendo aproximaciones, porque α es pequeño, se tiene:

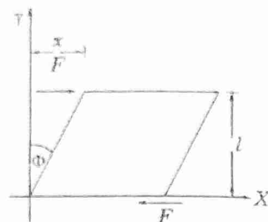
$\text{sen}\,\alpha = \alpha$; $\cos\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2(\alpha/2) = 1 - 2(\alpha/2)^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$

$$ES\left(\frac{1}{1-\alpha^2/2} - 1\right) = \frac{mg}{2\alpha}$$

$$\frac{\alpha^3}{1-\alpha^2/2} = \frac{mg}{ES} = \alpha^3$$

$$\alpha = (mg/ES)^{\frac{1}{3}}$$

(18) A dos caras opuestas de un bloque cúbico de acero de 25 cm. de lado se aplican sendas fuerzas de extensión opuesta de 200 Kgf c/u. Hallar el ángulo de cizalla y el desplazamiento relativo. El módulo de rigidez del acero vale 8.4×10^5 Kgf/cm^2.



Solución:

a) Por definición $\eta = \dfrac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{deformación cortante}} = \dfrac{F/S}{\Phi}$

$$\Phi = \frac{F}{S\eta} = \frac{F}{l^2\eta} = \frac{200\ \text{Kgf}}{25^2\ \text{cm}^2\times 8.4\times10^5\ \text{Kgf/cm}^2}$$

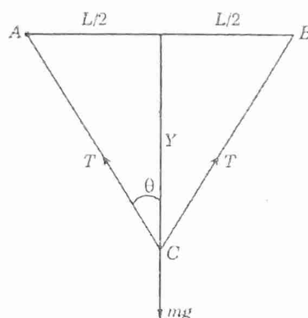
$\Phi = 3.8\times10^{-7}$ rad

b) El desplazamiento x, se determina $tg\Phi = \frac{x}{l} \approx \Phi$

$x = \Phi l = 3.8\times10^{-7}\times 25\ \text{cm} = 0.95\times10^{-5}$ cm

$x = 0.95\times10^{-5}$ cm

(19) Un alambre delgado y uniforme de radio r está colocado horizontalmente entre dos soportes rígidos A y B de tal manera que la longitud del alambre es L. Una masa m se cuelga en el punto medio C del alambre, desplazándose una distancia vertical Y que es muy pequeña comparada con L. Hallar (a) el esfuerzo, (b) la deformación, (c) el módulo de Young del alambre en función de m, L, r, Y. Despréciese en cada caso cuadrados y potencias mayores de (Y/L) comparadas con la unidad.



Solución:

a) $\sum F_y = 0$, $2T\cos\theta = mg$, $T = \dfrac{mg}{2\cos\theta}$

El esfuerzo: $\sigma = \dfrac{T}{S} = \dfrac{mg}{2\pi r^2\cos\theta}$

$$\sigma = \frac{mg}{2\pi r^2}\,\frac{\sqrt{(L/2)^2+y^2}}{Y} = \frac{mg(L/2)\sqrt{1+(Y/L/2)^2}}{2\pi r^2 Y}$$

$$\sigma = \frac{mgL}{4\pi r^2 Y}$$

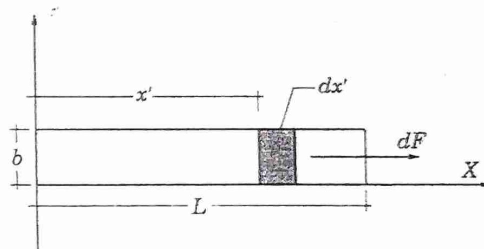
b) La deformación unitaria $\Delta = \dfrac{L_f - L_0}{L_0} = \dfrac{\sqrt{(L/2)^2+y^2}-(L/2)}{L/2}$

$$\Delta = \frac{\left(\frac{L}{2}\right)\left[1+\frac{1}{2}(Y/L/2)^2-\ldots-1\right]}{L/2} = \frac{2Y^2}{L_2}\ ;\ \Delta = \frac{2Y^2}{L^2}$$

c) $E = \dfrac{\sigma}{\Delta} = \dfrac{\frac{mgL}{4\pi r^2 Y}}{2Y^2/L^2} = \dfrac{mgL^3}{8\pi r^2 Y^3}$

El módulo es $E = mg\,L^3/8\pi r^2 Y^3$

(20) Una barra de 8 kg. cuya sección recta es un cuadrado de longitud $b = 50$ mm., tiene una longitud $L = 30$ cm. Se mueve jalada sobre una superficie lisa por acción de una fuerza aplicada uniformemente sobre uno de sus extremos. La barra adquiere una aceleración constante 2.4 m/s^2. (a) ¿Cuál es el esfuerzo en una sección transversal de la barra normal a su longitud y a una distancia de x = 25 mm. del extremo posterior de la barra? (b) ¿Cuál es el valor de dicho esfuerzo en el centro de la barra?



Solución:

a) Hallemos la fuerza $dF = a\,dm$

$$dF = a\rho b^2\,dx'\ ,\ F = a\,\rho\,b^2\int_0^x dx'$$

$$F = a\,\rho\,b^2 x$$

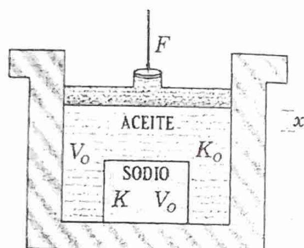
El esfuerzo $\sigma = a\rho b^2\, x/b^2 = a\rho x = a(m/b^2 L)\, x$

$\sigma = am\, x/b^2\, L = 640\ \text{N/m}^2$

b) Para $x = \frac{L}{2}$, $\sigma = \frac{am\,(L/2)}{b^2 L} = \frac{ma}{2b^2} = 3840\ \text{N/m}^2$

$\sigma = 3840\ \text{N/m}^2$

(21) La compresibilidad del sodio se mide observando el desplazamiento del émbolo de la figura al aplicar una fuerza F. El sodio esta sumergido en aceite que llena el cilindro por debajo del émbolo. Supóngase que las paredes del cilindro son perfectamente rígidas, que no hay rozamiento ni pérdida de aceite. Calcúlese la compresibilidad del sodio en función de la fuerza F, el desplazamiento del émbolo x, del área de este último S, del volumen inicial del aceite V_0, del volumen del sodio V_0 y de la compresibilidad del aceite K_0.



Solución:

Hallemos el cambio de volumen del aceite: $\Delta V_{ac} = V_0 - Sx$

Hallemos el cambio de volumen del sodio debido al aceite: $\Delta V_{Na} = V_0 - K_0 \Delta p\, V_0$

Luego el cambio neto del volumen del sodio será:

$$\Delta V_{Na} = (V_0 - K_0 \Delta p\, V_0) - (V_0 - Sx)$$

debido a que las paredes del cilindro son rígidas.

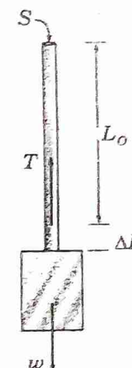
Luego, por definición:

$$K_{Na} = \frac{\Delta V_{Na}/V_0}{\Delta p} = \frac{1}{V_0}\,\frac{(V_0 - K_0\Delta p V_0 - V_0 + Sx)}{\Delta p}$$

$$K_{Na} = \frac{1}{V_0}\,\frac{(Sx - K_0 V_0 \Delta p)}{\Delta p} = \frac{1}{V_0}\left(\frac{Sx}{F/S} - K_0 V_0\right) \quad \text{y} \quad \Delta p = F/S$$

$$K_{Na} = \frac{1}{V_0}\left(\frac{xS^2}{F} - K_0 V_0\right)$$

(22) Al levantar una jaula que pesa 10 Tn. con un cable que tiene 200 m. de longitud y área de sección recta 1,000 mm^2, éste se estira 170 mm. Hallar la aceleración de la jaula despreciando el peso del cable que es de acero y su módulo vale $2\times10^6\ \text{Kgf/cm}^2$



Solución:

Como no hay equilibrio $\Sigma F = ma$

$T - w = m\,a$ .... (1)

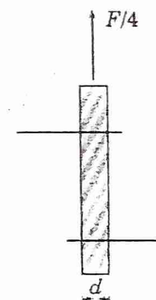
La tensión T da lugar a una deformación ΔL

$T = \frac{ES\Delta L}{L_0}$ .... (2)

de (2) en (1): $\frac{ES\Delta L}{L_0} - mg = ma$, $a = \frac{ES\Delta L}{mL_0} - g$

Reemplazando valores $a = 7.86\ \text{m/s}^2$

(23) Dos bandas metálicas se mantienen unidas mediante cuatro remaches que tienen cada uno un diámetro de 6 mm. ¿Cuál es la tensión máxima que se puede ejercer sobre la banda remachada si el esfuerzo cortante sobre los remaches no ha de exceder de 7.2 Kgf/mm^2?. Supóngase que cada remache soporta una cuarta parte de la carga.



Solución:

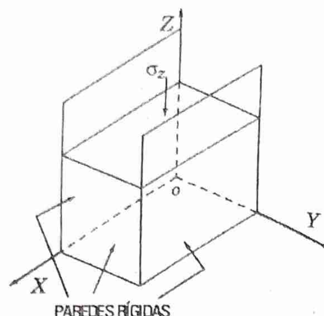
Como el esfuerzo a la rotura es: $\sigma_r = \frac{F'}{S}$

Cada remache soporta la cuarta parte, es decir $F' = \frac{F}{4}$; $\sigma_r = \frac{F}{4S}$

$F = 4\sigma_r S = 4\sigma r\, \frac{\pi d^2}{4} = \pi\,\sigma_r d^2$

$F = 3.14 \times 7.2\ \text{Kgf/mm}^2\,(6\,\text{mm})^2 = 813.8\ \text{Kgf}$

(24) Un cubo se encaja en un hueco adecuado de paredes rígidas y sobre la cara libre se hace actuar la presión σ_z. Calcular la deformación unitaria en la dirección σ_z.



Solución:

Por ser las paredes rígidas: $\Delta y = \Delta x = 0$

Además $\sigma_x = \sigma_y$, porque:

Se ha deducido en teoría: $\Delta y = \dfrac{\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} = 0$

$$\sigma_y - \mu(\sigma_y + \sigma_z) = 0 \quad , \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_z} = \frac{\mu}{1-\mu}$$

También $\Delta x = \dfrac{\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} = 0$

$$\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad , \quad \frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \frac{\mu}{1-\mu} \quad , \quad \sigma_x = \sigma_z$$

entonces $\Delta z = \dfrac{\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} = \dfrac{\sigma_z - 2\mu\sigma_k}{E}$

$$\Delta z = \frac{\sigma_z - 2\mu[\sigma_z \mu/(1-\mu)]}{E} = \frac{\sigma_z}{E}\,\frac{(1-\mu-2\mu^2)}{1-\mu}$$

(25) Un alambre uniforme está fijo en su extremo superior y tiene un peso atado en el otro extremo. Si la energía de deformación por unidad de volumen es 2×10^4 ergios/cm^3 y el incremento de la longitud por unidad de longitud es 2×10^{-4} (a) Halle el módulo de Young. (b) El esfuerzo.

Solución:

a) Sabemos que la energía que almacena una barra, debido a su deformación es:

$$W = \tfrac{1}{2}EV_0\Delta^2 = \tfrac{1}{2}E(S\,L_0)\Delta^2$$

$$\frac{W}{V_0} = \frac{E\,\Delta^2}{2} \quad , \quad E = 2\left(\frac{W}{V0}\right)\frac{1}{\Delta^2} = \frac{2\times2\times10^4}{(2\times10^{-4})^2}\ \text{ergios/cm}^3$$

$$E = 10^{12}\ \text{dinas/cm}^2$$

b) Por definición $E = \frac{\sigma}{\Delta}$, $\sigma = E\Delta = 10^{12}\,\frac{\text{dinas}}{\text{cm}^2}\times 2\times10^{-4}$

$$\sigma = 2\times10^8\ \text{dinas/cm}^2$$

(26) Un alambre de acero cuya densidad es 7.8 g/cm^3, pesa 16 g y tiene 250 cm. de longitud. Si se estira 1.2 mm. cuando es traccionado por una fuerza de 8 Kg. Halle (a) el módulo de Young para el acero, (b) la energía almacenada en el alambre.

Solución:

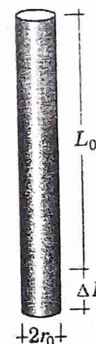
a) Se tiene $m = \rho V_0 = \rho S l_0$, $\rho = 7.8\ \text{g/cm}^3$, $m = 16$ g

$$L_0 = 250\ \text{cm} \quad , \quad \Delta L = 0.12\ \text{cm} \quad , \quad F = 8\ \text{Kg}$$

$$E = \frac{F L_0}{S\Delta L} = \frac{F L_0}{\left(\frac{m}{\rho L_0}\right)\Delta L} = 1.99\times10^{12}\ \text{dinas/cm}^2$$

b) $W = \frac{1}{2}EV_0\Delta^2 = \frac{1}{2}E\left(\frac{m}{\rho}\right)\Delta^2 = 4.71\times10^5$ ergios

(27) Un tubo de goma de 60 cm. de longitud y 8 mm. de diámetro interior se estira hasta alargarse 12 cm. Hallar el diámetro interior del tubo estirado, si el módulo de Poisson para la goma es igual a 0.5.



Solución:

Por definición $\mu = \dfrac{\Delta r/r_0}{\Delta L/L_0} = \dfrac{L_0\Delta r}{r_0\Delta L}$

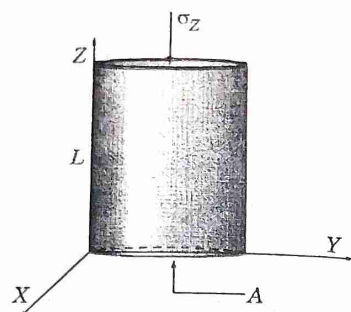
$$\Delta r = \frac{\mu r_0\,\Delta L}{L_0}\ ,\ r = r_0\left(1 - \mu\frac{\Delta L}{L_0}\right)$$

$$r = 4\text{mm}\left(1 - 0.5\times\frac{12}{60}\right) = 3.6\ \text{mm}$$

El diámetro interior será $d = 2r = 7.2$ mm

(28) Sobre una superficie horizontal se puso un cilindro de Cu macizo de longitud 65 cm y desde arriba se le aplicó una fuerza de compresión vertical $10^3 N$, distribuida uniformemente por su extremo. ¿En cuántos mm^3 cambió en este caso el volumen del cilindro?.

$\mu = 0{,}34$, $E = 11.8 \times 10^{10}\ N/m^2$.



Solución:

Se tiene deducido en teoría: $\frac{\Delta V}{V} = \frac{(1-2\mu)}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

En este caso: $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $V = AL$, $\frac{\Delta V}{V} = \frac{(1-2\mu)}{E}\sigma_z$, $\Delta V = \frac{(1-2\mu)}{E}\sigma_z V$

$$\Delta V = \frac{(1-2\mu)}{E}(F/A)(AL) = \frac{(1-2\mu)}{E}FL$$

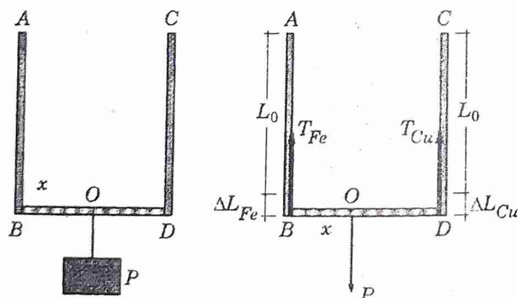
$$\Delta V = \frac{(1-2\times 0{,}34)\times 10^3 \times 0.65}{11.8\times 10^{10}}\,m^3 \qquad \Delta V = 1.7\ mm^3$$

(29) En la figura, AB es un alambre de hierro, CD un alambre de cobre de la misma longitud y sección transversal que el AB y BD una barra de 80 cm de longitud. De esta barra se quiere colgar una carga P = 2 Kgf. ¿A qué distancia x del punto B habrá que colgar la carga para que la barra quede horizontal?

Solución:

Para la barra de Fe : $\Delta L_{Fe} = \frac{T_{Fe} L_0}{S E_{Fe}}$

Para la barra de Cu: $\Delta L_{Cu} = \frac{T_{Cu} L_0}{S E_{Cu}}$



Por la condición del problema:

$\Delta L_{Fe} = \Delta L_{Cu}$

$\frac{T_{Cu}}{T_{Fe}} = \frac{E_{Cu}}{E_{Fe}}$ .... (1)

Por equilibrio de momento:

$\sum \tau_B = xP - 80\,T_{Cu} = 0$ .... (2)

$\sum \tau_O = xT_{Fe} - (80-x)\,T_{Cu} = 0$ .... (3)

$\sum \tau_D = 80T_{Fe} - (80-x)\,P = 0$ .... (4)

De (2) , (3) y (4): $\frac{T_{Fe}}{T_{Cu}} = \frac{80-x}{x}$ .... (5)

De (1) y (5): $\frac{80-x}{x} = \frac{E_{Fe}}{E_{Cu}} = \frac{19.6\times 10^{10}}{11.8\times 10^{10}} = 1.66$

se deduce: $x = 30$ cm

(30) Para hacer un tirador se ha empleado un cordón de goma de 42 cm. de longitud y 3 mm. de radio. El niño que dispara con él, estira la goma 20 cm. al lanzar la piedra. Hallar el módulo de Young de esta goma sabiendo que una piedra cuyo peso era de 0.02 Kgf salió disparada por el tirador con la velocidad de 20 m/s. La variación que experimenta la sección del cordón al estirarse se desprecia.

Solución:

Cuando la goma se estira, almacena energía potencial, que sabemos está dada por $W = \frac{1}{2}EV_0\Delta^2 = \frac{1}{2}ESl_0\Delta^2$.

Al salir disparada la piedra con cierta velocidad, ésta tiene energía cinética.

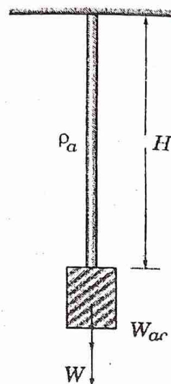
$E_c = \frac{1}{2}mv^2$, como no hay pérdida de energía se tiene: $W = E_c$.

$\frac{1}{2}ESl_0\Delta^2 = \frac{1}{2}mv^2$, $E = \frac{mv^2 l_o}{S(\Delta l)^2}$

Reemplazando valores: $E = \frac{0.02\times(20)^2\times 0.42}{3.14\times(0.003)^2(0.20)^2} = 2.94\times(10)^6\ \frac{N}{m^2}$

(31) Desde un barco se lanzó una pesa sujeta por un cable de acero para medir la profundidad del mar. Despreciando el peso de la pesa en comparación con el cable, hallar la profundidad máxima que se puede medir por este procedimiento. La densidad del agua del mar tómese igual a $1\ g/cm^3$.

Solución:
El cable de acero soporta una tracción debido a su peso y a la pesa adicional, es decir: $W'_{ac} + W$. Conforme el cable se sumerja estará sometido a mayor tracción, hasta el límite de resistencia a la rotura: $\sigma_r S$



Luego: $W'_{ac} + W = \sigma_r S$, según el problema $W'_{ac} \gg W$

1) $W'_{ac} = \sigma_r S$, pero W'_{ac} es el peso del cable de acero cuando está dentro del agua, es decir el peso aparente, debido al empuje:

2) $W'_{ac} = W_{ac} - E = \rho_{ac} S H g - \rho_a S H g$

De (1) y (2) $(\rho_{ac} - \rho_a) S H g = \sigma_r S$

$$H = \frac{\sigma_r}{g(\rho_{ac} - \rho_a)} = 12{,}000 \text{ m}$$

$H = 12$ Km

(32) Hallar la variación relativa de la densidad de una barra de cobre cilíndrica al ser comprimida por una presión $p = 1{,}000 \text{ Kgf/cm}^2$. Para el cobre el módulo de Poisson es 0.34.

Solución:

Se sabe por teoría $\frac{\Delta V}{V} = \frac{(1 - 2\mu)\,\sigma}{E}$ .... (1)

para una presión aplicada $p = \sigma$ (esfuerzo de compresión)

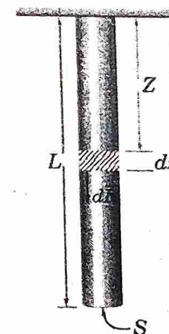
De la expresión $\rho = \frac{m}{V}$, derivando, se obtiene: $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta V}{V}$ .... (2)

De (2) y (1) $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{(1 - 2\mu)}{E}\sigma = \frac{(1 - 2 \times 0.34) \times 10^3 \times 9.8}{1.18 \times 10^{11} \times 10^{-4}}$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0.265 \times 10^{-3}$$

(33) Hallar la longitud que tendrá un alambre de plomo que colgado verticalmente, comience a romperse por su propio peso.

$(\sigma_r = 0.2 \times 10^8 \text{ N/m}^2 \;\; , \; \rho = 11.3 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3)$



Solución:

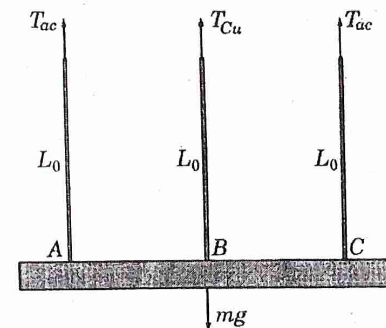
La fuerza que da lugar al alargamiento de la barra es la de tracción gravitacional:

$dF = \rho S g\, dz$, si el cambio de gravedad es nulo.

$$F = \rho S g \int_0^L dz = \rho S g L$$

El alambre se destruirá cuando alcance la tensión de ruptura $F_r = \sigma_r S$, como $F = F_r$, entonces $L = \frac{\sigma_r}{\rho g}$, reemplazando valores $L = 180.6$ m .

(34) Una barra uniforme horizontal de masa 200 Kg está soportada horizontalmente por tres alambres verticales A, B, C, cada uno de una longitud inicial de 2 metros y sección recta 2 cm^2 . B es un alambre de cobre que está soldado al centro de la barra, A y C son alambres de acero y están colocados simétricamente uno a cada lado de B. Hallar (a) la tensión en cada alambre, (b) la extensión en cada alambre.



Solución:

En la condición de equilibrio: $\sum F_y = 0$.

$2\,T_{ac} + T_{Cu} = mg$

Por definición de módulo: $2\left(\frac{E_{ac} S\, \Delta L}{L_o}\right) + \frac{E_{Cu} S\, \Delta L}{L_o} = mg$

Despejando: $\Delta L = \frac{mgL_o}{S(2E_{ac}+E_{Cu})}$ y reemplazando valores:

$E_{ac} = 21.6\times10^{10}\ \text{N/m}^2 \quad , \quad E_{Cu} = 11.8\times10^{10}\ \text{N/m}^2$

$\Delta L = 0.36\times10^{-4}\ \text{m}$

(35) ¿Qué diámetro mínimo debe tener un cable de acero para poder aguantar 1 Tn de carga?

Solución:

Sabemos por definición de resistencia a la rotura: $\sigma_r = F/S$

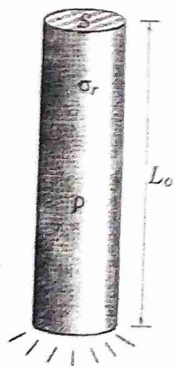
$\sigma_r = \frac{F}{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)}$, despejando $d = \left(\frac{4F}{\pi\sigma_r}\right)^{1/2}$, y reemplazando valores:

$d = \left(\frac{4\times10^3\times9.8}{3.14\times7.85\times10^8}\right)^{1/2}\cdot m = 3.98\times10^{-3}m$

$d = 4\times10^{-3}m$

(36) Hallar de que altura se puede construir un muro vertical de hormigón si su resistencia de rotura es de $180\ \text{Kg/cm}^2$ y se emplea un coeficiente de seguridad 5. La densidad del hormigón es de $2200\ \text{Kg/m}^3$.

Solución:



Por definición: $\sigma_r = F/S$

Como la fuerza que debe soportar el muro es su propio peso, se tiene:

$$F = \rho S L_o$$

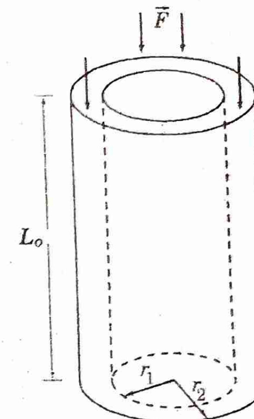
luego: $\sigma_r = \rho S L_o/S = \rho L_o$

reemplazando valores: $L_o = \sigma_r/\rho$

$L_o = 180/2200\times10^{-4}m = 818m$

Como el coeficiente de seguridad es 5, entonces la altura del muro debe ser: $818\ m/5 \cong 164\ m$.

(37) Un cilindro recto, hueco, de sección circular, de fundición, tiene un diámetro exterior de 10 cm. y el interior de 8 cm. Si se aplica una fuerza axial de compresión de 10,000 Kg. Hallar el acortamiento, para 60 cm. de longitud y el esfuerzo de la carga. No considere la deformación lateral del cilindro y $E = 2\times10^6\ \text{Kg/cm}^2$.



Solución:

Para hallar el acortamiento, por teoría:

$\Delta L = L_o\Delta$

La deformación unitaria: $\Delta = \sigma/E$

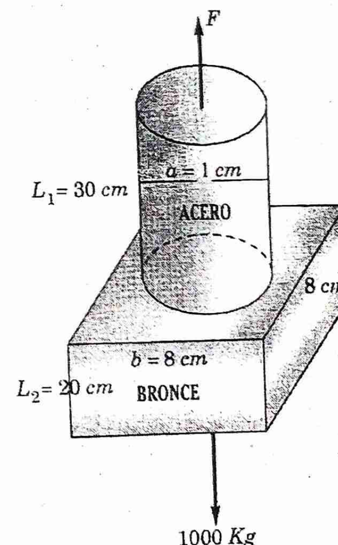
Luego el esfuerzo : $\sigma = F/S = F/\pi(r_2^2 - r_1^2)E$

Entonces : $\Delta L = L_o F/E\pi(r_2^2 - r_1^2)$

Reemplazando valores: $\Delta L = 0.011\ \text{cm}$

(38) Una varilla circular maciza de acero de 10 mm. de diámetro y de 30 cm. de longitud, está rígidamente unida al extremo de una barra cuadrada de bronce de 8 cm. de lado y 20 cm. de longitud, con sus ejes sobre la misma recta. Se aplica una fuerza de tracción axial de 1000 Kg en cada extremo. Hallar el alargamiento total del conjunto. Para el acero $E_a = 20\times10^5\ \text{Kg/cm}^2$ y el bronce $E_b = 9\times10^5\ \text{Kg/cm}^2$.

Solución:



Hallemos la deformación para el acero:

$\Delta L_a = Fl_1/S_1E_a$

$\Delta L_a = \frac{1000\times 30}{3.14(0.5)^2\times 20\times 10^5}$

$\Delta L_a = 0.0191$ cm

Para el bronce:

$\Delta L_b = Fl_2/S_2E_b$

$\Delta L_b = \frac{1000\times 20}{8\times 8\times 9\times 10^5}$

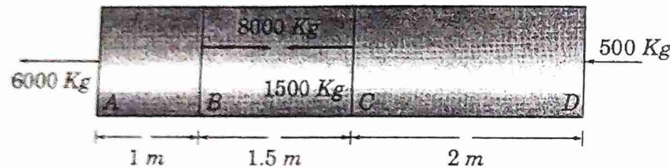
$\Delta L_b = 0.00035$ cm

El alargamiento pedido será: $\Delta L_a + \Delta L_b = 0.0191 + 0.00035$ cm $= 0.01945$ cm

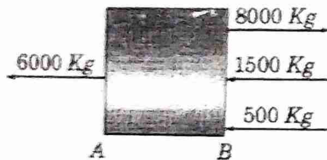
(39) Una barra de bronce de 20 cm^2 de sección está sometida a las fuerzas axiales representada en la figura. Hallar el alargamiento total de la barra.

$$E = 1\times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

Solución:



Región AB :

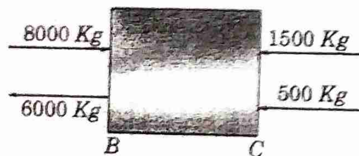


La deformación longitudinal es un alargamiento:

$$\Delta L_{AB} = FL/SE$$

$\Delta L_{AB} = 6000\times 100/20\times 10^6 = 0.03$ cm

Región BC :

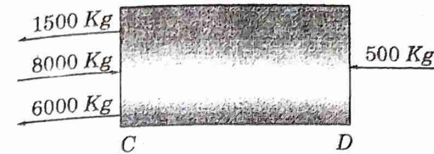


La deformación es una compresión:

$$\Delta L_{BC} = \frac{-2000\times 150}{20\times 10^6}$$

$$\Delta L_{BC} = -0.015 \text{ cm}$$

Región CD:



La deformación es una compresión:

$$\Delta L_{CD} = \frac{-500\times 200}{20\times 10^6}$$

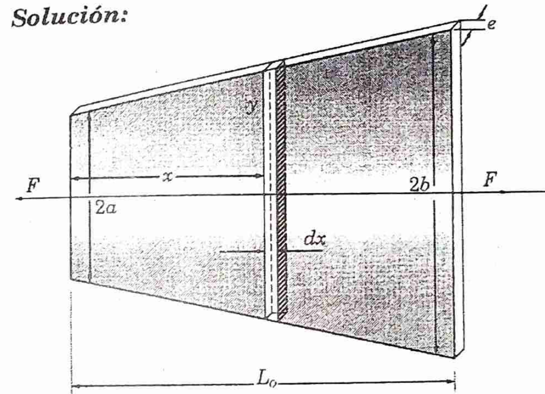
$$\Delta L_{CD} = -0.005 \text{ cm.}$$

La deformación total es un alargamiento:

$$\Delta L = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} + \Delta L_{CD} = 0.01945 \text{ cm}$$

(40) Una placa de acero delgada tiene la forma trapezoidal de la figura. El espesor es e y varia uniformemente desde una anchura de $2a$ hasta otra de $2b$ en una longitud L_o. Si se aplica en cada extremo una fuerza axial de F. Hallar el alargamiento de la placa, si se conoce E.

Solución:



Se puede observar que la deformación no es homogénea, de la expresión: $\Delta L = FL/SE$

Para un diferencial de deformación se tendrá:

$d\Delta L = Fdx/SE = d\Delta L = Fdx/2yeE$ ....(1)

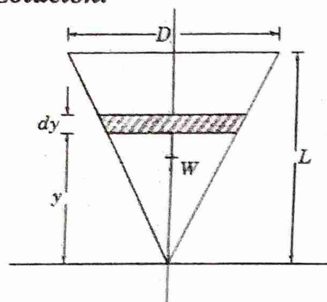
Por semejanza de triángulos: $\frac{y-a}{x-0} = \frac{b-a}{L_0-0}$, $y = \frac{x}{L_0}(b-a)+a$

reemplazando en (1) el valor de y e integrando:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{Fdx}{2\left[\frac{x}{L}(b-a)+a\right]eE} = \frac{FL}{2eE(b-a)}Ln(b/a)$$

(41) Una barra cónica maciza de sección circular está suspendida verticalmente como en la figura. La longitud de la barra es L, el diámetro de su base D, el módulo de elasticidad E y el peso específico es γ. Hallar el alargamiento de la barra debido a su propio peso.

Solución:



Usando nuevamente la expresión:

$\Delta L = FL/SE$

En este caso:

$$d\Delta L = \frac{Wdy}{SE} \quad \ldots\ldots (1)$$

donde: $W = \gamma v = \gamma(1/3\ Sy)$ ...... (2)

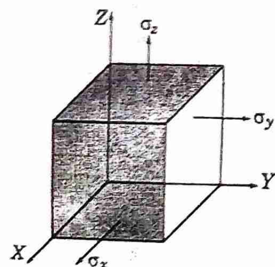
De (2) en (1): $d(\Delta L) = (\gamma\ y\ S/3)\ dy/SE$

integrando: $$\Delta L = \frac{\gamma}{3E}\int_0^L y\,dy$$

$$\Delta L = \gamma L^2/6E$$

(42) Se tiene un estado de tensiones en un elemento para el cual se ejerce una tensión de σ_y, en una dirección y se impide totalmente la contracción lateral en las otras dos direcciones. Hallar la relación $\sigma y/\Delta y$.

Solución:



Según las condiciones del problema:

$\Delta x = \Delta z = 0$

De las ecuaciones de teoría:

$$\Delta x = \frac{1}{E}[\sigma x - \mu(\sigma y + \sigma z)] \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\Delta y = \frac{1}{E}[\sigma y - \mu(\sigma x + \sigma z)] \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\Delta z = \frac{1}{E}[\sigma z - \mu(\sigma x + \sigma y)] \quad \ldots\ldots (3)$$

De (1): $0 = \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)$

$$\sigma_x = \mu(\sigma_y + \sigma_z) \quad \ldots\ldots (4)$$

De (3): $0 = \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)$

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) \quad \ldots\ldots (5)$$

De (5) en (4):

$$\sigma_x = \mu[\sigma_y + \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\sigma_x = \mu\sigma_y/(1-\mu) \quad \ldots\ldots (6)$$

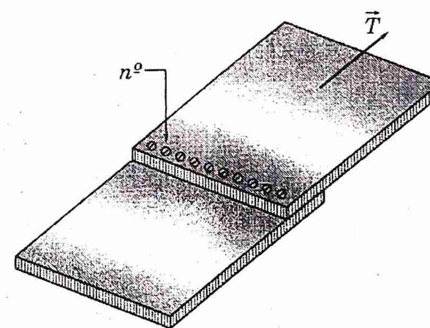
De (6) en (5): $$\sigma z = \mu\left[\frac{\mu\sigma_y}{1-\mu} + \sigma_y\right] = \frac{\mu\sigma_y}{1-\mu} \quad \ldots\ldots (7)$$

De (6) y (7) en (2): $$\Delta y = \frac{1}{E}\left\{\sigma_y - \mu\left[\frac{\mu\sigma_y}{1-\mu} + \frac{\mu\sigma_y}{1-\mu}\right]\right\}$$

simplificando: $$\frac{\sigma_y}{\Delta y} = E(1-\mu)/(1-\mu-2\mu^2)$$

(43) Una unión remachada de dos placas metálicas tiene n° pernos de cierto material. La máxima tensión que se puede ejercer sobre la banda es T y la fatiga por cizalladura tiene un valor máximo en los remaches dados por σ_T. Hallar el diámetro de cada remache.

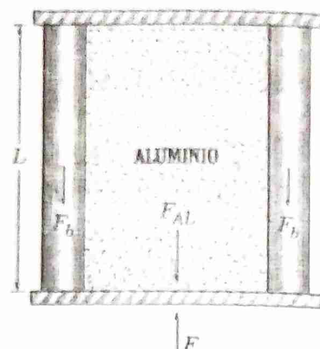
Solución:



Sea T la fuerza que se ejerce sobre la banda, en la que hay n° pernos, la fuerza sobre un perno será: $F_T = T/n^{\circ}$.

Por definición de cizalladura: $$\sigma_T = \frac{F_T}{S} = \frac{T/n^{\circ}}{\pi d^2/4} = \frac{4T}{n^{\circ}\pi d^2}\ ,\quad \sqrt{\frac{4T}{n^{\circ}\pi\sigma_T}} = d$$

(44) Se tiene un tubo de bronce que rodea a un cilindro macizo de hormigón, comprimido todo el conjunto entre placas infinitamente rígidas, por fuerzas aplicadas centralmente como en la figura. El cilindro de hormigón tiene 12 cm. de diámetro y el diámetro exterior del tubo de bronce es de 15 cm. Si la fuerza es de 5,000 kg. Hallar las tensiones en el bronce y en el hormigón. Para el Bronce $E = 9 \times 10^6$ Kg/cm^2 y el Aluminio $E = 7 \times 10^6$ Kg/cm^2.



Solución:

Sea σ_b el esfuerzo debido al bronce y σ_{Al} al aluminio. Por la condición de equilibrio.

$$\Sigma F = 0$$

$$F - F_b - F_{Al} = 0$$

$$F = F_b + F_{Al} \quad \text{.......................................} \quad (1)$$

Las deformaciones que se producen en el bronce y aluminio, son iguales; debido a las placas rígidas:

$$\Delta b = \Delta Al$$

$$\frac{F_b L}{S_b E_b} = \frac{F_{Al} L}{S_{Al} E_{Al}} \quad \text{.......................................} \quad (2)$$

donde: $S_b = \pi[(7.5)^2 - (5)^2] = 31.25\pi \text{ cm}^2$

$S_{Al} = \pi(6)^2 = 36\pi \text{ cm}^2$

reemplazando en (2) : $F_b = 1,116 F_{Al}$ .... (3)

De (3) en (1): $F = 1.116 F_{Al} + F_{Al} = 5000 \text{Kg}$

$F_{AL} = 2363 \text{Kg}$

$F_b = 2637 \text{Kg}$

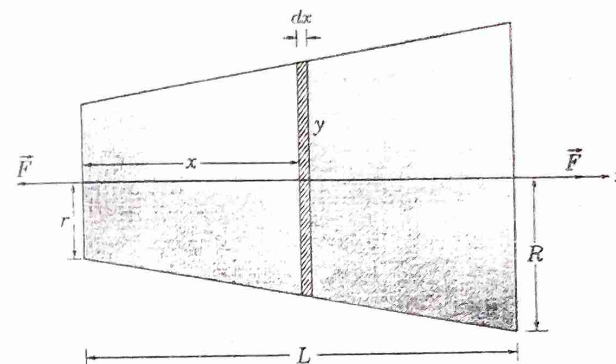
Por definición:

$$\sigma_b = F_b / S_b = 26.87 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\sigma_{Al} = F_{Al} / S_{Al} = 20.90 \text{ Kg/cm}^2$$

(45) Una barra troncocónica de sección circular varía uniformemente entre un radio menor r y uno mayor R, con longitud L. Hallar el alargamiento debido a una fuerza axial $\vec{F}$ aplicada en cada extremo, ver figura.

Solución:



Sabemos por teoría, el alargamiento es igual a: $\Delta L = FL/SE$

En este caso, la deformación no es uniforme, se tiene que trabajar con un diferencial de alargamiento:

$$d(\Delta L) = Fdx/SE$$

donde $S = \pi y^2$, $d(\Delta L) = \frac{Fdx}{\pi y^2 E}$ .... (α)

hay que hallar una relación entre X e Y, por semejanza de triángulos.

$$\frac{y-r}{x} = \frac{R-r}{L}$$

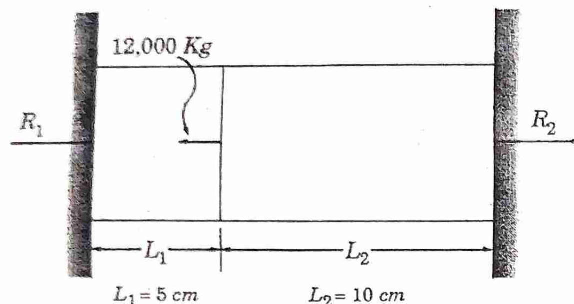
$$y = r + \tfrac{x}{L}(R-r) \quad \text{.......................................} \quad (\beta)$$

De (β) en (α): $\Delta L = \int d(\Delta L) = \int_0^L \frac{Fdx}{\pi\left[r + \frac{X}{L}(R-r)\right]^2 E}$

$$\Delta L = FL/\pi R r E$$

(46) Una barra circular de $50\ cm^2$ de sección está sujeta rígidamente entre los muros y cargada con una fuerza axial de 12,000 Kg, como se indica en la figura. Hallar las reacciones en los extremos de la barra y el alargamiento de la parte derecha, si $E = 10^6\ Kg/cm^2$.

Solución:



Sean R_1 y R_2 las reacciones en los extremos de la barra.

Por la condición de equilibrio: $\Sigma F = R_1 + R_2 - 12{,}000 = 0$

$$R_1 + R_2 = 12{,}000 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Como la barra está limitada por sus extremos, se tendrá; que el acortamiento de la barra L_1 es igual al alargamiento de la barra L_2.

$$\Delta L_1 = R_1 L_1/SE \quad ; \quad \Delta L_2 = R_2 L_2/SE$$

$$R_1 L_1 = R_2 L_2 \quad , \quad R_1 = 2R_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

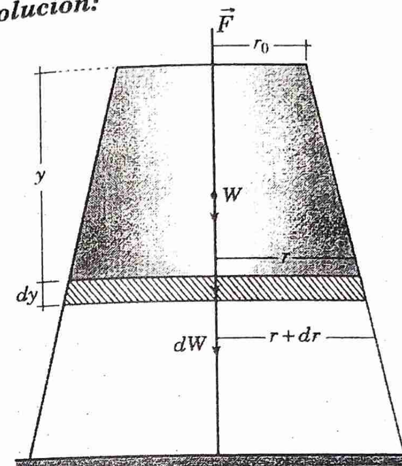
de (2) en (1): $2R_2 + R_2 = 12{,}000$

$$R_2 = 4000\,Kg \quad y \quad R_1 = 8000\ Kg$$

El alargamiento se halla: $\Delta L_2 = 4000 \times 10/50 \times 10^6 cm = 0.0008\ cm$.

(47) Un cuerpo con forma de sólido de revolución soporta una carga $\vec{F}$ como se ve en la figura, el radio de la base superior es r_o y el peso específico del material es $\gamma(Kg/m^3)$. Determinar cómo debe variar el radio con la altura para que la tensión de compresión sea constante, en todas las secciones. El peso del sólido no es despreciable.

Solución:



Sea F y W el peso sobre la sección S, el esfuerzo es:

$$\sigma = \frac{F + W}{S}$$

Cuando aumenta el radio en: $r + dr$ el peso que soporta es debido a: F, W y dW luego el esfuerzo es:

$$\sigma = \frac{F + W + dW}{S + dS}$$

Como el esfuerzo es constante:

$$\frac{F + W}{S} = \frac{F + W + dW}{S + dS}$$

$$\frac{dS}{dW} = \frac{S}{F + W} = \frac{1}{\sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Hallemos: $dS = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 \cong 2\pi r dr$

$$dW = \gamma \pi r^2 dy$$

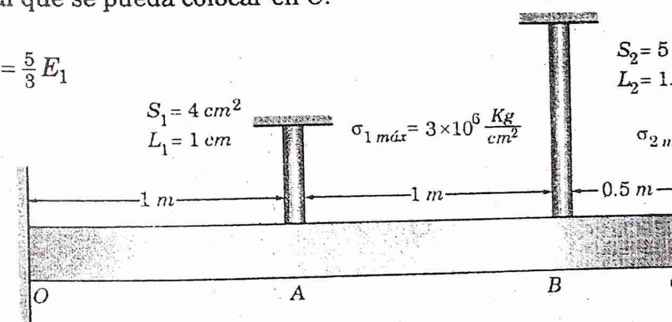
reemplazando en (1): $\frac{1}{\sigma} = \frac{2\pi r dr}{\gamma \pi r^2 dy} \quad , \quad \frac{\gamma}{\sigma}\int_0^y dy = 2\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r}$

$$y = \frac{2\sigma}{\gamma} Ln(r/r_0) \quad ; \quad r = r_0 e^{\frac{\gamma y}{2\sigma}}$$

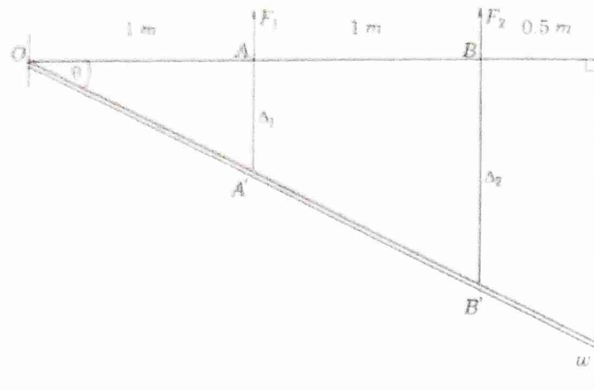
donde: $\sigma = F/S = F/\pi r_0^2 \quad , \quad r = r_0 e^{\left(\frac{\gamma \pi r_0^2}{2F}\right) y}$

(48) Se tiene una barra rígida OC suspendidas por dos cables, ubicados en A y B, los cuales poseen los datos indicados en la figura. Hallar el máximo peso vertical que se pueda colocar en C.

$E_2 = \frac{5}{3} E_1$



Solución:



Para hallar el valor de W, usamos la condición de equilibrio:

$$\Sigma M_0 = 0$$

$$1 \times F_1 + 2 \times F_2 - 2.5W = 0$$

$$W = (F_1 + 2F_2)/2.5$$

$$W = (\sigma_1 S_1 + 2\sigma S_2)/2.5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Para $\sigma_2 máx$, hallemos el $\sigma_1 máx$ que le corresponde.

$$tg\theta = \frac{\Delta_1}{1} = \frac{\Delta_2}{2} \;,\; \Delta_2 = 2\Delta_1$$

$$\frac{\sigma_2 L_2}{E_2} = 2\frac{\sigma_1 L_1}{E_1} \quad ; \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 2\left[\frac{L_1}{L_2}\right]\left[\frac{E_2}{E_1}\right]$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 2\left(\frac{1}{1.5}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{20}{9}\right)$$

$$\sigma_1 = \frac{9}{20}\sigma_2$$

Para $\sigma_2 máx = 4 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$

$$\sigma_1 máx = \frac{9}{20} \times 4 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2 = 1.8 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

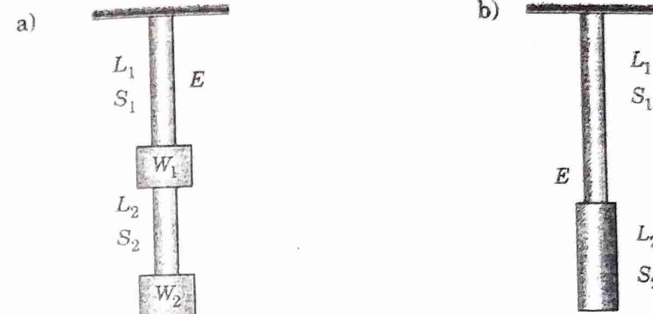
reemplazando en (1): $W = \dfrac{1.8 \times 10^6 \times 4 + 2 \times 4 \times 10^6 \times 5}{2.5}\text{Kg}$

$$W = 18.88 \times 10^6 \text{Kg}$$

(49) Se cuelgan verticalmente dos hilos de fierro de módulo de Young E, de longitudes L_1 y L_2 y secciones S_1 y S_2 respectivamente. Hallar las deformaciones en las barras para los casos:

a) Sosteniendo cargas concentradas W_1 y W_2

b) Sosteniendo cargas uniformemente distribuidas W_1 y W_2 respectivamente



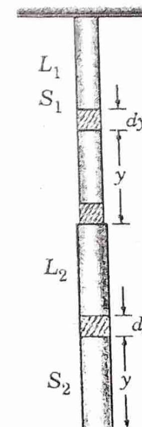
Solución:

a) Para la barra 2, se tiene por definición: $\Delta L_2 = \dfrac{W_2 L_2}{S_2 E}$

Para la barra 1, se considera los pesos: $W_1 + W_2$

$$\Delta L_1 = \frac{(W_1 + W_2)\,L_1}{S_1 E}$$

b) Para la barra inferior:



$$\Delta L_2 = \int \frac{W dy}{S_2 E}$$

$$\Delta L_2 = \int_0^{L_2} \frac{\gamma S_2\, y\, dy}{S_2 E} = \frac{S_2 \gamma L_2^2}{2 S_2 E}$$

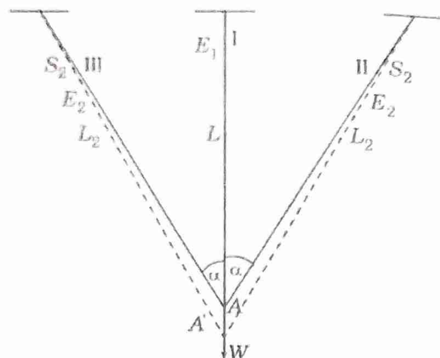
$$\Delta L_2 = \frac{(\gamma S_2 L_2) L_2}{2 S_2 E} = \frac{W_2 L_2}{2 S_2 E}$$

Para la barra superior, la deformación es debida a W_2 y W_1 distribuida uniformemente.

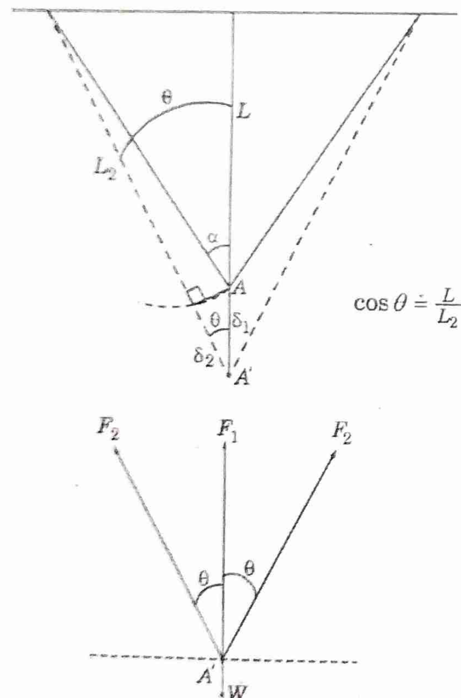
$$\Delta L_1 = \frac{W_2 L_1}{S_1 E} + \int_0^{L_1} \frac{(\gamma S_1 Y)\,dy}{S_1 E}$$

$$\Delta L_1 = \frac{W_2 L_1}{S_1 E} + \frac{W_1 L_1}{2 S_1 E}$$

50 El peso W cuelga de 3 varillas de los cuales las del medio tiene una longitud L. Los módulos de elasticidad y las secciones respectivas E_1 y S_1 para la central, E_2 y S_2 para las laterales. Hallar las tracciones en las varillas y el descenso en A.



Solución:



Por las condiciones de equilibrio $\Sigma Fy = 2F_2 \cos\theta + F_1 - W = 0$

donde F_1 y F_2 son las tracciones en las varillas.

$$2\,F_2 \cos\theta + F_1 = W \quad \text{.......... (1)}$$

también : $\cos\theta = \delta_2 / \delta_1$ .... (2)

donde : $\delta_2 = \dfrac{F_2 L_2}{E_2 S_2} = \dfrac{F_2 L}{E_2 S_2 \cos\theta}$ .... (3)

también : $\delta_1 = \dfrac{F_1 L_1}{E_1 S_1} = \dfrac{F_1 L}{E_1 S_1}$ .... (4)

De (3) y (4) en (2)

$$\cos\theta = \frac{F_2 L / E_2 S_2 \cos\theta}{F_1 L / E_1 S_1} = \frac{F_2 E_1 S_1}{F_1 E_2 S_2 \cos\theta}$$

$$F_2 = \frac{2E_2 S_2 \cos^2\theta F_1}{E_1 S_1} \quad \text{.......... (5)}$$

De (5) en (1)

$$2\frac{E_2 S_2 \cos^2\theta}{E_1 S_1} F_1 \cos\theta + F_1 = W$$

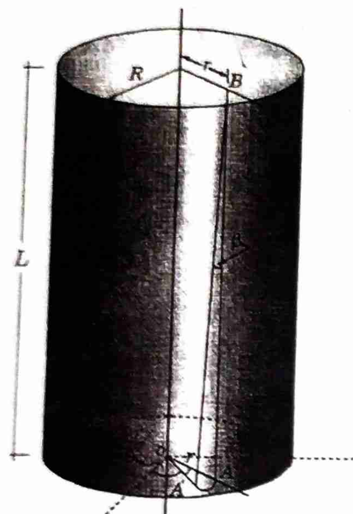
$$F_1 = W \Big/ \left(1 + \frac{2\cos^3\theta E_2 S_2}{E_1 S_1}\right) \quad \text{.......... (6)}$$

Reemplazando (6) en (4)

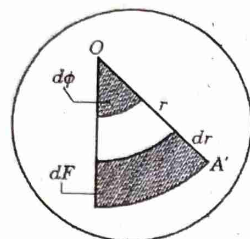
$$\delta_1 = \frac{WL \Big/ \left(1 + \frac{2\cos^3\theta E_2 S_2}{E_1 S_1}\right)}{E_1 S_1}$$

$$\delta_1 = \frac{WL}{E_1 S_1 + 2E_2 S_2 \cos^3\theta}$$

51 Sea una barra cilíndrica de longitud L y de radio R. La sección superior está fija y a la inferior se le aplica un momento o torque τ, que tuerza la barra como se indica en la figura y gira un ángulo θ, si n es el módulo de rigidez de la barra. Hallar este torque.



VISTA DE LA BASE INFERIOR



De la figura y el triángulo $A'AB$:

$$Tg\beta = \frac{\widehat{AA'}}{L} = \frac{r\theta}{L}$$

Como β es pequeña: $\quad Tg\beta \cong \beta = \frac{r\theta}{L}$ .... (1)

De la definición de módulo de rigidez:

$$\eta = \frac{\sigma_T}{Tg\beta} \cong \frac{\sigma_T}{\beta} = \frac{\sigma_T}{\frac{r\theta}{L}} = \frac{\sigma_T L}{r\theta}$$

$\sigma_T = \eta r \theta / L$ .... (2)

Por definición de momento:

$$d\tau = r\,dF = r(\sigma_T dS)$$

$$d\tau = r[\sigma_T][r d\varphi dr] = r^2 \sigma_T d\varphi dr$$

usando (2) en la última expresión: $d\tau = r^2\left(\eta \frac{r\theta}{L}\right) d\varphi dr = \eta \frac{\theta}{L} r^3 dr d\varphi$

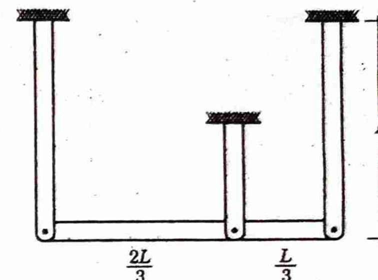
integrando:

$$\tau = \frac{\eta\theta}{L}\int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\eta\theta}{L}\frac{R^4}{4}2\pi$$

$$\tau = \frac{\pi\eta R^4\theta}{2L}$$

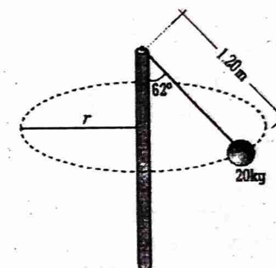
PROBLEMAS PROPUESTOS

01 Una barra de longitud L y masa m se encuentra suspendida por un pribote B indeformable y por dos barras en sus extremos como se muestra. Estas barras son iguales de área "A", longitud "ℓ" y módulo Y, determine el ángulo de giro de la barra "L".



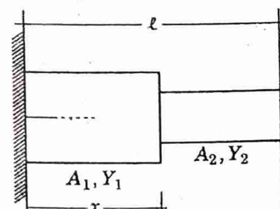
Rpta.: $\theta = \frac{3}{10}\frac{mg\ell}{AYL}$

02 Un objeto de 0.20 kg se mueve a velocidad constante en una trayectoria circular horizontal según lo mostrado en la figura. Si el cable es aluminio $(E = 20{*}10^{10}\,Pa)$ de 1mm de diámetro.
Determine la tensión en la cuerda. ¿Cuál era la longitud inicial del cable antes de actuar una fuerza sobre él?



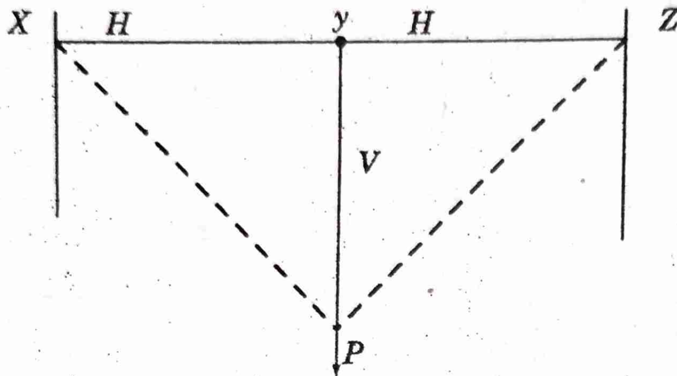
Rpta.: $T = 4.17\,\text{N}$; $L_0 = 1.19997\,\text{m}$

03 Dos barras de longitud $\left(\frac{\ell}{2} + \Delta\ell\right)$ cada una, áreas A_1 y A_2 y módulos de elasticidad Y_1 y Y_2 respectivamente, como se muestra en la figura, se comprimen hasta introducirlas entre dos paredes rígidas separadas una distancia ℓ. ¿Cuál será la posición x de la unión de ambas barras?



Rpta.: $x = \frac{\ell}{2} + \Delta\ell\left(\frac{1}{1 + \frac{A_2 Y_2}{A_1 Y_1}}\right)$

04 En la figura se representa dos alambres de sección uniforme S, que están articulados en X, Y, Z, inicialmente tienen una longitud H y están horizontales cuando no se ha aplicado ninguna carga. El peso del cable es despreciable. Si se aplica gradualmente un peso P en el punto y. Hallar P para producir una deformación vertical V, respecto del punto y.



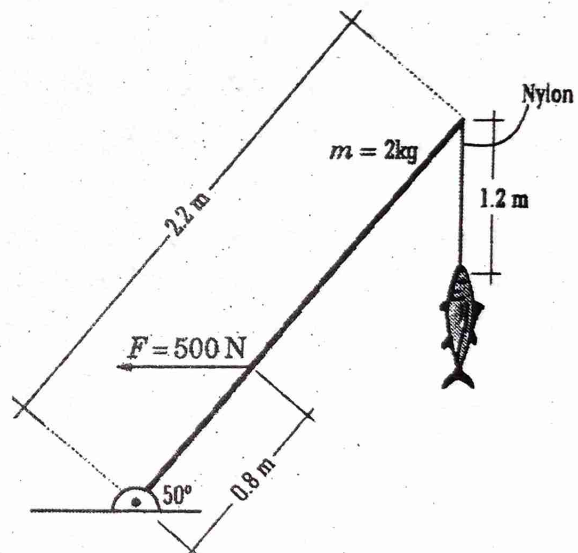
Rpta.:

$$P = E\left[\frac{\sqrt{H^2+V^2}}{H}-1\right]\left(\frac{2SV}{\sqrt{H^2+V^2}}\right)$$

05 Según lo mostrado en el diagrama, una fuerza horizontalmente aplicada de 500N se requiere para sostener un pescado en el extremo de una caña de pescar uniforme de 2 kg de masa.

Calcular la tensión en la cuerda antes de sostener el pescado si su diámetro es 4mm y su módulo de Young es $E = 3.47\times10^{8}\ Pa$

Rpta.: $T = 207.8\text{N}$; $L = 1.15\text{m}$



06 Una varilla recta de aluminio de 2 cm. de diámetro está sometida a una fuerza de tracción axial de 3000 kg. Hallar (a) La deformación unitaria (b) La variación del diámetro (c) La variación de la sección

Si $E = 7\times10^{10}\ Kg/m^2$ y $\mu = 0.34$

Rpta.: a) $\Delta = 0.000101$

b) $\Delta D = 0.000068$ cm.

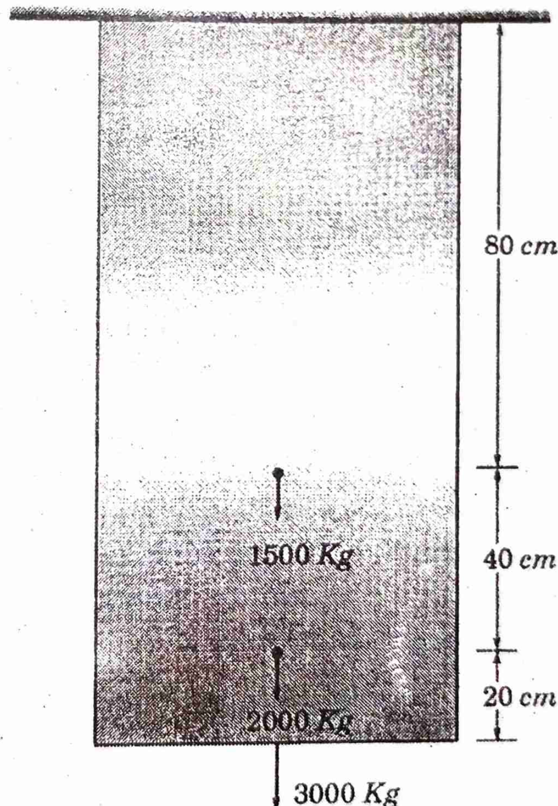
c) $\Delta S = 2.15\times10^{-4}\ cm^2$

07 Un hilo delgado de longitud 10m, módulo de Young $Y = 2\times10^9\,Pa$ y área transversal $A = 2.5\,\text{mm}^2$ tiene unido a su extremo una masa de 20g. Si la masa está girando sobre una mesa horizontal sin fricción en una circunferencia con velocidad angular $\omega = 20\,\text{rad/s}$, ¿cuál es la deformación del hilo? (Suponer que la masa del hilo es despreciable).

Rpta.: $\Delta L = 0.162m$

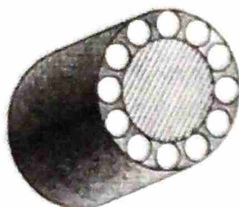
08 Una barra de acero de sección uniforme está suspendida verticalmente y soporta una carga de 3000 Kg. en su extremo inferior, como se ve en la figura, 20 cm. más arriba está aplicada una fuerza vertical de 2000 kg. y otros 40 cm. más arriba otra de 1500 kg. La longitud total de la barra es de 140 cm. y su sección de 10 cm^2. El módulo de elasticidad es de $2\times10^6\,Kg/cm^2$. Hallar el alargamiento total de la barra.

Rpta.: $L = 0.039$ cm.



09 Una barra de acero cuadrada de 5 cm. de lado y longitud de 1 m. está sometida a una fuerza de tracción axial de 10,000 Kg. Hallar la contracción lateral debida a esta carga, si $E = 2\times10^6\,Kg/cm^2$ y $\mu = 0.25$

Rpta.: $\Delta a = 0.00025\,cm$

10 

Muchos de los cables de acero de alta tensión tienen un núcleo de acero macizo que soporta a los alambres de aluminio que transportan la mayor parte de la corriente. Supóngase que el acero tiene un diámetro de 13 mm, y que la deformación es la misma en el acero y en el aluminio. Si la tensión total es 1000N. ¿Cuál es la tensión soportada por el acero?

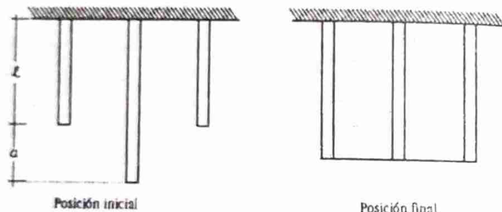
$(Y_{acero} = 2\times 10^{11} N/m^2 \ ; Y_{Aluminio} = 7\times 10^{10} N/m^2)$

Rpta.: $787.4N$

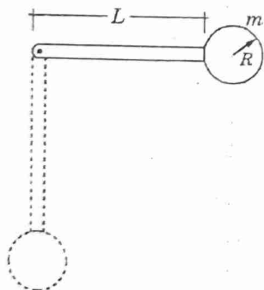
11 Tres barras de iguales características, pero una de ellas ligeramente más larga que las otras dos se fuerzan para que sus extremos libres permanezcan juntos, tal como se muestra en la figura.
Calcular las tensiones en las barras.

Rpta.: $F = \frac{2aAY}{3\ell}$

$T = \frac{aAY}{3\ell}$



12 Una barra cilíndrica de acero de longitud L, radio r y masa despreciable puede girar en uno de sus extremos. En el otro se encuentra pegado un cilindro de radio R y masa m como se muestra en la figura. Si el sistema parte del reposo, calcule el alargamiento que experimenta la barra al pasar por la posición más baja.



$m = 2\text{kg}$
$L = 1\text{m}$
$R = 0.25\text{m}$
$r = 0.02\text{m}$

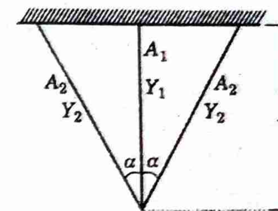
Rpta.: $\Delta L = 2.34\times 10^{-7} m$

13 Una barra cuadrada de 5 cm. de lado y 50 cm. de longitud, está sometida a cargas axiales de tracción en sus extremos. Se ha hallado experimentalmente que la deformación en la dirección de la carga es 0.01 cm.
Hallar el volumen de la barra cuando actúa la carga, si $u = 0.4$

Rpta.: $V_f = 1252.5\, cm^3$

14 Se tiene tres cables como se muestra en la figura, en un estado sin deformaciones. El cable vertical de longitud ℓ tiene área A_1 y módulos de elasticidad Y_1. Los cables inclinados un ángulo α son iguales y tienen un área A_2 y módulo de elasticidad Y_2 cada uno. ¿Cuánto bajará el punto de unión cuando de él se suspende un peso W?

Asumir que las deformaciones son pequeñas, por tanto se podrán hacer las aproximaciones usuales.



Rpta.: $\Delta\ell = \dfrac{W\ell}{A_1Y_1\left(1+2\frac{A_2Y_2}{A_1Y_1}\cos^3\alpha\right)}$

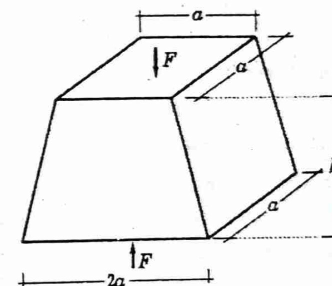
15 Consideremos un estado de tensiones en un elemento, tal que se ejerce una tensión σ_y en una dirección, puede producirse contracción lateral libremente en otra dirección (Z), pero está impedida en la tercera (x) Hallar:

a) $\sigma_y/\Delta y$ b) $\Delta z/\Delta y$

Rpta.: a) $\sigma_y/\Delta y = E/(1-\mu^2)$

b) $\Delta z/\Delta y = \mu/\mu - 1$

16 Calcular cuánto se comprime el bloque mostrado en la figura, cuando se le aplica una fuerza F. Módulo de elasticidad Y.



Rpta.: $\Delta h = \frac{Fh}{Ya^2}\text{Ln}2$

17 Un martillo de 30Kg. golpea un clavo de acero $(Y_{acero} = 20\times 10^{10} Pa)$ de 2,3 cm. de diámetro mientras se mueve a una rapidez de 20m/s. El martillo rebota a una rapidez de 10m/s después de 0,11 segundos.
¿Cuál es la deformación unitaria promedio en el clavo durante el impacto?

Rpta.: 9.846×10^{-5}

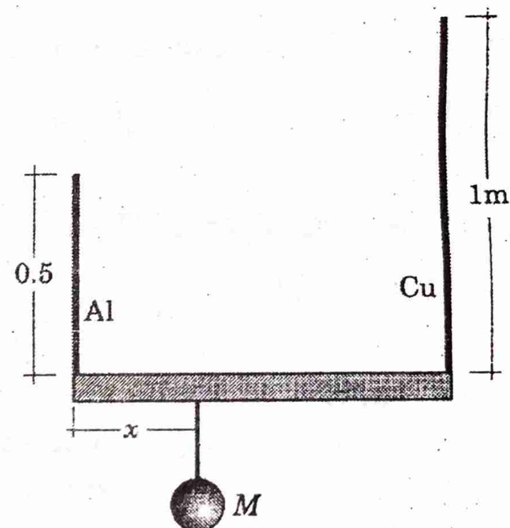
18 Una barra circular maciza de Aluminio de 6 cm. de diámetro está sometida a una fuerza axial de tracción de 9000 kg. Hallar la disminución del diámetro de la barra debida a esta carga. Para el aluminio; $E = 7\times10^{10}\ kg/cm^2$ y $\mu = 0.34$

Rpta.: $\Delta d = 0.00092$ cm.

19 Hallar el momento del par de fuerzas capaz de torcer un alambre de 10 cm. de longitud y 0.05 mm. de radio, en un ángulo de 5′. Se conoce el módulo de Young del material $70\times10^9\ N/m^2$ y su coeficiente de Poisson 0.3 Use la relación de $\eta = f(E,\mu)$.

Rpta.: $\tau = 3.92\times10^{-7}\ Kgf-mm$

20 Una barra homogénea de hierro de masa 30Kg, de longitud $L = 2$m y de sección constante, es sostenida horizontalmente mediante hilos de aluminio y cobre aplicados en los extremos de igual sección transversal.



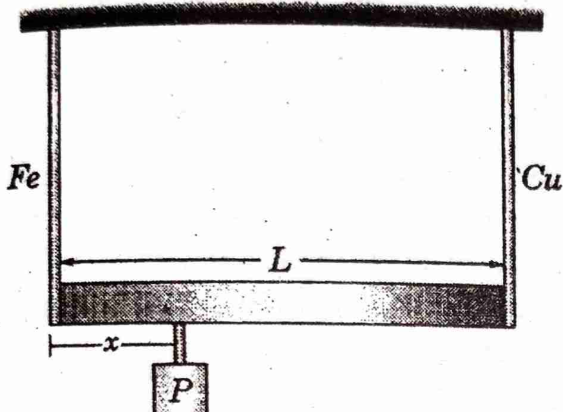
Una carga $M = 50{,}0$ kg es colocada a una distancia x del hilo de aluminio (ver figura). Calcule el valor de x para que la barra continúe horizontal después de la aplicación de la carga.
$E_{Cu} = 12\times10^{10}\ Pa$

Rpta.: $x = 0.89m$

21 Se tiene una barra de bronce de 6 cm. de base cuadrada y 60 cm. de longitud, está sometida a cargas axiales de comprensión en sus extremos. Si la deformación unitaria longitudinal es 0.01. Hallar el volumen de la barra, cuando está aplicada la carga, si $\mu = 0.28$

Rpta.: $V_f = 2150.5\ cm^3$

22 Una barra de longitud $L = 2$ m de peso despreciable está colgado de un alambre de hierro y un alambre de cobre. Si los alambres tienen la misma longitud e igual sección transversal. ¿A qué distancia x del alambre de hierro habrá que suspender una carga P, para que la barra quede horizontal?.



Rpta.: $X = 0.79\ m$

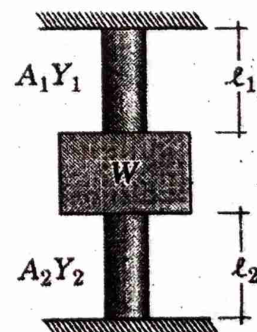
23 En la construcción de un edificio se usa un cable de acero de 6 mm. de diámetro para la elevación de materiales. Se cuelgan verticalmente 150 m del cable para elevar en su extremo inferior una carga de 200 Kg. Hallar el alargamiento total del cable. El peso específico del acero es 0.0078 Kg/cm³ y $E = 21\times10^5\ Kg/cm^2$

Rpta.: $\Delta L = 5.4$ cm.

24 Una barra de vidrio cuadrada tiene 3 cm. de lado y 60 cm. de longitud y está cargada por una fuerza de tracción axial de 5000 kg. Si $E = 6\times10^{10}\ Kg/m^2$ y $\mu = 0.25$. Hallar la variación unitaria de volumen.

Rpta.: $\Delta V/V = 0.000046$

25 Un peso W se encuentra sujeto mediante dos barras verticales, como se muestra en la figura: Los extremos de las barras están firmemente ligados al peso y a los apoyos. Determinar la fuerza que actúa sobre la barra.



Rpta.: $F_1 = \dfrac{W}{1 + \dfrac{\ell_1 A_2 Y_2}{\ell_2 A_1 Y_1}}$;

$$F_2 = \dfrac{W}{1 + \dfrac{\ell_2 A_1 Y_1}{\ell_1 A_2 Y_2}}$$

26 Si la fuerza de corte en el acero excede aproximadamente $4\times10^{8}\ pa$, el acero se rompe. Determine la fuerza de corte necesaria para:

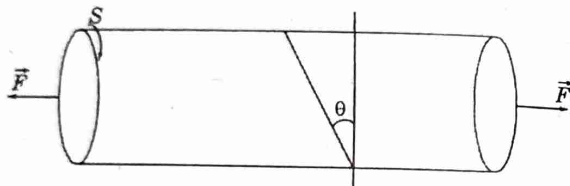
a) Cortar un perno de acero de 1cm de diámetro.
b) Hacer un hoyo de 1cm de diámetro en una placa de acero de 0,50cm de espesor.

Rpta.: a) $3.14\times10^{4}\ N$
b) $62.8\ KN$

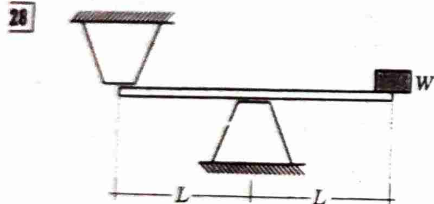
27 Una barra cuya sección es S, está sujeta en sus extremos a fuerzas tensoras F iguales y opuestas. Se considera un plano que corta a la barra y forma un ángulo con el plano vertical, según figura: ¿Cuál es el esfuerzo cortante y el normal?

Rpta.: $\sigma_T = F\,\text{sen}\,2\theta/2S$

$\sigma_n = F\cos 2\theta/S$



28



Si se utiliza dos bloques de apoyo como los del problema anterior y dispuesto como se muestra en la figura, encontrar el desplazamiento del extremo libre de la barra, de peso despreciable, rígida e indeformable; al aplicarse un peso W en ese mismo extremo.

Rpta.: $x = \frac{5Wh}{Ya^2}\text{Ln}2$

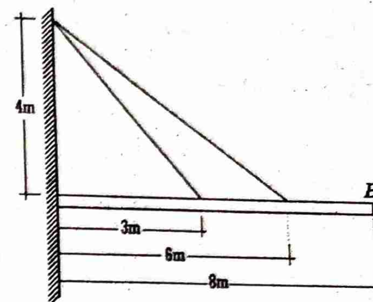
29 Una varilla recta de aluminio de 2 cm. de diámetro está sometida a una fuerza de tracción axial de 3000 Kg.

Hallar: a) El alargamiento en una longitud de 50 cm.
b) La variación de volumen en una longitud de 50 cm.

Donde: $E = 7\times10^{6}\ Kg/cm^2$ y $\mu = 0.34$

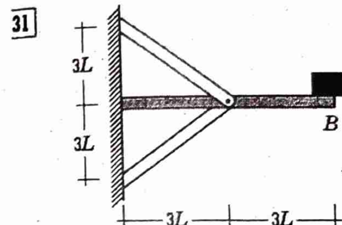
Rpta.: a) $\Delta L = 0.00505\ cm$
b) $\Delta V = 0.0001\ cm^3$

30 En el sistema mostrado en la figura, calcular cuánto desciende el extremo B de la barra indeformable y de peso despreciable, cuando se le coloca un peso de 10 toneladas en ese extremo.
Los tirantes son de acero y de $2\ cm^2$ de sección cada uno, suponga deformaciones pequeñas de tal manera que se pueden hacer las aproximaciones geométricas apropiadas.



Rpta.: $x = 0{,}0557m$

31

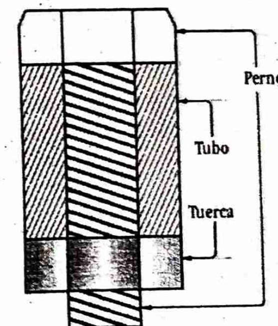


En el sistema mostrado en la figura. Calcular cuánto desciende el extremo B de la barra horizontal rígida y de peso despreciable, cuando se le coloca una masa M en el extremo.

Las barras inclinadas son iguales, de área A y módulo de elasticidad Y. Asumiendo pequeñas deformaciones o sea que se pueden hacer aproximaciones geométricas usuales.

Rpta.: $12\sqrt{2}\,\frac{MgL}{AY}$

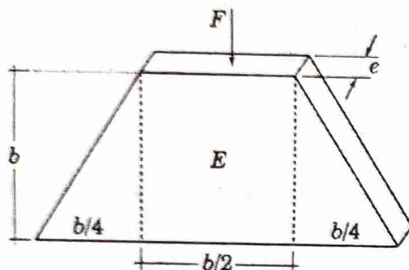
32 Un perno de acero se enrosca en un tubo de cobre como se muestra en la figura. Encontrar las fuerzas (comprensión o tensión lineal) que surgen en el perno y en el tubo debido a una vuelta de la tuerca, si la longitud del tubo es "L", el paso de rosca del perno es "h" y las áreas de sección transversal del perno y del tubo son iguales a A_P y A_T respectivamente. (Y_P = módulo de young del perno; Y_T = módulo de Young del tubo).



Rpta.: $F = \frac{h}{L}\left(\frac{A_P Y_P Y_T}{A_P Y_P + A_T Y_T}\right)$

33 Un Cubo de gelatina de 3cm. de lado que se encuentra sobre una placa está sujeto a una fuerza de 0,20N paralela a su superficie superior. La fuerza hala a la superficie 0,15cm. hacia un lado. Encuéntrese el módulo cortante de la gelatina.

Rpta.: $4,4\times10^3\,Pa$

34


Se tiene de espesor uniforme e, despreciando el peso propio del elemento. Hallar su deformación debido a la fuerza f, si el módulo de Young es E.

Rpta.: $\frac{2F}{Ee}\text{Ln}2$

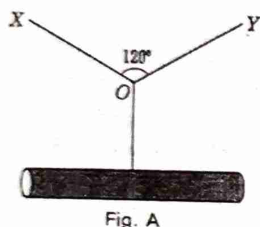
35


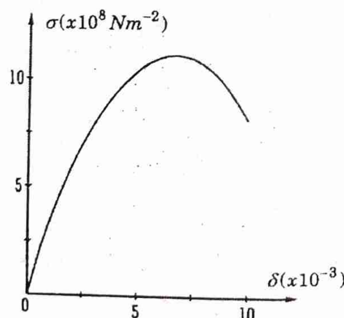
Fig. A

Un pilar de concreto de masa de 2.0×10^4 kg. Se suspende de los puntos X y Y usando cables de acero idénticos según lo representado en figura a. Los cables OX y OY son cada uno de 5m de largo y forman un ángulo de 60° con la vertical. El cable OZ cuelga verticalmente y tiene también 5m de largo. Todos los cables tienen áreas transversales idénticas de $5\times10^{-4}\,m^2$. La relación σ vs δ para este cable de acero se muestra en figura b.

a) Usando la información de la figura b encuentre el módulo de Young, E.

b) A partir del gráfico. ¿Cuál es el límite elástico del acero del cable?

c) ¿Cuánto se alarga el cable OZ cuando se suspende el pilar concreto?

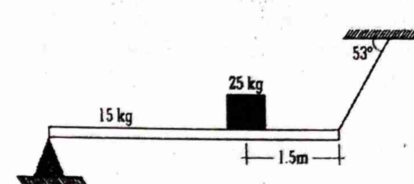


Rpta.: $E=2\times10^{11}\,\frac{N}{m^2}$

$\sigma_{\text{elástico}}=10.5\times10^8$

$\Delta L=9.8\times10^{-3}\,m$

36 Una viga horizontal uniforme de 4.0 m de longitud con una masa de 15 kilogramos descansa sobre un pivote en un extremo y es mantenida horizontal por un cable, de 3m de longitud, en el otro extremo. La viga está soportando una masa de 25 kilogramos, según los mostrado en la figura.

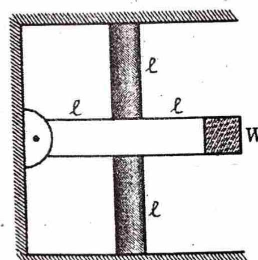


¿Cuál es la tensión en el cable?. Si el cable está compuesto de 3 hilos de aluminio $(E=70\times10^9\,N/m^2)$ de 1mm de diámetro. ¿Qué alargamiento experimentará el cable?

Rpta.: $T=266.7\text{N}$; $\Delta L=5\times10^{-3}\,\text{m}$

37 Una barra de longitud ℓ, área A, peso Q y módulo de Young Y gira con velocidad "ω" constante sobre una mesa horizontal sin fricción y pivoteando en uno de sus extremos. Determinar el alargamiento producido. ¿Cuál será el esfuerzo máximo?

Rpta.: $F=\frac{Q\omega^2\ell}{2g}$; $S_{\text{máx}}=\frac{Q\omega^2\ell}{2gA}$

38


En el sistema mostrado en la figura, determinar cuánto desciende el peso W, respecto a la posición en la cual las barras verticales no estaban deformadas. La barra horizontal es rígido e indeformable y de peso P. Las barras verticales son de peso despreciable, sección A y módulo de elasticidad Y.

Rpta.: $x=\frac{(P+2W)\ell}{AY}$

39 Un alambre cilíndrico de acero de longitud L con un diámetro de sección transversal d, se coloca sobre una polea sin fricción. Un extremo del alambre se conecta a una masa m_1 y el otro extremo se conecta a una masa m_2. ¿Cuánto se alarga el alambre mientras las masas están en movimiento?

Rpta.: $\frac{8m_1m_2gL}{\pi d^2Y(m_1+m_2)}$

40 Un pájaro de 50g produce un radio de curvatura de 2m en la rama sobre la que se apoya, en su extremo. Dicha rama es de 20cm de longitud y de 2mm de radio. ¿Cuál es el módulo de Young de la madera de la barra?

Rpta.: $E = 3{,}9 \cdot 109\ \text{N/m}^2$

41 Una barra de 4m de longitud posee un momento de inercia respecto de su superficie neutra de $10^{-4}\,\text{m}^4$ y está sujeta por un extremo. En el otro extremo ejercemos una fuerza de 200 N, perpendicular a la barra, y conseguimos que se mueva 10cm. Determinar:

a) el momento flexor aplicado,
b) el radio de curvatura adoptado por la barra,
c) el módulo de Young del material de la barra.

Rpta.:
a) 800 Nm
b) 80 m
c) $10^5\,\text{N/m}^2$

42 Tenemos una viga rectangular de 10cm y 20cm de lado y 6m de longitud, apoyada en uno de sus extremos sobre su lado más ancho. El módulo de Young del material que forma la viga es de $10^{10}\,\text{N/m}^2$. En el centro de la viga se coloca una persona de 80kg. Calcular.

a) el momento de inercia de la viga respecto a su superficie neutra,
b) el momento flexor que ejerce la persona,
c) el radio de curvatura que adquiere la viga.

Rpta.:
a) $1{,}67 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^4$
b) 1176 Nm.
c) 142 m.

CAPÍTULO II

OSCILACIONES

MOVIMIENTO PERIÓDICO

Es aquel movimiento que se repite a intervalos iguales de tiempo.

MOVIMIENTO OSCILATORIO O VIBRATORIO

Si una partícula que tiene movimiento periódico se mueve alternativamente en un sentido y en otro, siguiendo la misma trayectoria a su movimiento.

De todos los movimientos oscilatorios, el más importante es el Movimiento Armónico Simple (MAS)

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Existen varias formas de expresar este movimiento:

- a. Es el movimiento que se produce debido a una fuerza elástica y en ausencia de todo rozamiento.
- b. Cuando la aceleración es proporcional y opuesta al desplazamiento.
- c. La frecuencia de un MAS es independiente de la amplitud del movimiento.
- d. Cuando el MAS se puede expresar en función de senos y cosenos.

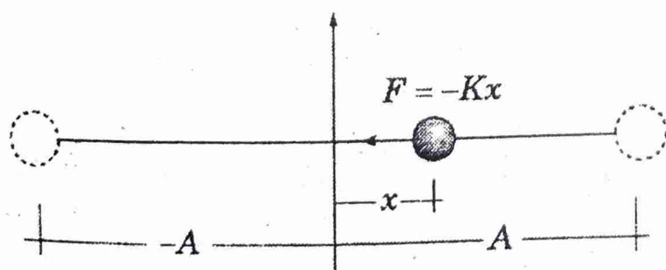


Fig. 11

- **Elongación (x)**

  Es la distancia lineal o angular de la partícula que oscila a su posición de equilibrio en un instante cualquiera.

- **Posición de Equilibrio (x_o)**

  Aquella para la cual no obra ninguna fuerza neta sobre la partícula oscilante.

Amplitud (A)

Es la máxima elongación.

Período (T)

Es el tiempo necesario para completar un ciclo completo del movimiento.

Frecuencia (ν)

Es el número de ciclos por unidad de tiempo, ciclo/seg = Hertz. También se usa la frecuencia angular $\omega = 2\pi\nu$ y en función del período: $\upsilon = \frac{1}{T}$

De la figura 11 usando la 2da Ley de Newton: $F = -Kx$, $ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$

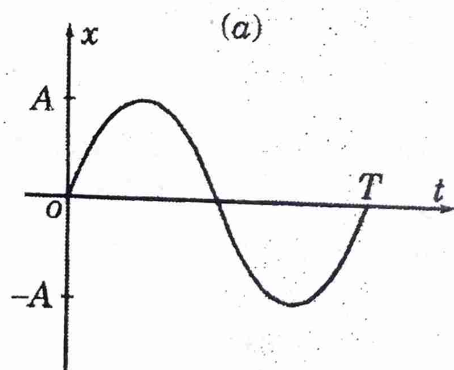
donde K : constante elástica del resorte.

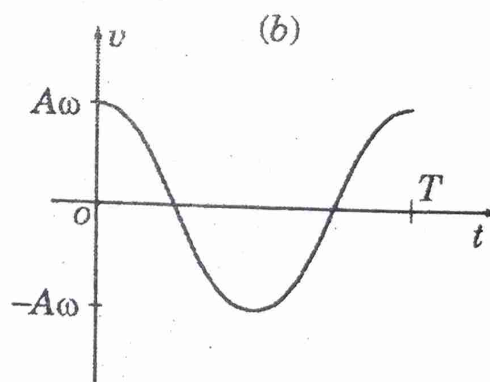
$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{K}{m}\right)x = 0$: Ecuación diferencial del MAS.

donde $\omega = (K/m)^{1/2}$ y la solución general es:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi) \text{ , donde } \omega t + \varphi : \text{fase y } \varphi : \text{fase inicial.}$$

Grafiquemos un MAS, según las fig 12(a) , 12(b) y 12(c):





(a) : *elongación*
(b) : *velocidad*
(a) : *aceleración*

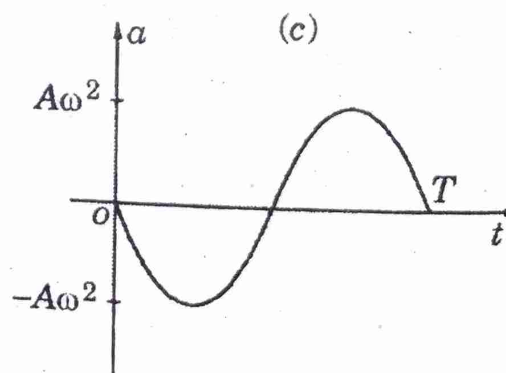


Fig. 12

$x = A\,\text{sen}\,\omega t$

$V = A\omega \cos \omega t$

$a = -A\omega^2 \text{sen}\,\omega t$

Energía Almacenada en un MAS

Si no existe fuerza de rozamiento, para el caso de la figura 11 la Energía Mecánica se conserva.

$E = K + U$: cinética más potencial

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}KA^2$$

Los gráficos de energía en función del tiempo, fig. 13 y de la elongación fig. 14, si $x = A\cos(\omega t + \alpha)$

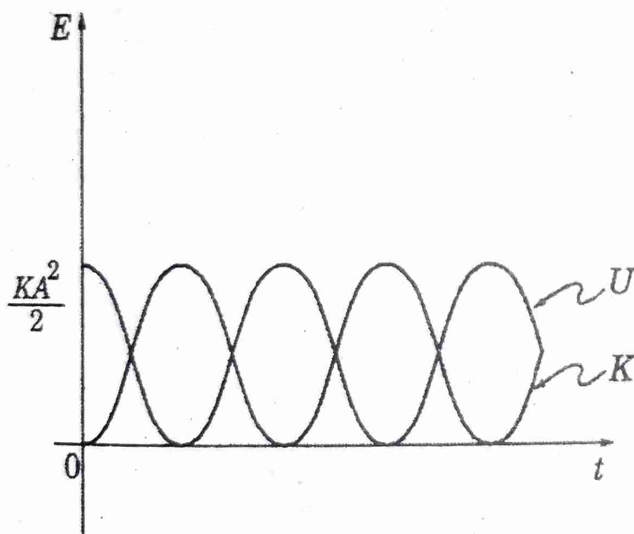


Fig. 13 *Energía en función del tiempo*

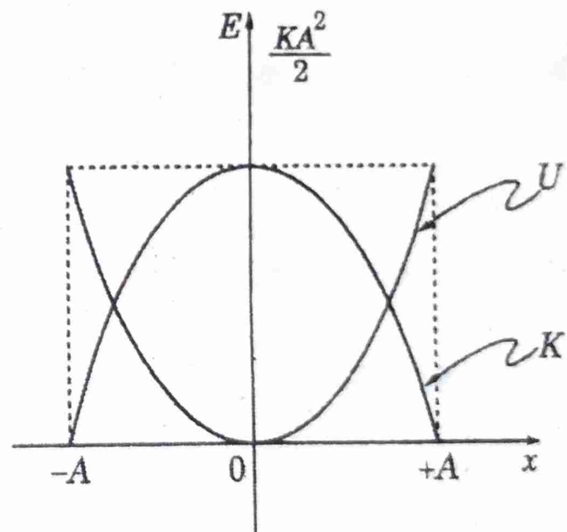


Fig. 14 *Energía en función de la elongación.*

Péndulo Simple o Matemático.

Se considera como tal, a una partícula de masa m, que cuelga de una cuerda de longitud L y masa despreciable y que se lleva de su posición vertical a otra posición medida por el desplazamiento angular $\theta < 10$, figura 15.

La ecuación del movimiento es:

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}(L\omega) = mL\frac{d\omega}{dt} = mL\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -m\,g\,\text{sen}\,\theta = -mg\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{L}\right)\theta = 0\ , \quad \text{donde:}$$

$$\omega = \sqrt{g/L} = 2\pi\upsilon = \frac{2\pi}{T}\ ,\ T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

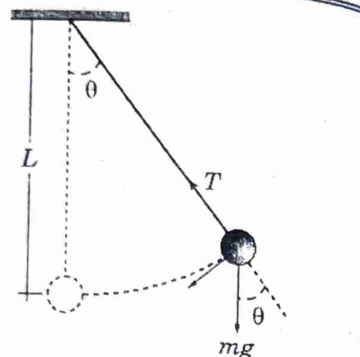


Fig. 15 *Péndulo simple*

Péndulo Compuesto o Físico

Cualquier cuerpo rígido que puede oscilar libremente alrededor de un eje horizontal (*AB*), bajo la acción de la gravedad.

En dinámica de rotación se tiene:
$\tau = I\,\alpha$, donde:

I : momento de inercia
α : aceleración angular
τ : torque
$-m \cdot g \cdot b \cdot \text{sen}\,\theta$
α : $\frac{d^2\theta}{dt^2}$

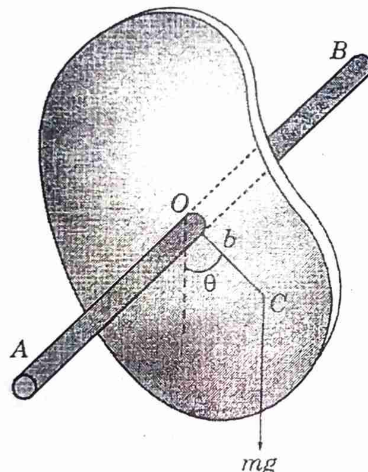


Fig. 16 *Péndulo físico*

Luego:

$$-m\,g\,b\,\text{sen}\,\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{gbm}{I}\right)\theta = 0$$

donde se consideró que θ es un ángulo pequeño y el período está dado por $T = 2\pi\sqrt{I/gbm}$.

Péndulo de Torsión

Cuando un cuerpo de masa m, está suspendido de su centro de masa (*C*), por un alambre, el cual se tuerce un ángulo (θ) pequeño, aplicando un torque (τ), proporcional al ángulo $\tau = -k\theta$. Figura 17.

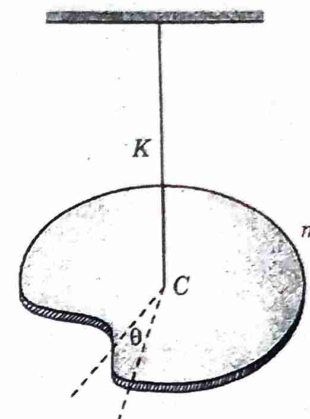


Fig. 16 *Péndulo de torsión*

Por dinámica de rotación: $\tau = I\alpha$

K : coeficiente de torsión del alambre

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -K\theta\ ,\quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{K}{I}\right)\theta = 0$$

y el período será: $\omega = \sqrt{K/I} = 2\pi/T\ ,\ T = 2\pi\sqrt{I/K}$

Superposición de MAS en la misma dirección

Varias ondas pueden coincidir en el espacio independientemente una de las otras. El proceso de adición vectorial de las elongaciones de una partícula se llama superposición.

A) Superposición de dos **MAS**. Igual dirección, frecuencia, pero diferente amplitud y fase inicial.

Si $x_1 = A_1\,\text{sen}(\omega t + \alpha_1)$ y $x_2 = A_2\,\text{sen}(\omega t + \alpha_2)$, el movimiento resultante $x = x_1 + x_2 = A\,\text{sen}(\omega t + \alpha)$ es MAS.

Donde $A = (A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta)^{1/2}$, $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$

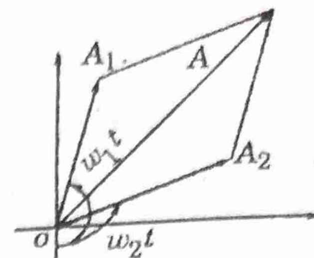
y $\text{tg}\,\alpha = (A_1\text{sen}\,\alpha_1 + A_2\text{sen}\,\alpha_2)/(A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2)$

Si $\delta = 0$ están en fase, $\delta = \pi$ en oposición, y $\delta = \pi/2$ en cuadratura.

B) Superposición de dos MAS. Igual dirección, diferente frecuencia y amplitud.

Si $x_1 = A_1\text{sen}\,\omega_1 t$, $x_2 = A_2\text{sen}\,\omega_2 t$, el movimiento resultante no es MAS, porque su amplitud varía con el tiempo así: $x = A_1\text{sen}\,\omega_1 t + A_2\text{sen}\,\omega_2 t$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\omega_1 - \omega_2)t}$$



Caso especial. Si $A_1 = A_2$, entonces el movimiento resultante está dado por:

$$\underbrace{x = 2A_1\cos\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}t}_{\text{amplitud variable}}\ \text{sen}\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}t$$

, se usó: $\text{sen}A + \text{sen}B = 2\,\text{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$

El gráfico correspondiente está en la figura 18, y se llama pulso.

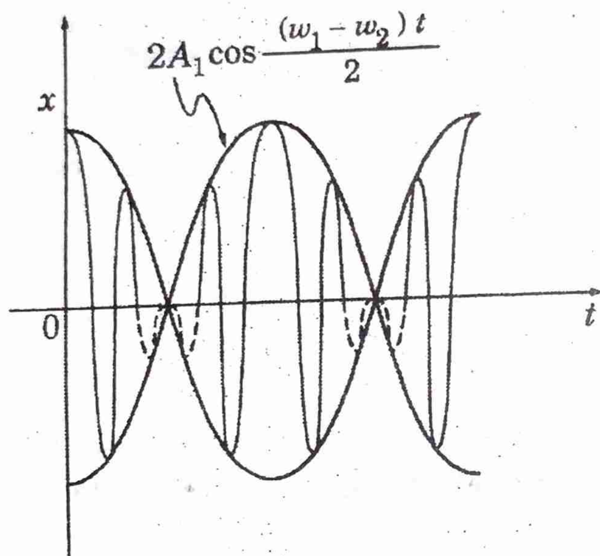


Fig. 18 *Pulso*

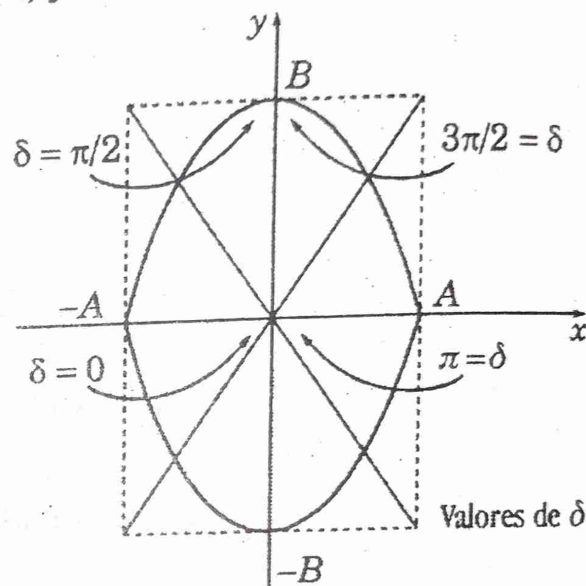


Fig. 19 *Polarización rectilínea y elíptica.*

Superposición de dos MAS en direcciones perpendiculares

Caso A: Si $\omega_1 = \omega_2$, $A = B$ y $\delta = 0, \pi$, entonces $x = A\,\text{sen}\,\omega t$, $y = B\,\text{sen}(\omega t + \delta)$, se obtiene $y = \pm\left(\frac{B}{A}\right)x_1$, llamada polarización rectilínea, figura 19.

Caso B: Si $\omega_1 = \omega_2$, $A \neq B$ y $\delta = \pi/2$, $3\pi/2$ se obtiene: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ llamada polarización elíptica, figura 19.

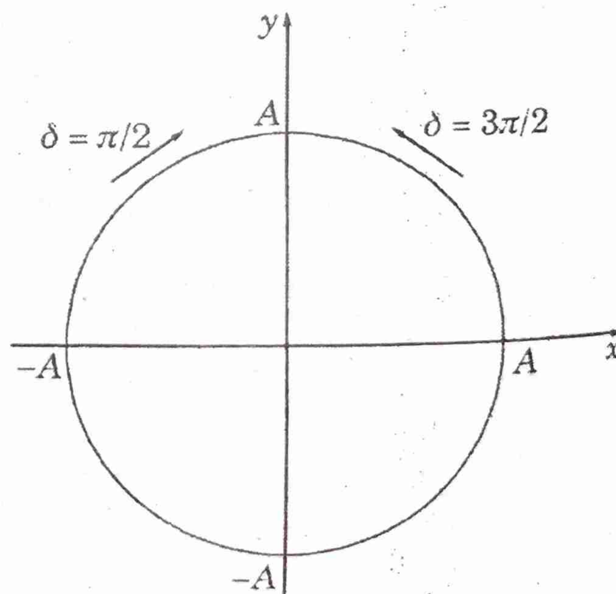


Fig. 20 *Polarización circular*

Caso C: Si $\omega_1 = \omega_2$, $A = B$ y $\delta = \pi/2$, $3\pi/2$ se obtiene $x^2 + y^2 = A^2$, llamada polarización circular, figura 20.

Caso D: Si $\omega_1 \neq \omega_2$, $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 \neq 0$, para graficar se utilizan las expresiones: $\omega_2/\omega_1 = a/b$ y $\delta = c$, donde a, b y c son conocidos, la superposición da lugar a las curvas de Lissajous.

Movimiento Oscilatorio Amortiguado

En este caso la masa está sometida además de la fuerza recuperadora del resorte otra fuerza de rozamiento, debido al líquido que lo rodea. figura 21.

De la segunda Ley de Newton:

$$F = ma = -Kx - \lambda v$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{\lambda}{m}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{K}{m}\right)x = 0$$

Si $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ y $2\gamma = \lambda/m$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\left(\frac{dx}{dt}\right) + \omega_o^2 x = 0 \text{ donde:}$$

ω_0 : frecuencia angular sin amortiguamiento

γ : coeficiente o constante de amortiguamiento.

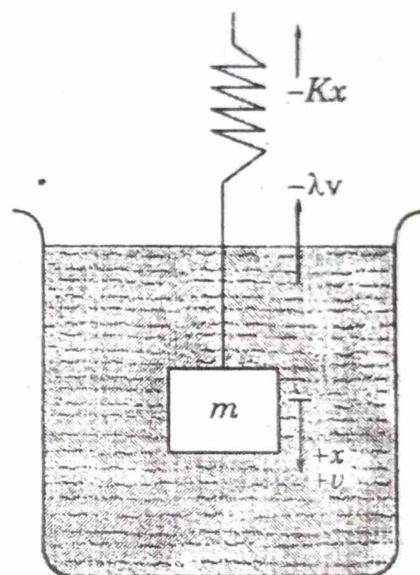


Fig. 21 *Movimiento oscilatorio amortiguado*

La solución de esta ecuación, tiene tres casos:

Caso a: Si $\gamma > \omega_o$, $x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, donde:

$$r_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$$

$$r_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_o^2}$$

y el movimiento se llama sobreamortiguado, figura 22.

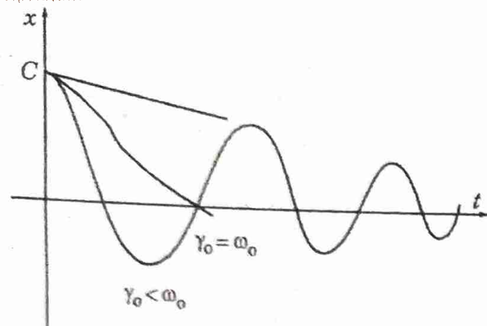


Fig. 22 *Movimiento sobre, crítica e infra amortiguado*

Caso b: Si $\gamma=\omega_0$, $x=e^{-\gamma t}(A+Bt)$ el movimiento es críticamente amortiguado.

Caso c: Si $\gamma<\omega_0$,

$$x=Ce^{-\gamma t}\cos(\omega t+\alpha)$$

donde $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$ y C, α se determinan por las condiciones iniciales. Este movimiento es infra-amortiguado o Movimiento Oscilatorio Amortiguado.

Se define el Decremento Logarítmico (D_L): Es el logaritmo de la relación entre dos valores sucesivos de la amplitud separados entre sí por un tiempo igual a un período T.

$$D=\text{Ln}\,\frac{Ce^{-\gamma t}}{Ce^{-\gamma(t+T)}}=\gamma T$$

Movimiento Oscilatorio Forzado.

Este movimiento se produce, cuando además de la fuerza elástica del resorte, y la fuerza de amortiguamiento del líquido, se aplica una fuerza oscilatoria externa, con diferente frecuencia w_f, Figura 23.

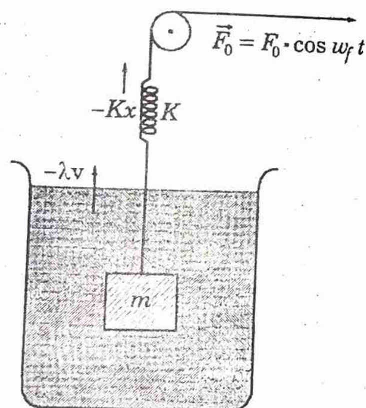


Fig. 23 *Movimiento oscilatorio forzado*

De la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-Kx-\lambda\frac{dx}{dt}+F_0\cos\omega_f t$$

Un proceso de solución nos lleva a una solución complementaria:

$$x_c=A_1\,\text{sen}\,\omega_0 t+B_1\cos\omega_0 t$$

y una solución particular : $x_p=A_2\text{sen}\,\omega_f t+B_2\cos\omega_f t$

y la solución general: $x=x_c+x_p=A\,\text{sen}(\omega_f t-\alpha)$, donde:

$$A=\frac{(F_o/m)}{\left[(\omega_f^2-\omega_o^2)^2+4\gamma^2\omega_f^2\right]^{1/2}}\quad \text{y}\quad \text{tg}\alpha=\frac{\omega_f^2-\omega_o^2}{2\gamma\omega_f}$$

La amplitud tiene un máximo, que se tiene: $\frac{\partial A}{\partial\omega_f}=0$, y se halla

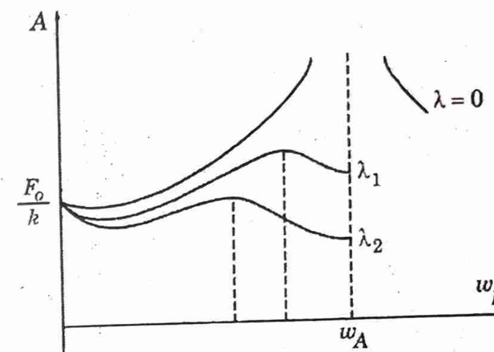


Fig. 24 *Resonancia*

$\omega_A=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$, luego cuando $\omega_f=\omega_A$, se tiene resonancia en la amplitud, tal como se indica en la figura 24.

PROBLEMAS RESUELTOS

01 La amplitud de unas vibraciones armónicas es igual a 50 mm, el período es 4 seg y la fase inicial a $\pi/4$. (a) Escribir la ecuación de estas vibraciones. (b) Hallar la elongación del punto vibrante cuanto $t=0$ y $t=1.5$ seg.

Solución:

a) Se tiene como datos $A=50\,mm$, T = 4 seg, $\alpha=\pi/4$, luego la ecuación del MAS:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t+\alpha) = A\,\text{sen}\left(\tfrac{2\pi}{T}t+\alpha\right)$$

$$x = 50\ \text{sen}\left(\tfrac{2\pi}{4}t+\tfrac{\pi}{4}\right) = 50\ \text{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}t+\tfrac{\pi}{4}\right)$$

b) Para: $t=0$, $x=50\,\text{sen}\tfrac{\pi}{4}=25\sqrt{2}\,mm$

$t=1.5$, $x=50\text{sen}\left(\tfrac{\pi\,1.5}{2}+\tfrac{\pi}{4}\right)=0\ mm$

02 ¿Cuánto tiempo transcurrirá desde el comienzo del movimiento armónico, hasta que el punto vibrante tenga una elongación igual a la mitad de la amplitud. El período de las vibraciones es igual a 24 seg. y fase inicial igual a cero.

Solución:

Los datos $x=A/2$, $T=24\,seg$, $\alpha=0$, reemplazando en la ecuación $x=A\,\text{sen}\left(\tfrac{2\pi}{T}t+\alpha\right)$, se tiene:

$\tfrac{A}{2}=A\,\text{sen}\left(\tfrac{2\pi t}{24}+0\right)$, de donde: $t=2\ seg$

03 Escribir la ecuación del movimiento vibratorio armónico si la aceleración máxima del punto es igual a 49.3 cm/seg^2, el período de las vibraciones 2 seg y la elongación del punto al iniciarse el movimiento era de 25 mm.

Solución:

Se conoce $a_{máx}=49.3\ cm/seg^2$, $T=2\ seg$, $x=25mm$, $t_0=0$

Conocido $x=A\text{sen}(\omega t+\alpha)$ se deriva dos veces con respecto al tiempo para hallar la aceleración $a=-A\omega^2\text{sen}(\omega t+\alpha)$

reemplazando valores $49.3=A\omega^2$ para la aceleración máxima:

$$49.3=A\left(\tfrac{2\pi}{2}\right)^2 \quad , \quad A=5\ cm$$

Luego, $2.5=5\text{sen}\left(\tfrac{2\pi}{2}\times 0+\alpha\right)$, $\alpha=30°$

Entonces: $x=5\,\text{sen}(\pi t+30°)$

04 La ecuación de las vibraciones de un punto material de masa $m=1.6\times10^{-2}\,Kg$ tiene la forma $x=0.1\,\text{sen}\left(\tfrac{\pi t}{8}+\tfrac{\pi}{4}\right)$. Hallar el valor máximo de la fuerza.

Solución:

Por la segunda Ley de Newton: $F=ma=m\frac{d^2x}{dt^2}$, donde:

$$x=0.1\,\text{sen}\left(\tfrac{\pi}{8}t+\tfrac{\pi}{4}\right)m \quad , \quad F=-m0.1\left(\tfrac{\pi}{8}\right)^2\text{sen}\left(\tfrac{\pi}{8}t+\tfrac{\pi}{4}\right)$$

La fuerza máxima: $F_{máx}=m0.1\left(\tfrac{\pi}{8}\right)^2 N$

Reemplazando el valor de m se tiene: $F_{máx}=24.6\times10^{-5}\,N$

05 Un peso oscila armónicamente a lo largo del eje X, junto a la posición de equilibrio $x=0$. La frecuencia de las oscilaciones $\omega=4\,seg^{-1}$. En cierto momento la coordenada de la partícula $x_0=25cm$ y su velocidad $v_{ox}=100\ cm/seg$. Hallar la coordenada x y la velocidad v_x de la partícula transcurridos $t=2.4\ seg$ después de este momento.

Solución:

$V_{ox} = 100\ cm/s$ $V =$

$x_o = 25$ $x =$

$t_o = 25$ $t = 2.4$

La posición está dada: $x = A\,\text{sen}(4t + \alpha)$, derivando se obtiene la velocidad $v = 4A\cos(4t + \alpha)$.

Reemplazando las condiciones iniciales: $25 = A\,\text{sen}\,\alpha$ y $100 = 4\,A\cos\alpha$, se obtiene $\alpha = 45°$

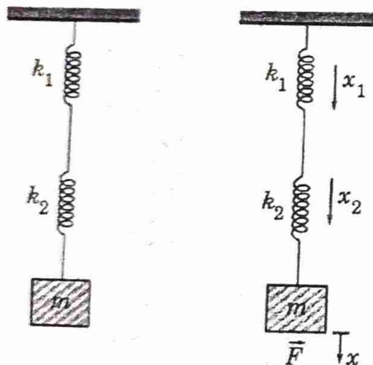
Luego: $A = 25/\text{sen}\,45° = 35.46\,\text{cm}$

Reemplazando en $x = 35.46\,\text{sen}\left(4 \times 2.4 + \frac{\pi}{4}\right)$; $x = 29.1cm$.

Reemplazando en $V = 35.46 \times 4\cos\left(4 \times 2.4 + \frac{\pi}{4}\right)$; $V = 20.1cm/seg$

06 En el sistema de la figura, hallar el período de las oscilaciones verticales pequeñas de un cuerpo de masa m. La rigidez de los resortes son K_1 y K_2 y sus masas pueden ser despreciadas.

Solución:



k_1 x_1 k_2 x_2 m $\vec{F}$ x

Para hallar el período de oscilación usaremos la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

y el K es el equivalente o efectivo de los dos resortes.

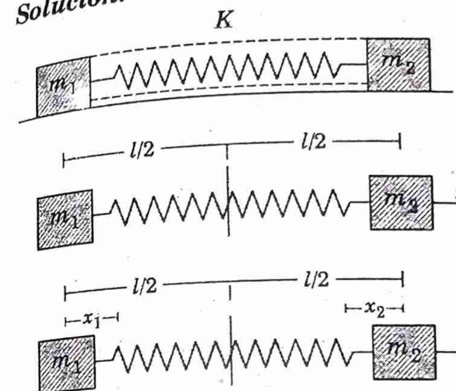
Cuando los resortes están en serie, la fuerza que los deforma se trasmite por igual en ambos resortes y las elongaciones cumplen:

$$x = x_1 + x_2\ ,\ \frac{F}{K} = \frac{F}{K_1} + \frac{F}{K_2}\ \text{, de donde}\ \frac{1}{K} = \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1): $T = 2\pi\sqrt{mK_1K_2/(K_1 + K_2)}$

07 Dos vigas de masa m_1 y m_2 están unidas por un muelle de rigidez K. El muelle está comprimido con ayuda de dos hilos como se muestra en la figura. Los hilos se queman. Hallar el periodo de oscilación de las vigas.

Solución:



Para determinar el período se usará

$$T = 2\pi\sqrt{m_1/K_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

El problema consiste nuevamente en hallar K_1 del sistema:

$$F_1 = -K_1 x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

El sistema sin deformación aparece en la segunda figura. Usando la definición de centro de masa.

$$x_{cm} = \frac{-m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$m_1 l_1 = m_2 l_2$$

Cuando se deforma x_1 y x_2 los resortes se tiene:

$$m_1(l_1 - x_1) = m_2(l_2 - x_2)$$

$$m_1 x_1 = m_2 x_2\ ,\ x_2 = \frac{m_1}{m_2}x_1$$

El muelle se comprimió: $x_1 + x_2$, luego se debe cumplir

$$F = -K(x_1 + x_2) = -K\left(x_1 + \frac{m_1 x_1}{m_2}\right) = -Kx_1\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right)$$

$$F = -\left[K\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right]x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Comparando (3) y (2) se obtiene: $K_1 = K\dfrac{m_1 + m_2}{m_2}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots$ (4)

Reemplazando (4) en (1):

$$T = 2\pi\left[\frac{m_1}{K(m_1 + m_2)/m_2}\right]^{1/2}$$

$$T = 2\pi\left[\frac{m_1 m_2}{K(m_1 + m_2)}\right]^{1/2}$$

(08) ¿Cuánto tiempo transcurrirá desde que comienza el movimiento hasta que el punto que vibra armónicamente de acuerdo con la ecuación $x = 7\ sen\ 0.5\pi t$ recorre el espacio que hay entre la posición de equilibrio y la de elongación máxima.

Solución:

La elongación máxima es la amplitud $A = 7$, según el problema

$$7 = 7\text{sen}\ 0.5\pi t \quad , \quad 0.5\pi t = \pi/2 \quad , \quad t = 1\ seg$$

(09) Un punto material de 10 g de masa oscila según la ecuación $x = 5\text{sen}(\pi t/5 + \pi/4)\ cm$. Hallar la fuerza máxima que actúa sobre el punto y la energía total de las vibraciones del punto material.

Solución:

a) De la ecuación $x = 5\text{sen}\left(\frac{\pi t}{5} + \frac{\pi}{4}\right)$

$\omega = \pi/5 \quad , \quad A = 5 \quad \text{y} \quad F = -Kx \quad , \quad F_{máx} = -KA$

se sabe $\omega^2 = K/m \quad , \quad F_{máx} = -\omega^2 mA$

Reemplazando valores y sin considerar la dirección:

$$F_{máx} = \left(\frac{\pi}{5}\right)^2 \times 10\times10^{-3} \times 5\times10^{-2}\ N = 2\pi^2 \times 10^{-5}\ N$$

b) La energía $E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{\omega^2}{2}mA^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}\right)^2 \times 10\times10^{-3} \times (5\times10^{-2})^2$

$E = 2.5\pi^2 \times 10^{-6}$ Joules

(10) La energía total de un cuerpo que realiza un movimiento vibratorio armónico es igual a $3\times10^{-5} J$, y la fuerza máxima que actúa sobre él es igual a 1.5×10^{-3N}. Escribir la ecuación del movimiento de este cuerpo si el período de las vibraciones es igual a 2 seg. y la fase inicial 60°.

Solución:

La energía total $E_T = \frac{1}{2}KA^2 = 3\times10^{-5}$ .... (1)

La fuerza máxima $F_{máx} = KA = 1.5\times10^{-3}$ .... (2)

Dividiendo (1)/(2) se obtiene $A = 40\times10^{-3}\ m$

como $\omega = 2\pi/T = \pi$, luego $x = 40\times10^{-3}\ \text{sen}(\pi t + 60°)m$

(11) Un peso de 10 *Kgf* está colgado de un muelle. Hallar el período de las oscilaciones verticales de este peso sabiendo que el muelle se estira 1.5 cm. cuando se le someta a la acción de la fuerza 1 *Kgf*.

Solución:

Para un peso de 10 *Kgf* le corresponde una masa de 10 *Kg*

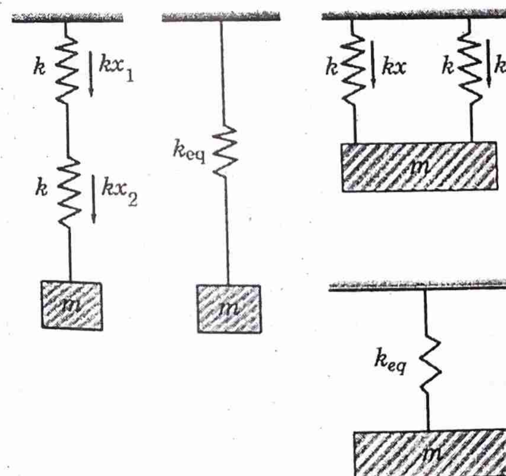
$K = F/x = 1\times9.8\ N/1.5\times10^{-2}\ m = 653\ N/m$.

Luego $\quad T = 2\pi\sqrt{m/K} = 2\pi\sqrt{10/653} = 0.78\ seg$

(12) Como variará el período de las oscilaciones verticales de un peso que está colgado de dos muelles iguales, si estos muelles en vez de unirse consecutivamente se unen paralelamente.

Solución:

Cuando los resortes están en serie, la fuerza es la misma y : $x = x_1 + x_2$



$\frac{F}{K_{eq}} = \frac{F}{K} + \frac{F}{K}\ K_{eq} = \frac{K}{2}$

$T_s = 2\pi\left[\frac{2m}{K}\right]^{1/2}$

Cuando los resortes están en paralelo, la fuerza está dada por la suma de las dos fuerzas y la elongación es la misma:

$F_1 + F_2 = F\ ,\ Kx + Kx = K_{eq}x$

$2Kx = K_{eq}x$

$K_{eq} = 2K \quad T_p = 2\pi\sqrt{m/2K}$ es el período para los resortes paralelos.

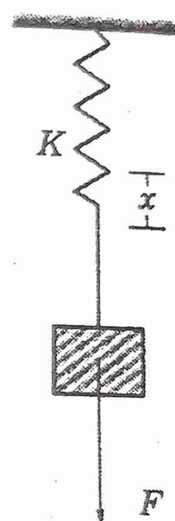
Dividiendo: $\frac{T_s}{T^p} = \left[\frac{2m/K}{m/2K}\right]^{1/2} = 2$

Luego el período disminuye en la mitad.

(13) Un bloque de 6 Kg. alarga un resorte 18 cm desde su posición de equilibrio. Se retira el primer cuerpo de 6 Kg. y se reemplaza por un segundo bloque de 4 Kg. que se pone a oscilar. Halle la frecuencia y el período de la oscilación

Solución:

Hallemos la constante de elasticidad del resorte, K



$$K = F/x = 6\times 9.8\ N/18\times 10^{-2}\ m = 3.26\times 10^{2}\ N/m$$

Para hallar la frecuencia $\omega = \sqrt{K/m}$

$$\omega = \sqrt{3.26\times 10^{2}/4} = 9\ rad/seg$$

$$\upsilon = \omega/2\pi = 1.4 seg^{-1}$$

El período es la inversa de la frecuencia $T = 1/\nu = 0.7 seg$

(14) Una partícula efectúa MAS a la frecuencia de 5 Hz. Halle una expresión que de el desplazamiento x en función de t, utilizando las siguientes condiciones iniciales:

a) $t=0$, $x=A$, $v_x=0$

b) $t=0$, $x=0$, $v_x=v_0$

c) $t=0$, $x=2cm$, $v_x=5cm/s$

Solución:

a) La expresión general del desplazamiento $x = A\,\text{sen}(\omega t+\alpha)$

Derivando con respecto al tiempo se obtiene $v_x = A\,\omega\cos(\omega t+\alpha)$

Reemplazando las condiciones del problema:

$x = A = A\ \text{sen}(2\pi 5\times 0+\alpha)$ se deduce $\alpha = \pi/2$

$v_x = 0 = A\ \omega\cos(2\pi 5\times 0+\alpha)$ se deduce $\alpha = \pi/2$

Luego $x = A\operatorname{sen}(10\pi t + \pi/2)$

b) $x = 0 = A\operatorname{sen}(10\pi \times 0 + \alpha)$ se deduce $\alpha = n\pi$ $n = 0,1,2\ldots$

$v_x = v_0 = A\omega\cos(10\pi \times 0 + \alpha)$ se deduce que no existe un valor de α que satisfaga las dos ecuaciones de x y v_x, por lo tanto no existe $x = f(t)$ para un MAS.

c) Para $x = 2 = A\operatorname{sen}(10\pi \times 0 + \alpha)$ se deduce $2 = A\operatorname{sen}\alpha$ .... (1)

$v_x = 5 = A\,10\pi\cos(10\pi \times 0 + \alpha)$ se deduce $5 = 10\pi\; A\cos\alpha$ .... (2)

De (1) y (2) se deduce $A = 2.00\ cm$, $\alpha = 85.4°$

$x = 2\operatorname{sen}(10\pi t + 85.4°)$

(15) La ecuación del movimiento de un punto tiene la forma $x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ cm. Hallar (a) el período de la vibración. (b) La velocidad máxima , y (c) su aceleración máxima.

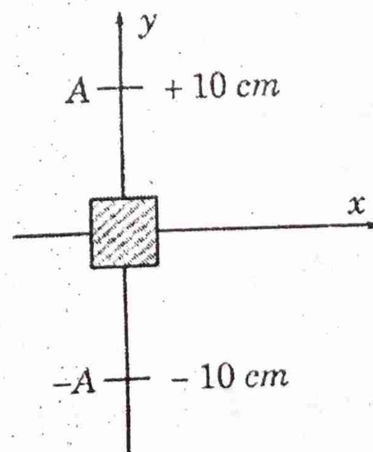
Solución:

a) De la expresión: $x = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$ se obtiene $\omega = \frac{\pi}{2}$ y $T = 4$ seg.

b) $v_x = \frac{dx}{dt} = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$, $v_{máx} = \pi\ cm/seg$

c) $a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$, $a_{máx} = \pi^2/2\,cm/seg^2$

(16) Una masa de 1 *Kg.* oscila hacia arriba y hacia abajo a lo largo de una recta de 20 *cm.* de longitud con MAS, 4 *seg* de período. (a) Hallar la velocidad y la aceleración cuando la elongación sea de 4 *cm.* (b) la fuerza restauradora cuando la elongación sea de 8 *cm.* por debajo del centro de la trayectoria.



Solución:

a) Como $T = 4$ seg.

$\omega = 2\pi/T = 2\pi/4 = \pi/2$, $A = 10$

La ecuación del movimiento $y = 10\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \alpha\right)$

para $y = 4\ cm$, $4 = 10\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \alpha\right)$

$0.4 = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \alpha\right)$; se usará $\cos\theta = [1 - \text{sen}^2\theta]^{1/2}$

La velocidad $v_y = A\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \alpha\right) = 10\frac{\pi}{2}\sqrt{1 - 0.4^2}$

$v_y = 14.4$ cm/seg .

La aceleración $a_y = -A\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t + \alpha\right) = -9.8\ cm/s^2$

b) La fuerza restauradora, para $y = -8\ cm$

$F = -k(y) = -\omega^2 my = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 10^3(-8)\ dinas$

$F = 39.4 \times 10^3\ dinas$

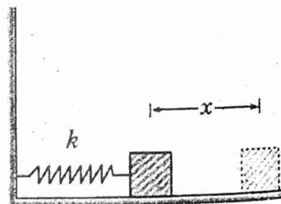
(17) Un cuerpo de masa 2 *Kg*. descansa sobre una superficie pulida, estando unido a un muelle en la forma representada en la figura. El muelle tiene la propiedad de que bajo la acción de una fuerza de 10 *N* sufre un alargamiento de 0.05; si se desplaza el cuerpo 0.05 m de su posición de equilibrio y se suelta a continuación, calcular la amplitud, la frecuencia y el período del MAS.

Solución:

a) La amplitud, es la máxima elongación $A = 0.05\ m$

$K = F/x = 10N/0.05m = 200N/m$ y $\omega^2 = K/m$

$\omega = \sqrt{200/2} = 10\ rad/seg$ y $\nu = \omega/2\pi = 5/\pi\ seg^{-1}$



El período $T = \frac{1}{\nu} = \frac{\pi}{5}\ seg$

(18) Con relación al problema anterior, en vez de desplazar el cuerpo 0.05 m respecto a su posición de equilibrio, se le comunica una velocidad inicial de 1 m/s, cuando se encuentra en dicha posición de equilibrio. Hallar la ecuación del movimiento, si para $t = 0$, $x = 0$.

Solución:

La ecuación del movimiento es $x = A\text{sen}(\omega t + \alpha)$

para $x = 0$ y $t = 0$, $0 = A$ sen $(\omega \times 0 + \alpha)$

se deduce que $\alpha = 0$, luego $x = A$ sen ωt

Como $\omega = 10\ rad/seg$ y $K = 200\ N/m$, para hallar *A*, usamos la relación energética del MAS:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + Kx^2 = \tfrac{1}{2}KA^2$$

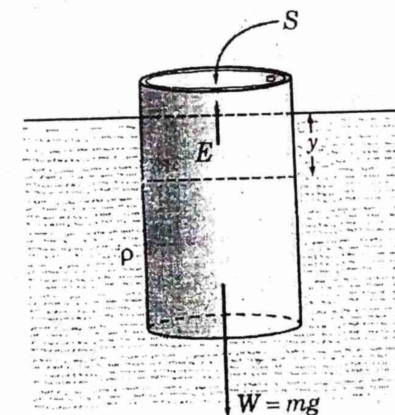
$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 + K0^2 = \tfrac{1}{2}KA^2 \ ,\ A = \sqrt{m/K}\ v_0 = 0.1m$$

Luego: $x = 0.1\ \text{sen}10\,t$

(19) Un cilindro flota con su eje en posición vertical en un líquido ρ. Se empuja levemente hacia abajo y luego se deja libre. Hallar el período de la oscilación si el cilindro tiene un peso *W* y una sección transversal de área *S*.

Solución:

La fuerza que actúa sobre el cuerpo cuando este se sumerge una distancia y es g S y ρ.



Usando la 2da ley de Newton:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -(gSy\rho)\ ,\ \frac{Wd^2y}{gdt^2} = -S\rho yg$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{S\rho g^2}{W}y = 0 \ ,\ \text{se deduce}$$

$$T = 2\pi/\sqrt{S\rho g^2/W}$$

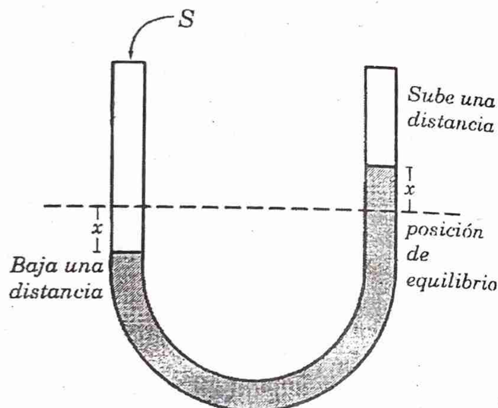
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{W}{S\rho g^2}}$$

(20) Se tiene un líquido de densidad ρ y la longitud total L en el manómetro representado en la figura. Un aumento repentino de presión en un lado fuerza al líquido hacia abajo. Cuando desaparece la presión, el líquido oscila. Despreciando el amortiguamiento por rozamiento ¿Cuál será la frecuencia de vibración?

Solución:

La fuerza restauradora es debido a los dos ramales $2\,(Sx\rho)g$

De la 2da Ley de Newton:



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2Sx\rho g$$

El peso total del líquido $S\,L\,\rho g$

$$\frac{gSL\rho}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -2\,S\,x\,\rho g$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{g}{L}x = 0$$

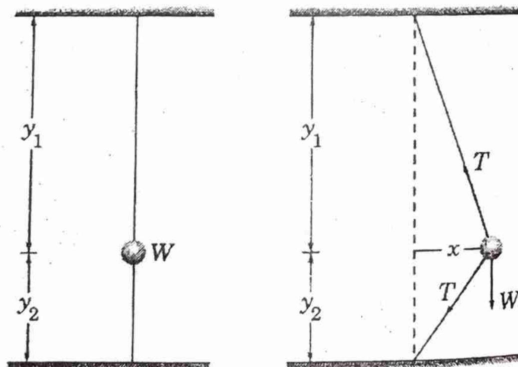
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{2g/L}}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2g/L}\,,\ \text{donde}\ \nu = \frac{1}{T}$$

(21) Un peso pequeño W está sujeto a un alambre vertical sometido a una tensión T, según se indica en la figura. ¿Cuál será la frecuencia natural de vibración del peso si se le desplaza lateralmente una pequeña cantidad y se le suelta después?

Solución:

Para distancias pequeñas x, las componentes de las tensiones son: $T\frac{x}{y_1}$ y $T\frac{x}{y_2}$ dirigidos en sentido opuesto (a la izquierda) al desplazamiento x.



De la 2da ley de Newton:

$$-T\frac{x}{y_1} - T\frac{x}{y_2} = \left(\frac{W}{g}\right)\frac{d^2x}{dt^2}$$

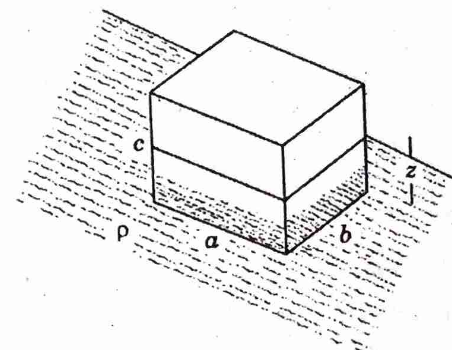
$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{W}\left(\frac{T}{y_1} + \frac{T}{y_2}\right)x = 0$ el período es la inversa de la frecuencia:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{Tg}{W}\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

(22) Un paralelepípedo de lados a, b c y de peso W vibra verticalmente en un líquido de densidad ρ. Halle una expresión para el período de vibración del cuerpo.

Solución:

Cuando el cuerpo se sumerge una distancia z, aparece una fuerza restauradora que la hace oscilar. Esta fuerza es:



$$F_z = -\rho(abz)g$$

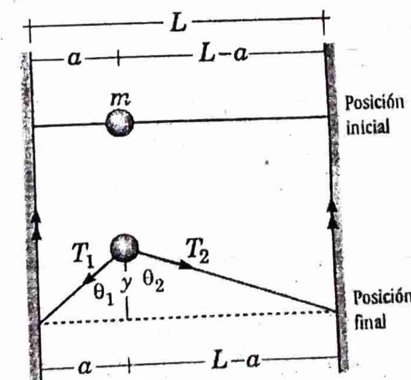
De la 2da Ley de Newton:

$$\left(\frac{W}{g}\right)\frac{d^2z}{dt^2} = -(\rho\,a\,b\,g)\,z$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{\rho\,a\,b\,g^2}{w}\right)z = 0$$

$$T = 2\pi\left[\frac{W}{\rho\,a\,b\,g^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(23) La figura muestra una partícula de masa m sostenida por un alambre de longitud L. Si la partícula se desplaza verticalmente una distancia pequeña y y se lo abandona, demostrar que la frecuencia cíclica de vibración de la masa es:



$$\omega_0 = [\,TL/ma(L-a)]^{\frac{1}{2}}$$

$$T_1 = T_2 = T$$

Se tiene para desplazamientos pequeños $y < a\,,\ y < L-a\,.$

La fuerza restauradora es $-T_1\cos\theta_1 - T_2\cos\theta_2$ dirigido hacia abajo. Y de la 2da Ley de Newton:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -T_1\cos\theta_1 - T_2\cos\theta_2$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -T\frac{y}{(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - T\frac{y}{[(L-a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}} = -\frac{T}{a}y - \frac{T}{L-a}y$$

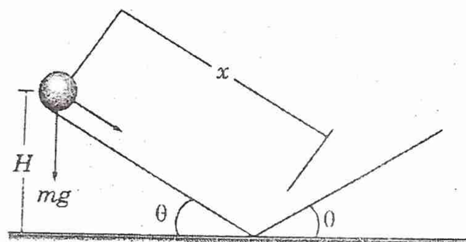
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{T}{m}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{L-a}\right)y = 0$$

$$\omega = [TL/ma(L-a)]^{\frac{1}{2}}$$

(24) Una partícula se desliza hacia adelante y hacia atrás entre dos planos inclinados sin fricción. Si θ es el ángulo de inclinación de los planos y si H es la altura inicial del movimiento, demostrar que el período del movimiento está dado por: $(4\,sen\theta)(2H/g)^{\frac{1}{2}}$

Solución:

La fuerza que obliga a la masa a desplazarse sobre el plano inclinado es: mg sen θ.



Por la segunda Ley de Newton:

$ma = mg\,\text{sen}\,\theta$, $a = g\,\text{sen}\,\theta$ es constante.

Luego: $x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{g\,\text{sen}\,\theta}{2}t^2$

pero $\text{sen}\,\theta = \frac{H}{x}$

$$\frac{H}{\text{sen}\,\theta} = \frac{g\,\text{sen}\,\theta}{2}t^2 \quad , \quad t = \sqrt{2H/g\,\text{sen}^2\theta}$$

El período es cuatro veces este tiempo $T = 4t$.

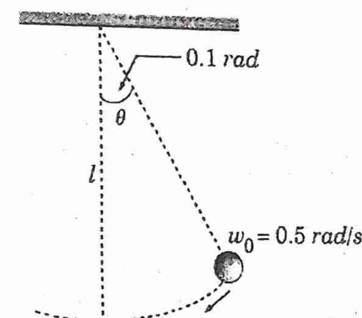
$$T = 4\sqrt{2H/g\,\text{sen}^2\theta}$$

$$T = \frac{4}{\text{sen}\,\theta}\sqrt{2H/g}$$

(25) La lenteja de un péndulo es un cuerpo pequeño de 1 Kg. y la longitud de suspensión es de 1 m. Si se suelta el péndulo cuanto $t = 0$ y forma un ángulo de 0.1 rad con la vertical, con una velocidad angular inicial de 0.5 rad/seg, obtenga una expresión que de el desplazamiento angular en función del tiempo. Suponga que la velocidad angular inicial es como se indica en la fig. 1

Solución:

Sabemos para un MAS $\theta = \theta_0\,\text{sen}(\omega_0 t + \alpha)$



donde
$$\omega_0^2 = g/l$$
$$\omega_0 = \sqrt{9.8/1} = 3.13\ rad/seg$$

La velocidad angular:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \theta_0\omega\cos(\omega t + \alpha)$$
$$\omega = \omega_0 = 0.5\ rad/seg$$

para $t = 0$; $0.5 = \theta_0\, 3.13\cos(3.13\times 0 + \alpha)$ .... (1)

$\theta = 0.1\,rad$ para $t = 0$, $0.1 = \theta_0\,\text{sen}(3.13\times 0 + \alpha)$ .... (2)

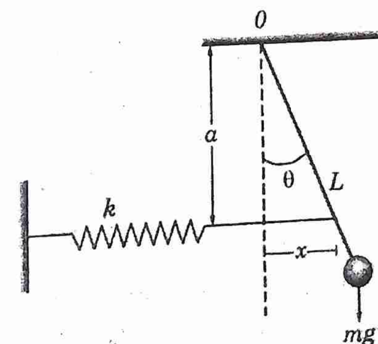
De (1) y (2): $\text{tg}\alpha = 0.313/0.5$, $\alpha = 32°$

$$\theta_0 = 0.18\,rad$$

Luego: $\theta = 0.18$ sen $(3.13\,t + 0.56)$

(26) Hallar la ecuación y la frecuencia angular del sistema mostrado en la figura.

Solución:



Sabemos $\Sigma\tau_0 = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$ .... (1)

$$\Sigma\tau_0 = -mgL\,\text{sen}\,\theta - (Kx)a$$

$$\Sigma\tau_0 = -mgL\,\text{sen}\,\theta - K(a\,\text{sen}\,\theta)a$$

$$\Sigma\tau_o = -mgL\,\text{sen}\,\theta - Ka^2\,\text{sen}\,\theta$$

$I = mL^2$ .... (2)

De (1) y (2): $mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(m\,g\,L + Ka^2)\text{sen}\,\theta = -(m\,g\,L + Ka^2)\theta$

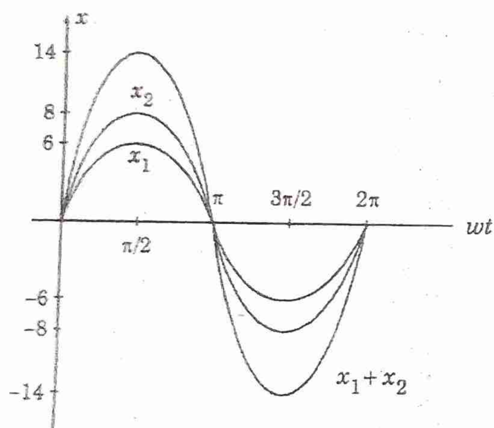
Para ángulos pequeños θ: $mL^2\frac{d^2}{dt^2} + (mgL + Ka^2)\theta = 0$

$$\frac{d^2}{dt^2} + \left[\frac{(m\,g\,L + Ka^2)}{mL^2}\right]\theta = 0$$

$$w = \left[\frac{mgL + ka^2}{mL^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(27) Encontrar la ecuación del movimiento resultante de la superposición de dos movimientos armónicos simples paralelos cuyas ecuaciones son $x_1 = 6\,\text{sen}\,2t$ y $x_2 = 8\,\text{sen}\,(2t + \alpha)$, si $\alpha = 0,\ \pi/2,\ \pi$. Hacer un gráfico de cada movimiento y del movimiento resultante en cada caso.

Solución:



a) Para:

$\alpha = 0$,

$x_1 = 6\,\text{sen}\,2t$ y

$x_2 = 8\,\text{sen}\,2t$

$x = x_1 + x_2$,

$x = 14\,\text{sen}\,2t$

b) Si:

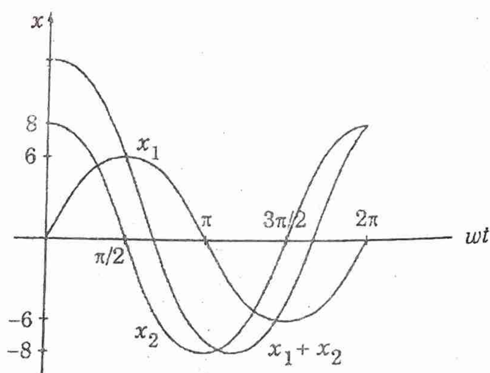
$\alpha = \pi/2$

$x_1 = 6\,\text{sen}\,2t$ y

$x_2 = 8\text{sen}(2t + \pi/2) = 8\cos 2t$

$x = x_1 + x_2$

$x = 10\,\text{sen}\,(2t + 53°)$



c) Si:

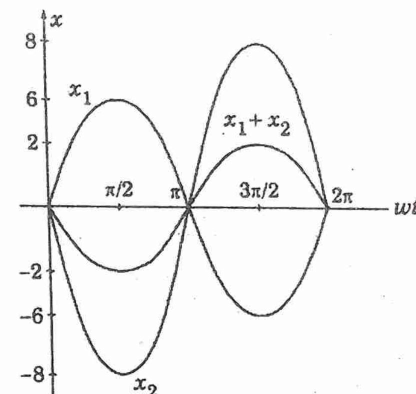
$\alpha = \pi$

$x_1 = 6\,\text{sen}\,2t$ y

$x_2 = 8\text{sen}(2t + \pi) = -8\text{sen}\,2t$

$x = x_1 + x_2$,

$x = -2\text{sen}\,(2t)$



(28) Encontrar la ecuación resultante de la superposición de dos movimientos armónicos simples paralelos cuyas ecuaciones son:

$x_1 = 2\text{sen}(\omega t + \pi/3)$ y $x_2 = 3\,\text{sen}(\omega t + \pi/2)$, y los gráficos respectivos.

Solución:

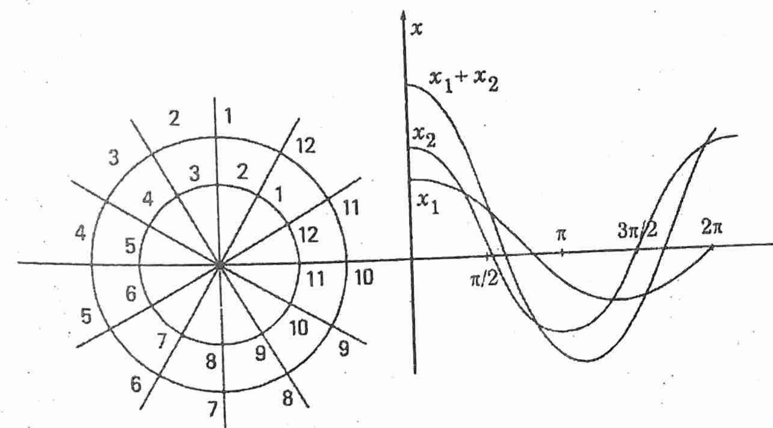
Para determinar la ecuación del movimiento resultante, se halla la amplitud y la fase, para ello usamos las ecuaciones deducidas en teoría:

$$x = x_1 + x_2 = A\,\text{sen}(\omega t + \alpha)\ ,\ \delta = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$A = \left(A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{A_1\text{sen}\,\alpha_1 + A_2\text{sen}\,\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}$$

reemplazando valores:



$$A=\left(2^2+3^2+2\times2\times3\cos\tfrac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{2}}=4.35$$

$$x=4.35\ \text{sen}\ (\omega t+78°)$$

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{2\text{sen}\,\pi/3+3\text{sen}\frac{\pi}{2}}{2\cos\pi/3+3\cos\pi/2}\quad,\quad \alpha=78°$$

(29) Hallar la ecuación de la trayectoria del movimiento resultante de la superposición de dos movimientos armónicos simples perpendiculares, si $\omega_1/\omega_2=\frac{1}{2}$ y $\alpha=0,\pi/3,\pi/2$

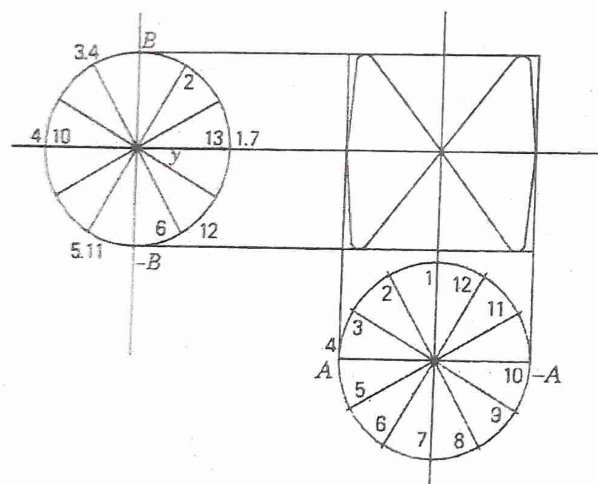
Solución:

a) $\omega_2=2\omega_1$, $\alpha=0$

$x=A\,\text{sen}\ \omega_1\,t$

$y=B\,\text{sen}(\omega_2 t+\alpha)=B\,\text{sen}\,2\omega_1 t=B2\ \text{sen}\ \omega_1 t\cos\omega_1 t$, $A=B$

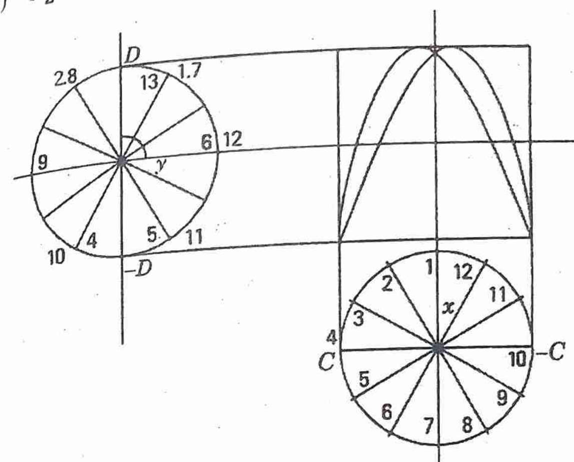
$y=2B(x/A)\sqrt{1-(x/A)^2}$



Nº	X $\omega_1 t$	Y $2\omega_1 t+\theta$
1	0	0
2	30	60
3	60	120
4	90	180
5	120	240
6	150	300
7	180	360
8	210	420
9	240	480
10	270	540
11	300	600
12	330	660
13	360	720

$y=\frac{2B}{A}\sqrt{x^2-(x^4/A^2)}$

b) $\omega_2=2\omega_1$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $x=C\ \text{sen}\ \omega_1 t$, $y=D\ \text{sen}\left(\omega_2 t+\frac{\pi}{3}\right)$, $C=D$



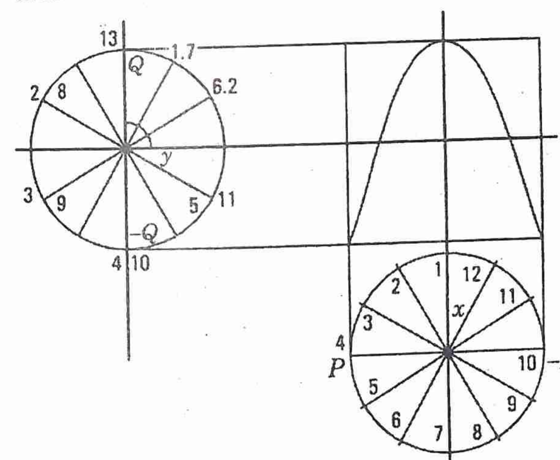
Nº	X $\omega_1 t$	Y $2\omega_1 t+\pi/3$
1	0	60
2	30	120
3	60	180
4	90	240
5	120	300
6	150	360
7	180	420
8	210	480
9	240	540
10	270	600
11	300	660
12	330	720
13	360	780

Se halla $y=\frac{D}{C}x\sqrt{1-(x/C)^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1-2\left(\frac{x}{C}\right)^2\right]$

c) $\omega_2=2\omega_1$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$

$x=P\,\text{sen}\ \omega_1 t$, $y=Q\ \text{sen}\ (\omega_2+\pi/2)=Q\ \text{sen}\ (2\omega_1 t+\pi/2)$, $P=Q$

eliminando el tiempo se halla:



Nº	X $\omega_1 t$	Y $2\omega_1 t+\theta$
1	0	90
2	30	150
3	60	210
4	90	270
5	120	330
6	150	390
7	180	450
8	210	510
9	240	570
10	270	630
11	300	690
12	330	850
13	360	910

$y=Q\left[1-2\left(\frac{x}{P}\right)^2\right]$

(30) El período de las oscilaciones amortiguadas de una masa de 1 Kg unida a un resorte es de 0.5 seg. Si la masa de 1 Kg. estira el resorte 5 cm, halle la constante de amortiguamiento.

Solución:

Se ha deducido en teoría para el movimiento amortiguado:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dx}{dt}+Kx=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{K}{m}x=0$$

$\frac{\lambda}{m}=2\gamma$, $\omega=\sqrt{(K/m)^2-\frac{\lambda^2}{4\,m^2}}$: frecuencia de oscilación del sistema.

Se conoce: $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0.5}$, $mg=Kx$, $\frac{K}{m}=\frac{g}{x}$

$\frac{K}{m}=\frac{9.8}{0.05}$, despejando λ se halla su valor $\lambda=12.36\ Kg/s$

(31) El periodo de amortiguación de una vibración es de 4 seg. su decremento logarítmico es 1.6 y la fase inicial es igual a cero. La elongación del punto cuando $t=T/4$ es de 4.5 cm. Escribir la ecuación de este movimiento vibratorio suponiéndola de la forma $x=Ce^{-\gamma t}\operatorname{sen}(\omega t+\varphi)$.

Solución:

Por definición de decremento logarítmico:

$$D=Ln\frac{Amplitud\,(t)}{Amplitud\,(t+T)}=\frac{Ce^{-\gamma t}}{Ce^{-\gamma(t+T)}}=\gamma T\ ,\ D=\gamma T$$

Como $T=4$, $D=1.6$, $\gamma=D/T=0.4$ y $\varphi=0$

Luego $x=Ce^{-0.4t}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{4}t+0\right)$

para $x=4.5$, $t=T/4=1$: $4.5=Ce^{-0.4\times 1}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\times 1\right)$

$C = 4.5\,e^{0.4}$, luego $x = 4.5\,e^{0.4}\; e^{-\gamma t}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}t$

$x = 4.5\,e^{0.4(1-t)}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

(32) Un peso de 20 lbf se cuelga de un resorte vertical el que se estira hasta 2 pies. El peso se empuja 5 pies hacia abajo y se abandona. (a) Hallar la posición del peso en cualquier tiempo si una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 5 veces la velocidad instantánea con que está actuando se hace presente.

Solución:

Para saber qué tipo de movimiento se trata hay que hallar γ y ω_0, usando $g = 32$ pies/seg^2.

Sabemos que: $\omega_0^2 = \frac{K}{m} = \frac{(mg/l)}{m} = \frac{g}{l}$

$\omega_0 = \sqrt{32/2} = 4\,seg^{-1}$

$\gamma = \frac{\lambda}{2m}$ y $F = \lambda v$, según dato $\lambda = 5$

entonces $\gamma = \frac{5}{2 \times 20/32} = 4\ seg^{-1}$, y se tiene $\gamma = \omega_0$

Se trata de un movimiento críticamente amortiguado.

La ecuación diferencial del movimiento es la siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0$$

La solución de esta ecuación es de la forma: $x = e^{-\gamma t}(A + Bt)$

Las condiciones iniciales son: $x_0 = 5$ pies, $t_0 = 0$, $v_0 = 0$

$$5 = e^{-4\times 0}[A + B\times 0] = A + 0\ ,\ A = 5$$

$\frac{dx}{dt} = -\gamma e^{-4t}(A + Bt) + e^{-4t}B$,

$0 = -\gamma e^{0}(A + B \times 0) + e^{0}B$

$0 = -4A + B$, $B = 4A = 20$

$x = e^{-4t}(5 + 20t)$

$x = 5e^{-4t}(1 + 4t)$

(33) El peso unido a un resorte vertical está forzado a vibrar de acuerdo a la ecuación: $(d^2x/dt^2) + 16x = 12 \text{ sen } \omega t$, donde x es el desplazamiento de la posición de equilibrio y $\omega > 0$ es una constante. Si para $t = 0$, $x = 0$ y $dx/dt = 0$, hallar: (a) x como función del tiempo t, (b) el período de la fuerza externa para la cual la resonancia ocurre.

Solución:

a) Se usará el método de la solución complementaria y otra particular, así:

La solución complementaria $x_c = A\cos\omega_0 t + B\text{sen }\omega_0 t$

De la ecuación diferencial dada $\omega_0^2 = 16$, $\omega_0 = 4$

luego $x_c = A\cos 4t + B\text{sen }4t$ .... (1)

Otra solución particular es $x_p = C \text{ sen } \omega t + D\cos\omega t$ .... (2)

y tenemos que hallar las constantes A , B , C y D.

Hallemos:

$$\frac{dx_p}{dt} = C\,\omega\cos\omega t - D\,\omega\text{sen }\omega t$$

$$\frac{d^2x_p}{dt^2} = -C\,\omega^2\text{sen }\omega t - D\omega^2\cos\omega t$$

Reemplazando la última expresión y (2) en: $\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 12\text{sen }\omega t$

$-C\omega^2\text{sen }\omega t - D\omega^2\cos\omega t + 16C\text{ sen }\omega t + 16D\cos\omega t = 12\text{sen }\omega t$

Igualando coeficientes:

$16C - C\omega^2 = 12$, $C = 12/(16-\omega^2)$, $-D\omega^2 + 16D = 0$, $D = 0$

Luego: $x_p = \frac{12}{16-\omega^2}\text{sen }\omega t$, la solución general queda:

$x = x_c + x_p = A\cos 4t + B\text{sen }4t + \frac{12}{16-\omega^2}\text{sen }\omega t$ .... (3)

Hallemos la velocidad:

$v = \frac{dx}{dt} = -4\,A\text{sen }\omega t + 4B\cos 4t + \frac{12\omega}{16-\omega^2}\cos\omega t$ .... (4)

Para las condiciones iniciales $t = 0$, $x = 0$, se tiene en (3).

$0 = A \times 1 + B \times 0 + 0$, $A = 0$

$t = 0$, $v = 0$ en (4)

$0 = -4A \times 0 + 4B \times 1 + \frac{12\omega}{16-\omega^2}$ (1)

$B = 3\omega/(\omega^2 - 16)$, luego:

$$x = 3\frac{\omega}{\omega^2-16}\text{sen }4t + \frac{12}{16-\omega^2}\text{sen }\omega^2 = \frac{3}{16-\omega^2}(\text{sen }\omega t - \omega\text{sen }4t)$$

Para $\omega \neq 4$. Para el caso de $\omega = 4$, se tiene que intentar una solución adicional. Pero para los fines del curso, es suficiente con la solución dada.

b) Para hallar la frecuencia de resonancia, ω_{res} , se usará la ecuación deducida en teoría:

$\omega = (\omega_0^2 - 2\gamma^2)^{1/2}$

Para nuestro problema no hay amortiguamiento, luego:

$\lambda = 0$ y $\gamma = 0$.

Entonces:

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2} = \omega_0 = 4\,rad/seg$$

$$\omega_{res} = 4\,rad/seg$$

(34) La ecuación del movimiento de un punto tiene la forma $X = \text{sen}\,\pi t/6$. Hallar los instantes en que los valores de la velocidad y de la aceleración son máximos.

Solución:

a) Dado: $X = \text{sen}\,\pi t/6$, hallemos la velocidad, derivando:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi t}{6}$$

se obtendrá la velocidad máxima cuando $\cos\frac{\pi t}{6} = 1$ o sea

$\frac{\pi t}{6} = \eta\pi \quad , \quad \eta : 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$

$t = 6n : 0, 6, 12, 18\ seg$

b) Hallando la aceleración, nuevamente derivando la velocidad:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{6}\text{sen}\frac{\pi t}{6}$$

se obtendrá la aceleración máxima cuando: $\text{sen}\frac{\pi t}{6} = 1$

$\frac{\pi t}{6} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad , \quad \eta : 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$

$t = 3(2n+1) : 3, 9, 15\ seg \ldots\ldots$

(35) A que es igual la relación entre la energía cinética de un punto que vibra armónicamente y su energía potencial, en los momentos en que el tiempo es $t = T/12\ seg$.

Solución:

Sabemos por el principio de conservación de energía: $Ec + Ep = \frac{KA^2}{2}$ ...... (1)

La energía potencial es: $Ep = \frac{KX^2}{2}$ .... (2)

según la condición del problema: $X = A\,\text{sen}\frac{2\pi}{T}t$

para $t = T/12$, $X = A\,\text{sen}\frac{2\pi}{T}\left(\frac{T}{12}\right)$

$X = A\,\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{A}{2}$ .... (3)

De (3) en (2) : $Ep = \frac{1}{2}K\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{KA^2}{8}$ .... (4)

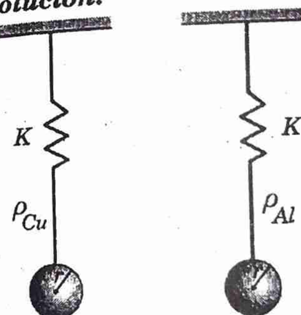
De (4) en (1) : $Ec + \frac{1}{8}KA^2 = \frac{1}{2}KA^2$

$Ec = \frac{3}{8}KA^2$

Luego la relación pedida es: $Ec/Ep = 3/8KA^2/1/8KA^2 = 3$

(36) Una bola de cobre está colgada de un muelle y oscila verticalmente, como variará el período de estas oscilaciones si en lugar de la bola de cobre se cuelga del muelle una bola de aluminio del mismo radio que aquella. $\rho = 2{,}7$ al $\rho_{Cu} = 8{,}9$

Solución:



Sabemos por teoría que el período de oscilaciones está dado por la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

Luego hallamos la relación:

$$\frac{T_{Al}}{T_{Cu}} = \frac{2\pi\sqrt{m_{Al}/k}}{2\pi\sqrt{m_{Cu}/k}}$$

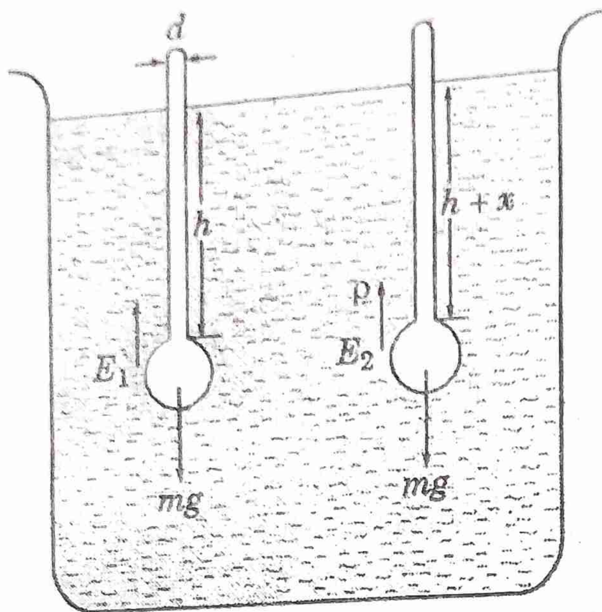
por ser el mismo resorte: K y por tener el mismo radio r, el volumen es igual para ambos V.

$$\frac{T_{Al}}{T_{Cu}} = \sqrt{\frac{\rho_{Al}V}{\rho_{Cu}V}} = \sqrt{\frac{\rho_{Al}}{\rho_{Cu}}} = \sqrt{\frac{2.7}{8.9}}$$

$$T_{Al}/T_{Cu} = 0.55$$

(37) Un aereómetro cuyo peso 0.2 kg f está flotando en un líquido. Si este aereómetro se sumerge un poco en el líquido y después se suelta, empezará a oscilar verticalmente con un período 3.4 seg. Partiendo de la suposición de que estas oscilaciones no son amortiguados y de los datos de este experimento. Hallar la densidad del líquido en que flota el aereómetro. El diámetro del tubo cilíndrico vertical del aereómetro es 1 cm.

Solución:



Por la condición de equilibrio inicial:

$$\Sigma F = mg - E_1 = 0$$

$$mg - g(V + sh) = 0$$

$$mg = g(V + sh) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Cuando el aereómetro se sumerge una distancia x, existe una fuerza neta, que actúa sobre el aereómetro y lo obliga a oscilar y es proporcional a la elongación:

$$E_2 - mg = Kx\,.$$

$$\rho g[V + s(h + x)] - \rho g(V + Sh) = kx$$

$$\rho gsx = Kx \;,\; K = \rho gs \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Si el período de oscilación está dado por: $T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{m/\rho gs}$, usando (2)

despejando: $\rho = 16\pi\, m/gd^2\, T^2$

donde: $S = \pi d^2/4$

reemplazando valores: $\rho = 890\ kg/m^3$

(38) El Decremento logarítmico de la amortiguación de un péndulo matemático es igual a 0.2. Hallar cuántas veces disminuye su amplitud durante una oscilación completa del péndulo.

Solución:

Su amplitud inicial es: $A_1 = A_o e^{-\gamma t}$

La amplitud final es: $A_2 = A_0 e^{-\gamma(t+T)}$

Luego: $\frac{A_1}{A_2} = A_0\, e^{-\gamma t} / A_0\, e^{-\gamma(t+T)} = e^{-\gamma t}$

Por definición de decremento logarítmico: $D = \gamma T = 0.2$

$A_1/A_2 = e^{-D} = e^{-0.2} = 1.22$

(39) Para un movimiento oscilatorio con amortiguación demostrar:

$$A = \frac{(F_0/m)}{[(W_f^2 - W_0^2)^2 + 4\gamma^2 W_f^2]^{1/2}}$$

$$\alpha = tg^{-1}\left(\frac{W_f^2 - W_0^2}{2\gamma W_f}\right)$$

Solución:

Para un movimiento oscilatorio forzado la ecuación diferencial del movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \lambda\frac{dx}{dt} + F_0 \cos W_f t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{k}{m}\right)x = \frac{F_0}{m}\cos W_f t$$

donde: $2\gamma = \lambda/m$, $w_0^2 = k/m$

$$\frac{d^2 \cdot x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + w_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos W_f t \quad \text{...} \quad (1)$$

La solución de la ecuación es: $X = A\,\text{sen}(w_f t - \alpha)$

Hallando la primera y segunda derivada de x con respecto al tiempo y reemplazando en (1):

$$v = \frac{dx}{dt} = AW_f \cos(w_f t - \alpha)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -AW_f^2\,\text{sen}(w_f t - \alpha)$$

Luego:

$$-Aw_f^2\,\text{sen}(w_f t - \alpha) + 2\gamma A w_f \cos(w_f t - \alpha) + w_0^2 A\,\text{sen}(w_f t - \alpha) = (F_0/m)\cos w_f t$$

Desarrollando los senos y cosenos:

$$(-AW_f^2 + W_0^2 A)(\operatorname{sen} W_f t \cos\alpha - \cos w_f t \operatorname{sen}\alpha) + 2\gamma A w_f (\cos w_f t \cos\alpha + \operatorname{sen} W_f t \operatorname{sen}\alpha) = (F_0/m)\cos W_f t$$

$$[(-AW_f^2 + W_0^2 A)\cos\alpha + 2\gamma A W_f \operatorname{sen}\alpha]\operatorname{sen} W_f t + [(AW_f^2 - W_0^2 A)\operatorname{sen}\alpha + 2\gamma A W_f \cos\alpha]\cos W_f t = (F_0/m)\cos W_f t$$

Igualando coeficientes de $\operatorname{sen} W_f t$ y $\cos W_f t$:

Para $\operatorname{sen} W_f t$: $[(-AW_f^2 + W_0^2 A)\cos\alpha + 2\gamma A W_f \operatorname{sen}\alpha]\operatorname{sen} W_f t = 0$ .... (2)

Para $\cos W_f t$: $[(AW_f^2 - W_0^2 A)\operatorname{sen}\alpha + 2\gamma A W_f \cos\alpha]\cos W_f t = \frac{F_0}{m}\cos W_f t$ ...... (3)

De (2): $2\gamma A W_f \operatorname{sen}\alpha = (AW_f^2 - W_0^2 A)\cos\alpha$

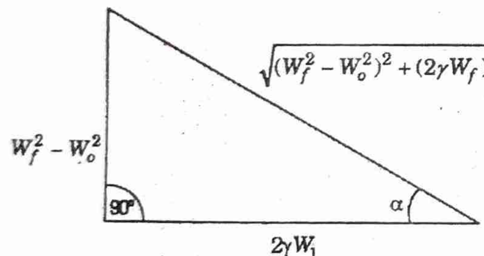
$\operatorname{tg}\alpha = (W_f^2 - W_0^2)/2\gamma W_f$ .... (4)

lqqd.

De (3): $A[(W_f^2 - W_0^2)\operatorname{sen}\alpha + 2\gamma W_f \cos\alpha] = F_0/m$

$$A = \frac{F_0/m}{(W_f^2 - W_0^2)\operatorname{sen}\alpha + 2\gamma W_f \cos\alpha} \quad \text{...................................... (5)}$$

De (4):



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{W_f^2 - W_0^2}{\sqrt{(W_f^2 - W_0^2)^2 + 4\gamma^2 W_f^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2\gamma W_f}{\sqrt{(W_f^2 - W_0^2)^2 + 4\gamma^2 W_f^2}}$$

Reemplazando en (5):

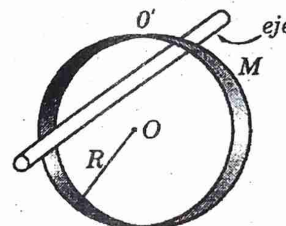
$$A = \frac{F_0/m}{(W_f^2 - W_0^2)\dfrac{(W_f^2 - W_0^2)}{\sqrt{(W_f^2 - W_0^2)^2 + 4\gamma^2 W_f^2}} + 2\gamma W_f \dfrac{2\gamma W_f}{\sqrt{(W_f^2 - W_0^2)^2 + 4\gamma^2 W_f^2}}}$$

$$A = \frac{F_0/m}{\dfrac{(W_f^2 - W_0^2)^2 + 4\gamma^2 W_f^2}{\sqrt{(W_f^2 - W_0^2)^2 + 4\gamma W_f^2}}}$$

$$A = \frac{(F_0/m)\sqrt{(W_f^2 - W_0^2)^2 + 4\gamma^2 W_f^2}}{(W_f^2 - W_0^2)^2 + 4\gamma^2 W_f^2} = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(W_f^2 - W_0^2)^2 + 4\gamma^2 W_f^2}} \quad \text{lqqd.}$$

(40) **Un anillo de radio R, está suspendido de un eje como se muestra en la figura. Hallar su período de oscilación.**

Solución:



La expresión del período es:

$$T = 2\pi\sqrt{I_{0'}/gbM}$$

Como se trata de un péndulo compuesto, su momento de Inercia : $I_{o'}$ se halla usando el Teorema de Steiner:

$$I_0' = Ma^2 + I_{CM} = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

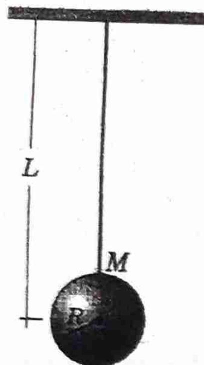
en el gráfico: $b = R$,

Luego:

$$T = 2\pi\sqrt{2MR^2/gRM} = 2\pi\sqrt{2R/g}$$

(41) Una esfera de radio R está suspendida desde un punto fijo por una cuerda, de modo que la distancia desde el centro de la esfera al punto de suspensión es L. Hallar el período del péndulo?

Solución:



Nuevamente se trata de un péndulo compuesto, su período es:

$$T = 2\pi\sqrt{Io'/gbM}$$

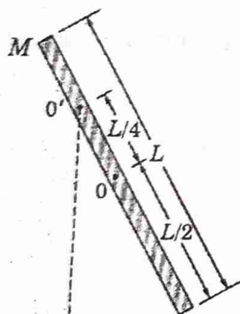
Usando nuevamente el Teorema de Steiner:

$$Io' = Ma^2 + I_0 = ML^2 + \tfrac{2}{5}MR^2 \quad y \quad b = L$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ML^2 + 2/5MR^2}{gLM}} = 2\pi\sqrt{\frac{L^2 + 2/5R^2}{gL}}$$

(42) Se tiene una varilla delgada de longitud L y masa m, que está suspendida libremente en posición vertical en un punto O' situado a una distancia L/4 de su centro de masa. La varilla se desplaza ligeramente a partir del equilibrio y se deja que oscile alrededor de un eje que pasa por O'. Halle el período del péndulo?

Solución:



Se trata de un péndulo compuesto, su período se hallar por teoría:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{0'}}{gbM}}$$

donde $I_{0'}$ se halla, usando el Teorema de Steiner:

$$I_0' = Ma^2 + I_0 \quad y \quad a = L/4$$

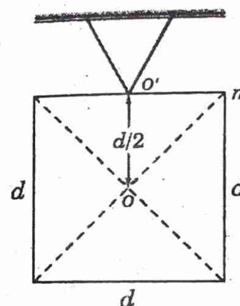
$$I_0' = M(L/4)^2 + \frac{ML^2}{12} = \frac{7}{48}ML^2 \quad y \quad b = L/4$$

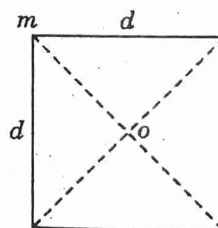
Luego: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{48}ML^2}{g\frac{L}{4}M}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7L}{12g}}$$

(43) Hallar el período de oscilación de la placa cuadrada de masa m que se muestra en la figura. La placa se encuentra suspendida del punto medio de uno de sus lados.

Solución:





Otro caso de péndulo compuesto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{0'}}{gbm}}$$

donde $I_{0'} = I_0 + ma^2$ por el teorema de Steiner:

$$I_0 = m/12(d^2 + d^2) = d^2/6$$

$$a = d/2 \quad y \quad b = d/2$$

$$I_{0'} = md^2/6 + m(d/2)^2 = 15/6\, md^2$$

reemplazando:

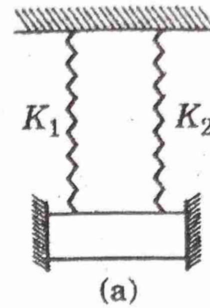
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5m\,d^2/12}{g(d/2)m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5d}{6g}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

01 Entre dos guías verticales puede desplazarse un bloque de 50kg se separa 5cm de su posición de equilibrio y se abandona luego a sí mismo.

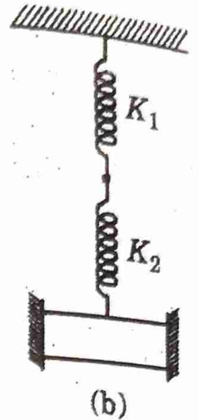
Hallar el período de vibración y la velocidad, máxima alcanzada por el bloque en los dos esquemas representados en la figura.



(a)

$K_1 = 4\,Kg/cm$

$K_2 = 6\,Kg/cm$

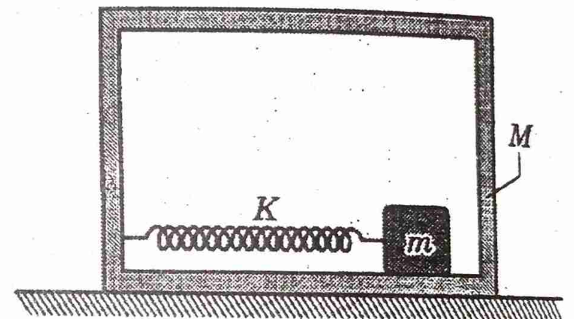


(b)

Rpta.: $T = 0{,}917$ seg.

$V_{máx} = 34{,}25$ cm/seg

02 Una caja de masa M está sobre una mesa horizontal. Determine la amplitud de las oscilaciones de m, para que la caja empiece a moverse por la masa. El coeficiente de razonamiento entre la caja y la mesa es μ. El bloque de masa m es liso.



Rpta.: $A \geq \mu \dfrac{Mg}{2k}$

03 Un sistema que vibra está formado por un peso 5 Kgf, un muelle cuya constante $K = 4Kg\,f/cm$ y un amortiguador cuya constante de amortiguamiento es 0.11 kg. seg/cm. Hallar (a) La frecuencia natural amortiguada (b) El decremento logarítmico (c) La razón entre dos amplitudes sucesivas cualesquiera.

Rpta.: a) $W = 25.8\ rad/s$ b) $D = 2.64$
c) $A_1/A_2 = 14$

04 Una pesa de 0.5 $kg\,f$ está colgada de un cordón de goma de 40 cm. de longitud y 1 mm. de radio. Hallar el período de las oscilaciones verticales de la pesa sabiendo que módulo de Young de esta goma es igual a $0.3\ Kg\,f/mm^2$.

Rpta.: $T = 0.093\ seg$

05 La amplitud de las vibraciones armónicas de un punto material es 2 cm y la energía total de las vibraciones $3\times10^{-7}\,J$. Cuál será la elongación del punto cuando la fuerza que actúa sobre él es $2.25\times10^{-5}\,N$

Rpta.: $X = 1.5\times10^{-2}\,m$

06 Un resorte tiene una constante de rigidez k y una masa m está colgada de él. El resorte se corta a la mitad y la misma masa cuelga de una de las mitades. ¿La frecuencia de la vibración es igual, antes y después de cortar el resorte? ¿Cómo están relacionadas esas frecuencias?

Rpta.: $\frac{f}{f'}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

07 En un oscilador amortiguado, posee una masa M es de 0.25kg y un resorte de cociente elástica igual a $25N/m$

a) ¿Para qué valor de la constante de proporcionalidad, el movimiento tendrá si amortiguamiento crítico?
b) ¿Cuál es la frecuencia de movimiento si el γ es igual a $0.5N-seg/kg-m$?
c) ¿Cuál es el decremento logarítmico?
d) Calcule la disminución relativa de la energía por c/ciclo.
e) Halle el factor de calidad el sistema.

Rpta.: a) $b=5\frac{N-S}{m}$ b) $\omega=9{,}98S^{-1}$ c) $\delta=0{,}314$
d) $\frac{1}{E}\frac{dE}{dt}=-1$ e) $Q=1{,}59$

08 De un muelle está colgado un platillo de balanza con pesas. El período de las oscilaciones verticales es igual a $0.5\,seg$. Después de poner en el platillo más pesas, el período de las oscilaciones verticales se hizo igual a 0.6 seg. Qué alargamiento provocaron en el muelle las pesas añadidas.

Rpta.: $\Delta X = 0.027\,m$

09 Un péndulo de 1.00m de longitud se suelta desde un ángulo inicial de $15.0°$. Después de 1 000s, debido a la fricción, su amplitud se ha reducido a $5.50°$. ¿Cuál es el valor de $b/2m$?

Rpta.: $\frac{b}{2m}=1.00\times10^{-3}\,s^{-1}$

10 Escribir la ecuación del movimiento resultante de la composición de dos movimientos vibratorios armónicos que tienen la misma dirección, período y amplitud. El período de 8 *seg* y la amplitud 0.02 *m*. La diferencia de fase entre estas vibraciones es igual a $\pi/4$. La fase inicial de una de las vibraciones es igual a cero.

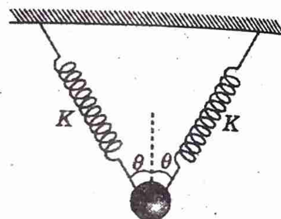
Rpta.: $X = 0.037\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{8}\right)m$

11 Demostrar que en el movimiento oscilatorio amortiguamiento la velocidad está dado por: $v = A'e^{-\gamma t}\,\text{sen}(wt + \alpha + \delta)$

donde: $A' = AWo$

$tg\,\delta = -W/\gamma$

12 La figura muestra a una pequeña esfera sujeta a 2 resortes idénticos. Determine el período de las pequeñas oscilaciones del sistema: desprecie los efectos gravitatorios.

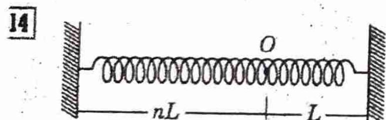


Rpta.: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

13 ¿A qué es igual el decremento logarítmico de la amortiguación de un péndulo matemático si la amplitud de su oscilación se hace dos veces menor en 1 min.? El péndulo tiene 1 m de longitud.

Rpta.: $D = 0.023$

14



Un resorte de constante de rigidez k, se encuentra entre dos paredes tal como muestra la figura. En el punto 0 se corta el resorte y se sujeta un bloque de masa m. Determine el período de las pequeñas oscilaciones, sobre una superficie horizontal lisa.

Rpta.: $T = \frac{2\pi}{n}\sqrt{\frac{m}{k+1}}$

15 Un punto participa en dos vibraciones de igual período y fase inicial. La amplitud de estas vibraciones son 3 cm. y 4 cm. Hallar la vibración resultante si: (a) Las dos vibraciones tienen la misma dirección y (b) las dos vibraciones son perpendiculares entre sí.

Rpta.: a) $X = 7\,\text{sen}(wt + \alpha_1)$

b) $X = 5\,\text{sen}(wt + \alpha_1)$

16 Un peso está colgado de un muelle. Hallar el coeficiente de deformación de este muelle sabiendo que la energía cinética máxima de las oscilaciones del peso es igual a 1 J. La amplitud de las oscilaciones es 5 cm.

Rpta.: $K = 800\ N/m$

17 Un punto participa simultáneamente en las dos vibraciones perpendiculares entre sí: $X = \cos\pi t$ e $Y = \cos\pi\, t/2$. Hallar la trayectoria del movimiento resultante del punto.

Rpta.: a) $X = 2y^2 - 1$

18 Un bloque de masa desconocida se une a un resorte de constante igual a $65N/m$ y experimenta un **M.A.S.** con una amplitud igual a 10.0cm. Cuándo la masa está a la mitad de camino entre su posición de equilibrio y el punto extremo. Se mide su velocidad y se encuentra un valor igual a $+30.0cm/s$. Calcule:

a) La masa del bloque.
b) El período del movimiento.
c) La aceleración máxima del bloque.

Rpta.: a) $m = 0{,}542\text{kg}$

b) $T = 1{,}814\text{seg}$

c) $\vec{a}_{máx} = 1{,}2\ \text{m/s}^2$

19 Un cuerpo de masa $10\,g$ realiza oscilaciones amortiguadas con amplitud máxima de 7 *cm.*, fase inicial igual a cero y coeficiente de amortiguamiento igual a $1.6\ seg^{-1}$. Sobre este cuerpo comienza a actuar una fuerza periódica exterior que hace que las oscilaciones sean forzadas. La ecuación de estas oscilaciones forzadas tiene la forma $X = 5\,sen(10\pi t - 0.75\pi)\ cm$. Hallar: (a) La ecuación de las oscilaciones propias (b) La ecuación de la fuerza periódica exterior.

Rpta.: a) $X = 7e^{-1.6t}\text{sen}10.5\,\pi t$

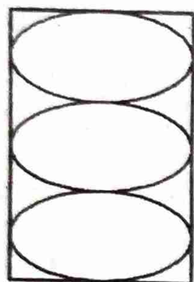
b) $F = 7.2\times10^{-2}\,\text{sen}10\,\pi t$

20 La amplitud de las oscilaciones amortiguadas de un péndulo matemático se hace dos veces menor en 1 min. Cuántas veces menor se hará en 3 minutos

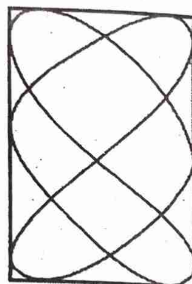
Rpta.: 8 veces

21 Hallar la ecuación de la trayectoria del movimiento resultante de la superposición de dos movimientos armónicos simples perpendiculares, si

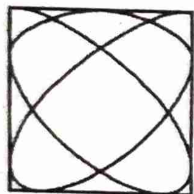
a) $W_2/W_1 = 1/3$, $\delta = \pi/2$



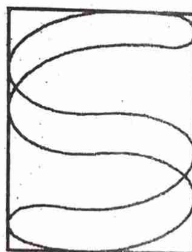
b) $W_2/W_1 = 2/3$, $\delta = 3\pi/4$



c) $W_2/W_1 = 4/5$, $\delta = \pi$



d) $W_2/W_1 = 1/3$, $\delta = \pi/4$



22 Una partícula realiza un **MAS** alrededor del origen, $x = A\cos(wt+\phi)$. Sabiendo que en $t=0$, $x(0)=x_0$ y $\dot{x}(0)=v_0$, obtener la amplitud del movimiento y la fase inicial en función de x_0 y v_0.

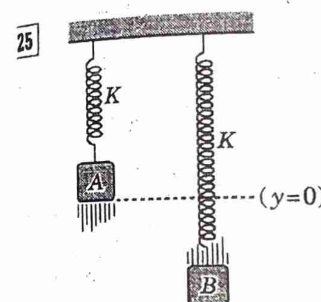
Rpta.: $A=\sqrt{x_0^2+\dot{x}_0^2/w^2}$; $\phi = \text{tg}^{-1}(-\dot{x}_0/wx_0)$

23 Un punto vibra armónicamente. El período de las vibraciones es de 2 seg., la amplitud de 50 mm. y la fase inicial igual a cero. Hallar la velocidad del punto en el momento en que la elongación es igual a 25 mm.

Rpta.: $v = 136$ mm/s.

24 Un péndulo matemático realiza oscilaciones amortiguadas cuyo decremento logarítmico de amortiguación es igual a 0.2. ¿Cuántas veces disminuirá la aceleración total de este péndulo en su posición extrema durante una oscilación.

Rpta.: 1.22 veces

25 

Dos bloques A y B de masas iguales oscilan con igual amplitud A. Después de transcurrido un tiempo t, cuando A está en $\vec{y}=\frac{A}{2}$ (subiendo), la posición de B es $\vec{y}=-\frac{\sqrt{3}A}{2}$ (bajando). El ángulo de fase de B con respecto a A, es entonces:

Rpta.: $\theta = \frac{\pi}{6}$

26 Una partícula ejecuta un movimiento armónico simple con una amplitud de 3.00 cm. ¿A qué desplazamiento desde el punto medio de su movimiento su rapidez es igual a la mitad de su rapidez máxima?

Rpta.: 2,60 cm y –2,60 cm

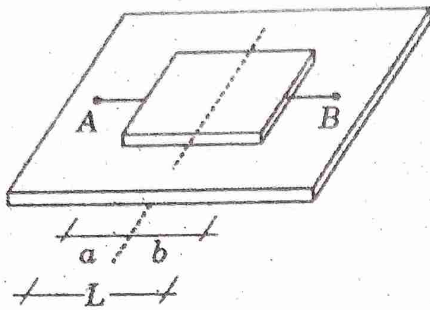
27 Una partícula de masa m se mueve a lo largo del eje X bajo la acción de la fuerza $F=-KX$. Cuando $t=2$ *seg*, la partícula pasa a través del origen y cuando $t=4$ seg. su velocidad es 4 m/s. Hallar la ecuación de la elongación y demostrar que la amplitud del movimiento será $32\sqrt{2/\pi}$ si el período de oscilación es de 16 seg.

Rpta.: a) $X=\frac{32\sqrt{2}}{\pi}\text{sen}\frac{\pi\tau}{8}$

28 Resuélvase el problema anterior considerando la masa del platillo igual a M. Hallar la amplitud de las oscilaciones en este caso.

Rpta.: $A=(mg/k)\sqrt{1+2hk/(m+M)g}$

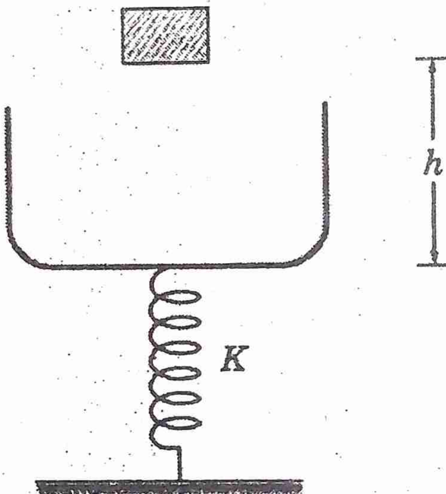
29



Un pequeño peso W, unido a un hilo tenso, descansa sobre una superficie horizontal pulida, sea T la tensión soportada por dicho hilo. Calcular el período y la frecuencia para las pequeñas oscilaciones del peso en dirección perpendicular al hilo.

Rpta.: $t = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{TgL}{Wab}}$

30 Un cuerpo de masa m cayó a uno de los platillos de una balanza de resorte desde una altura h.



Las masas del platillo y el resorte son despreciables, la rigidez del último es K. El cuerpo se adhiere al platillo y comienza a oscilar armónicamente en dirección vertical. Hallar la amplitud de estas oscilaciones y su energía.

Rpta.: $A = (mg/k)\sqrt{1 + 2hk/mg}$

$E = mgh + m^2g^2/2k$

31 Un Péndulo físico en la forma de un cuerpo plano efectúa un movimiento armónico simple con una frecuencia de $0.450\,Hz$. Si el péndulo tiene una masa de 2.20kg y pivote se localiza a 0.350m del centro de masa, determine el momento de inercia del péndulo.

Rpta.: $I = 0{,}944\text{kg m}^2$

32 Una masa de 0.20 kg se mueve en el extremo de un resorte con $k = 400N/m$. Su desplazamiento inicial es de 0.300m. Una fuerza amortiguadora $F = -bv$ actúa sobre la masa y la amplitud del movimiento disminuye a 0.100m en 5.00 seg. Calcule:

a) La constante de proporcionalidad.
b) La frecuencia del movimiento.
c) ¿El oscilador será: sub; sobre o críticamente amortiguado.

Rpta.:

a) $b = 0{,}087\ N - S/m$

b) $\omega = 44{,}7\ \text{seg}^{-1}$

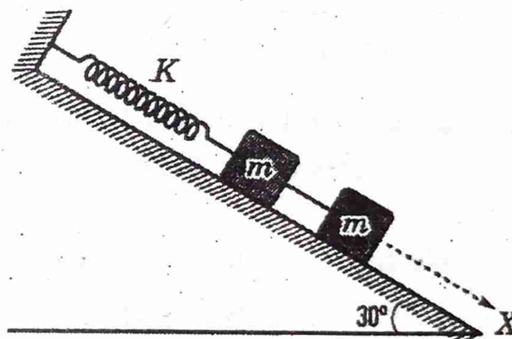
c) $\omega > \delta$ sub-amortiguado

33 El movimiento de una partícula está regido por la ecuación $X = 5\,\text{sen}\,2t + 4\cos 2t$ donde X se expresa en metros y t en segundos. Hallar:

a) El periodo del movimiento.
b) La amplitud de movimiento.
c) El ángulo de fase.

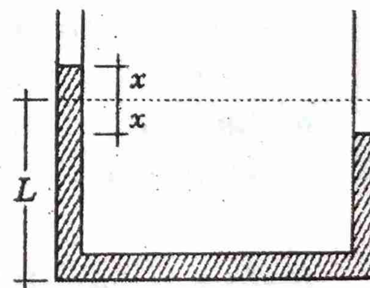
Rpta.: a) π seg b) $\sqrt{41}m$
c) $\phi = 38{,}66°$

34 El sistema mostrado reposa sobre el plano inclinado liso, donde $m = 1kg$ y $K = 25N/m$. En cierto instante cortamos el cable que une a ambos bloques, determine la ecuación de movimiento del bloque oscilante.



Rpta.: $x = 0{,}2\text{sen}(5t)m$

35 Despreciando el razonamiento del fluido, determinar la frecuencia de oscilaciones del líquido en el manómetro en U representado la figura.

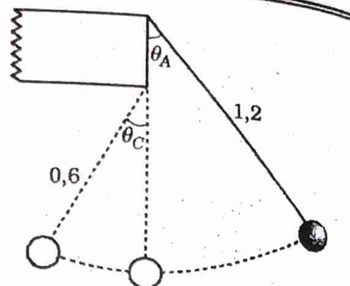


Rpta.: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{L}}$

36 El amortiguamiento es despreciable para una masa de $0{,}150kg$ colgada de un resorte ligero de $6.30N/m$. El sistema es impulsado por una fuerza oscilante con una amplitud de $1.70N$. ¿A qué frecuencia la fuerza hará vibrar la masa con una amplitud de $0.440m$?

Rpta.: $f = 1{,}31$ Hz ó $f = 0{,}641$ Hz

37 Se suelta una esfera unida a un hilo inextensible de 1.20m de longitud. Cuando $\theta = 5°$ sabiendo .



Calcular:

a) El tiempo empleado en volver el sistema a su posición.

Rpta.: $t = 1{,}88$ seg

38 Un bloque de 1.50 kg en reposo sobre una mesa se une a un resorte horizontal con una constante de fuerza de $19.6 N/m$. Al principio el resorte no está extendido. Se aplica una fuerza constante horizontal de $20.0\ N$ al objeto causando que el resorte se extienda:

a) Determine la rapidez del bloque después de que se ha movido 0.300m a partir del equilibrio si la superficie entre el bloque y la mesa no presenta fricción.

b) Conteste el inciso a) si el coeficiente de fricción crítica entre el bloque y la mesa es de 0.200.

***Rpta.:** a) 2,61 m/s c) 12,2 m J
b) 1,02 m/s d) 15,8 m J

39 Un péndulo simple tiene una masa de 0.250kg y una longitud de 1.00m. Se desplaza por un ángulo de 15.0° y después se suelta. ¿Cuáles son?
a) La rapidez máxima.
b) La aceleración angular máxima y
c) La fuerza restauradora máxima

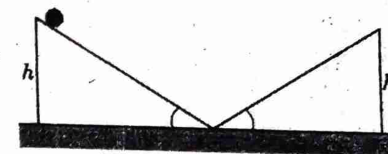
Rpta.: a) 0,817 m/s b) 2,54 rad/s^2
c) 0,63 N

40 Un auto con amortiguadores en mal estado rebota hacia arriba y hacia abajo con un período de $1.50s$ después de golpear un bache. El carro tiene masa de 1 500 kg y es soportado por cuatro resortes cuyas constantes de fuerza k son iguales. Determine el valor de k.

Rpta.: $k = 6{,}58 kN/m$

41 Una partícula se coloca en reposo a una altura h sobre uno de los planos inclinados de semiángulo α y se deja en libertad desde el reposo (ver figura). Sabiendo que no existe rozamiento, se pide:

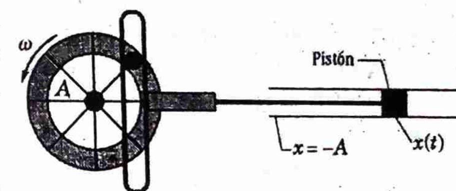
a) Demostrar que el movimiento de la partícula es periódico, y determinar el valor del periodo.



b) ¿Es armónico simple?

Rpta.: a) $T = (4/\text{sen}\,\alpha)\sqrt{2h/g}$

42 En la figura, si la rueda gira a una rapidez angular constante explique por qué la barra del pistón oscila en un movimiento armónico simple.



Rpta.: La coordenada x del perno de la llave de tuercas es $A\cos\omega t$

43 Una bebé se regocija durante el día cantando y saltando en su cuna. Su masa es de 12.5kg y el colchón de la cuna puede modelarse como un resorte ligero con una constante de fuerza de $4.30 kN/m$.

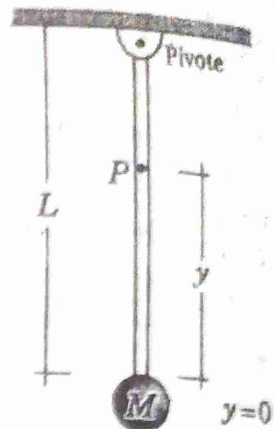
a) La bebé aprende pronto a rebotar con máxima amplitud y mínimo esfuerzo al doblar sus rodillas, ¿cuál es la frecuencia del rebote?

b) Aprende a usar el colchón como trampolín –perdiendo contacto con él durante parte de cada ciclo– cuando su amplitud excede, ¿qué valor?

Rpta.: a) 2,95 Hz b) 2,85m

44 La masa de la molécula de deuterio (D_2) es el doble de la molécula del hidrógeno (H_2). Si la frecuencia de H_2 es 1.30×10^{14} Hz , ¿cuál es la frecuencia de vibración de D_2, suponiendo que la "constante de resorte" de las fuerzas atractivas es la misma para las dos moléculas?

Rpta.: $f = 9{,}19\times10^{13}$ Hz



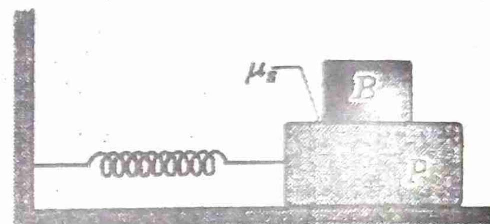
45 Una masa compacta M está unida al extremo de una barra uniforme de masa M y longitud L que está articulada en su parte superior

a) Determine las tentaciones en la barra en el pivote y en el punto p cuando el sistema está estacionario.

b) Calcule el período de oscilación para desplazamientos pequeños desde la posición de equilibrio y determine este período en el caso de $L = 2.00m$.

Rpta.: a) $2Mg$, $Mg\left(1+\frac{y}{L}\right)$ b) $T=\left(\frac{4\pi}{3}\right)\left(\frac{2L}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$ c) 2,68 seg

46 Un gran bloque P ejecuta un movimiento armónico simple horizontal deslizándose sobre una superficie sin fricción con una frecuencia $f = 1.50$ Hz . Un bloque B descansa sobre él, como se ilustra en la figura y el coeficiente de fricción estática entre los dos es $\mu_s = 0.600$ ¿Qué amplitud máxima de oscilación puede tener el sistema si el bloque B no se desliza?



Rpta.: $A = 6,62$ cm

47 Un extremo de un resorte ligero con constante de fuerza de 100N/m está unido a una pared vertical. Una cuerda ligera está atada al otro extremo del resorte horizontal. La cuerda cambia de horizontal a vertical cuando pasa sobre una polea sólida de 4.00cm de diámetro que es libre de girar sobre un eje suave fijo. La sección vertical de la cuerda soporta una masa de 200g. La cuerda no se desliza en su contacto con la polea. Encuentre la frecuencia de oscilaciones de la masa si la masa de la polea es:

a) Despreciable b) De 250g c) De 750g

Rpta.: a) 3,56Hz b) 2,79Hz c) 25,5°

48 Un recipiente cúbico ligero de volumen a^3 al principio está lleno de un líquido de densidad de masa p. El cubo está soportando inicialmente por una cuerda ligera y forma un péndulo de longitud L_i medida desde el centro de masa del recipiente lleno. Se deja que el líquido fluya desde el fondo del recipiente a

una velocidad constante (dM/dt). En cualquier tiempo t el nivel del fluido en el recipiente es h y la longitud del péndulo es L (medida en relación con el centro de masa instantáneo).

a) Dibuje el aparato y denote las dimensiones a, h, L_i y L.

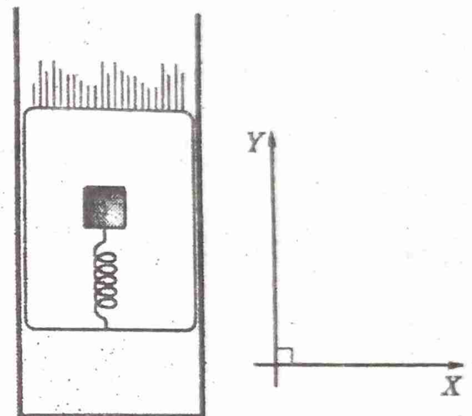
b) Encuentre la rapidez de cambio con el tiempo del período como una función del tiempo t.

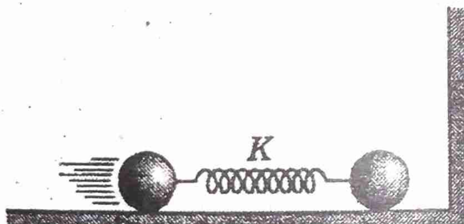
c) Estime el período como función del tiempo.

Rpta.: b) $\dfrac{dT}{dt}=\dfrac{\pi\left(\frac{dM}{dt}\right)}{2\rho a^2 g^{\frac{1}{2}}\left[L_i+\left(\frac{dM}{dt}\right)\frac{t}{2\rho a^2}\right]^{\frac{1}{2}}}$ c) $T=2\pi g^{-\frac{1}{2}}\left[L_i+\left(\frac{dM}{dt}\right)\frac{t}{2\rho a^2}\right]^{\frac{1}{2}}$

49 El recipiente de madera contiene un bloque conectado a un resorte, el cual está comprimido 40 cm. El conjunto desciende con una rapidez constante de 1,5 m/s y de pronto se incrusta en el clavo mostrado. ¿Cuál será la ecuación del movimiento del bloque después del impacto? ($g=10\ \text{m/s}^2$)

Rpta.: $y=0{,}3\text{sen}(5t+\pi)$



50 

Dos bolas lisas de masas m unidas por un resorte de rigidez k y sin deformación, se mueven horizontalmente hacia una pared vertical.

Después del choque elástico, determine el período de oscilación que adquiere el sistema y cuántas veces impacta en total sobre la pared

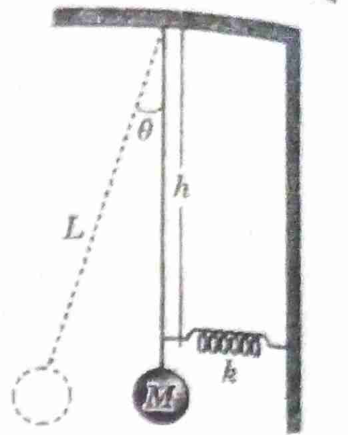
Rpta.: $T=\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$ 2 veces impacta.

51 A un péndulo simple que tiene una longitud de 2.23 m y una masa de 6.74 kg se le da una rapidez inicial de 2.06 m/s en su posición de equilibrio. Suponga que experimenta un movimiento armónico simple y determine:

a) Su período b) Su energía c) Su máximo desplazamiento angular

Rpta.: a) 3,00 s b) 14,3 J c) 25,5°

52 Un péndulo de longitud L y masa M tiene un resorte de constante de fuerza k conectado a él a una distancia h debajo de su punto de suspensión. Encuentre la frecuencia de vibración del sistema para valores pequeños de la amplitud (θ pequeña). Suponga que la suspensión vertical de longitud L es rígida, pero ignore su masa).



Rpta.: $f = \dfrac{\left(gL + \frac{kh^2}{M}\right)^{1/2}}{2\pi L}$

53 (a) Calcúlese el período de oscilación de un péndulo de longitud 98.1 cm. en el aire, despreciando el rozamiento. Sea la amplitud 1 cm. es decir, pequeña frente a L. (b) En que tanto por ciento se altera el período cuando el péndulo se sumerge en glicerina en donde experimenta una fuerza de fricción $F = -0.2(kg/seg)\upsilon$.

La masa del péndulo es 50 g.

Rpta.: $\Delta T/T_0 = 0.28$

CAPÍTULO III

MOVIMIENTO ONDULATORIO

ONDAS MECÁNICAS

Se debe entender como medio elástico aquellos que son deformables. Cuando se estudia las ondas en estos medios lo llamamos ondas mecánicas. Las ondas son perturbaciones que se propagan a través del medio.

a) **Medio Físico Homogéneo**.- Cuando se considera pequeños e iguales porciones de volúmenes del medio en cualquier punto y sus propiedades físicas son idénticas.

b) **Medio Isótropo**.- Cuando sus propiedades físicas son las mismas en todas las direcciones.

c) **Movimiento Ondulatorio**.- Son perturbaciones que se producen en un punto del espacio y que se propagan a través del medio.

En un movimiento ondulatorio se propaga energía y momentum.

La luz no necesita de un medio para propagarse, debido a que es una onda electromagnética. Las ondas luminosas no son ondas mecánicas, porque la perturbación que se mueve no es materia, sino un campo electromagnético.

TIPOS DE ONDA

a) De acuerdo con sus propiedades físicas: se clasifica ondas en el agua, luminosas y sonoras.

b) De acuerdo a la relación de la dirección de la propagación y de la perturbación.

   b.1) **Ondas transversales**: Si el movimiento de las partículas del medio oscilan perpendicularmente a la dirección de propagación.
   Ejemplo: Figura 91.

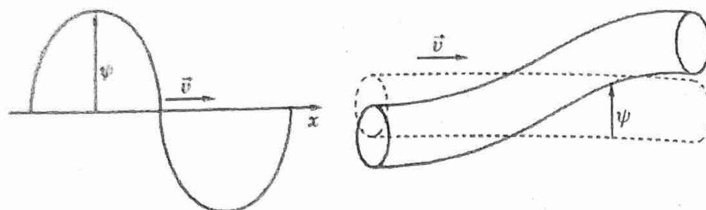


Fig. 91 *Ondas transversales*

b.2) **Ondas longitudinales:** Si el movimiento de las partículas del medio oscilan paralelamente a la dirección de propagación.
Ejemplo: Figura 92.

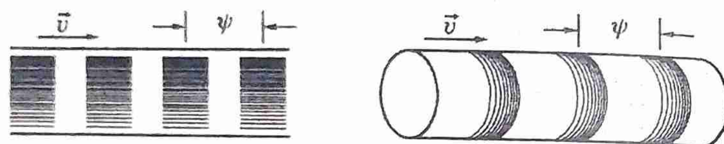


Fig. 92 *Ondas longitudinales*

b.3) **Ondas Torsionales**: Producidas por un par o momento de Torsión. No son paralelos o perpendiculares al eje de la barra, sino a rotaciones alrededor del eje de la barra.
Ejemplo: Figura 93.

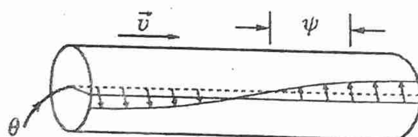


Fig. 93 *Ondas torcionales*

b.4) **Ondas circulares**: Cuando la perturbación se produce en un punto de la superficie y esta se propaga en todas las direcciones con la misma velocidad.

c) De acuerdo con el número de dimensiones en que se propagan.

c.1) **Unidimensionales**: Son aquellas que se mueven a lo largo de una longitud. Ejemplo: Cuerda y resorte.

c.2) **Bidimensionales**: Las ondas que se mueven sobre una superficie, las ondas o rizos en el agua.

c.3) **Tridimensionales**: Las ondas que se mueven en el espacio, las ondas sonoras, luminosas.

d) De acuerdo con el comportamiento de una partícula de la materia.

d.1) **Impulso o una sola onda:** Cuando se aplica un solo movimiento lateral en su extremo de la cuerda y esta onda se propaga y después la cuerda permanece en reposo.

d.2) **Tren de ondas:** En este caso se produce cuando se aplica varios movimientos continuos en el extremo de la cuerda, en un sentido y en el opuesto.

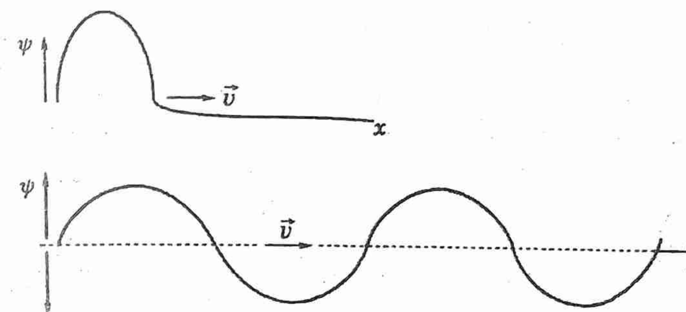


Fig. 94 *Impulso y tren de ondas.*

FRENTE DE ONDAS O SUPERFÍCIE DE ONDA

Un frente de Onda es una superficie que pasa por todos los puntos del medio alcanzados por el movimiento ondulatorio al mismo instante; luego la perturbación en todos los puntos de una superficie de onda tienen la misma fase.

Cuando el medio es homogéneo e isotrópico, la dirección de propagación es siempre perpendicular al frente de Onda. Una línea que es normal al frente de onda se llama RAYO. Los frentes de onda pueden ser:

a) **Ondas Planas**: Si las perturbaciones se propagan en una sola dirección. Los frentes de onda son planos y los rayos son líneas rectas planas. Figura 95.

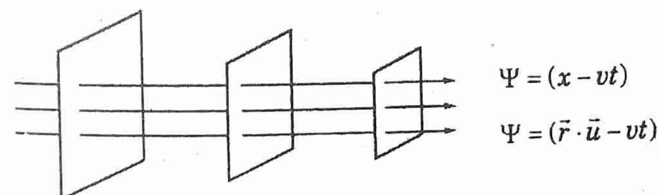


Fig. 95 *Ondas planas*

b) **Ondas Esféricas**: La perturbación se propaga alejándose en todas las direcciones (radialmente) de la fuente. Los frentes de onda son esferas y los rayos son líneas radiales.

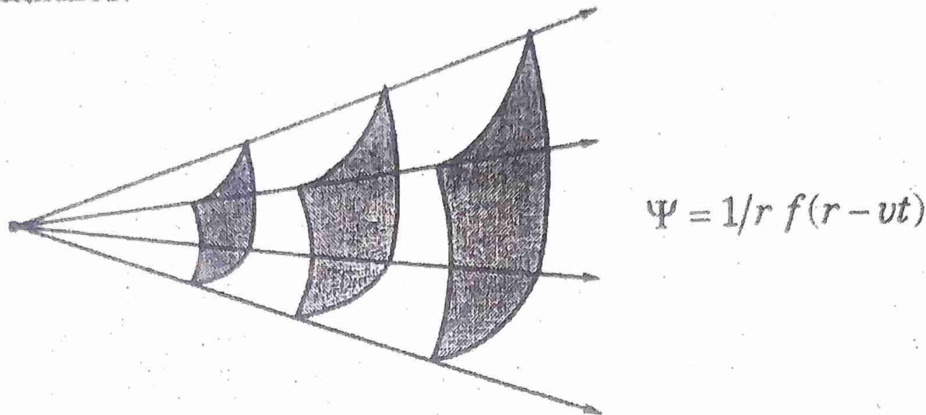


Fig. 96 *Ondas esféricas*

ECUACIÓN DIFERENCIAL DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

Cada perturbación (Ψ) está asociada [illegible]
por leyes dinámicas [illegible]
renciales. Luego [illegible]
cual entonces podemos [illegible]
definida que depende [illegible]

Tal ecuación diferencial del movimiento [illegible] dirección [illegible]

Su solución es: $\Psi = f(y \pm vt)$

Haciendo el cambio $\mu = y \pm vt$ y usando la regla de la cadena, se tiene, para y:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{d\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{d\mu}\text{, donde } \frac{\partial \mu}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{d}{d\mu}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d}{d\mu}\frac{\partial \Psi}{d\mu} = \frac{d^2 \Psi}{d\mu^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Con respecto a t: $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{d\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{d\mu}(\pm v)$. donde $\frac{\partial \mu}{\partial t} = \pm v$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{d}{d\mu}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{d}{d\mu}\left[\frac{d\Psi}{d\mu}(\pm v)\right](\pm v)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 \Psi}{d\mu^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

De (α) y (β): $\boxed{\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}}$ .... (γ)

VELOCIDAD DE GRUPO

La velocidad $v_f = w/k$ para una onda armónica de frecuencia angular W y longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$ se llama velocidad de fase, donde k es el número de onda.

Una onda de este tipo no sirve para transmitir una señal, es necesario que tenga inicio y fin, para ello es necesario una onda llamada PULSO, según figura 97.

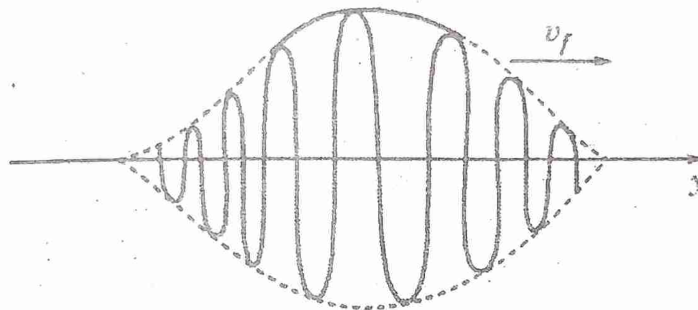


Fig. 97 *Pulso*

Como esta onda no es armónica, su velocidad de propagación no es la velocidad de fase, sino otra velocidad llamada de grupo y para deducirla, es necesario hacer un análisis de FOURIER.

Supongamos que la onda está constituida de dos frecuencias W y W' casi iguales y de igual amplitud Ψ_0, la superposición de estos movimientos da:

$$\Psi = \Psi_0 \operatorname{sen}(Ky - Wt) + \Psi_0 \operatorname{sen}(K'y - W't)$$

$$\Psi = \Psi_0[\operatorname{sen}(Ky - Wt) + \operatorname{sen}(K'y - W't)]$$

$$\Psi = 2\Psi_0 \cos \frac{[(K'-K)y-(W'-W)t]}{2} \operatorname{sen} \frac{[(K'+K)y-(W'+W)t]}{2}$$

Como $\quad W \sim W', \; K \sim K'$.

$$1/2(W + W') \sim W \quad , \quad 1/2(K + K') \sim K$$

$$\Psi = \underbrace{2\Psi_0 \cos 1/2[(K'-K)y-(W'-W)t]}_{\text{AMPLITUD}} \operatorname{sen}(Ky - Wt)$$

La amplitud está modulada y el movimiento se propaga a una velocidad de grupo; que se define así:

$$\upsilon_g = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{W' - W}{K' - K} = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta K} = \frac{dW}{dK}$$

como $W = K\upsilon_f$, υ_f = velocidad de fase

luego: $\upsilon_g = \frac{d}{dk}(K\upsilon_f) = \upsilon_f + K\frac{d\upsilon_f}{dk}$

υ_g = velocidad de grupo

Para un medio no dispersivo, es decir la velocidad de fase es independiente de la longitud de onda:

$$\frac{d\upsilon_f}{dk} = 0 \quad , \text{ luego: } \upsilon_f = \upsilon_g$$

Como ejemplo, trabajaremos con algunas ondas que se propagan en medios elásticos.

ONDAS TRANSVERSALES EN UNA CUERDA

Sea una cuerda de longitud L, de extremo a extremo que va oscilar. Además se halla μ que es el cociente de dividir la masa de la cuerda entre su longitud y T la tensión que se aplica en uno de los extremos de la cuerda, se va hallar la velocidad de propagación de la onda ..., figura 98.

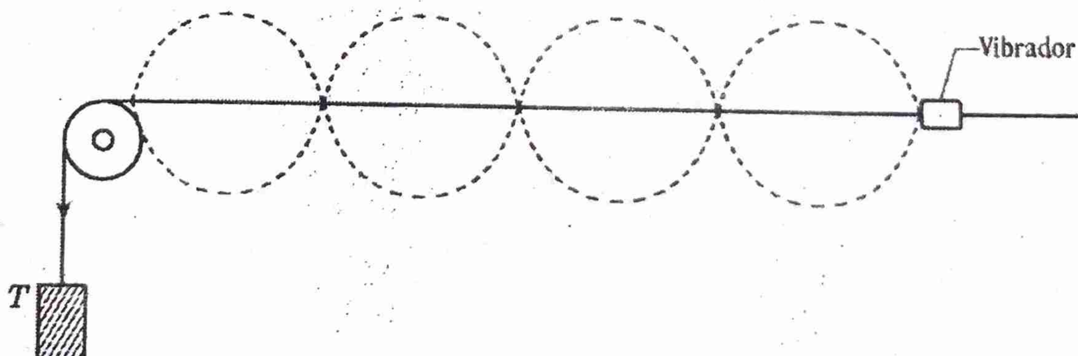


Fig. 98 *Experimento de Melde*

Tomemos una porción de longitud $\widehat{PQ}$ de la cuerda y veamos que fuerzas actúan verticalmente, según figura 99.

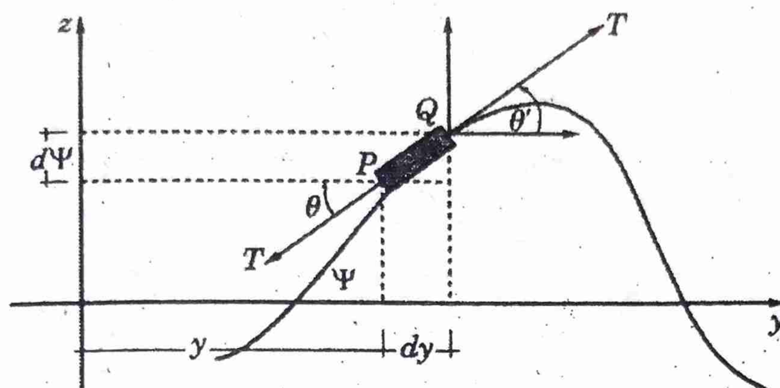


Fig. 99 *Fuerzas que actúan en la cuerda*

Como la cuerda se desplaza verticalmente se tiene: $\Sigma F_z = dm\, a_z$

$$T\,\text{sen}\,\theta - T\,\text{sen}\,\theta' = (\mu\, dy)\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

Por aproximación: $\text{sen} \cong \text{tg}\,\theta\,,\ \text{sen}\,\theta' \cong \text{tg}\,\theta'$

$$T(\text{tg}\,\theta - \text{tg}\,\theta') = T\,d(\text{tg}\,\theta) = T\,\tfrac{\partial}{\partial y}(\text{tg}\,\theta)dy$$

Pero: $\text{tg}\,\theta = \frac{\partial\psi}{\partial y}$

Luego: $T\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)dy = (\mu\, dy)\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$

$$T\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\,dy = \mu\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\,dy$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} \quad \text{y} \quad \upsilon = \sqrt{T/\mu}$$

Por comparación con la expresión (γ) se puede demostrar Mc. Kelvey, pág. 113, que la energía cinética media de la cuerda es: $\overline{K}_c = 1/4\,\mu w^2 \Psi_o^2 \Delta y$

Su energía potencial media es: $\overline{E} = \overline{K}c + \overline{U}p = 1/2\,\mu w^2 \Psi_o^2\,\Delta y$

Más adelante estudiaremos las ondas estacionarias en una cuerda.

ONDAS LONGITUDINALES EN UNA BARRA

Sea una barra maciza de sección A, de densidad δ y módulo de Young E; sobre la que actúa una fuerza T a lo largo del eje Y, tal como se indica en la figura 100.

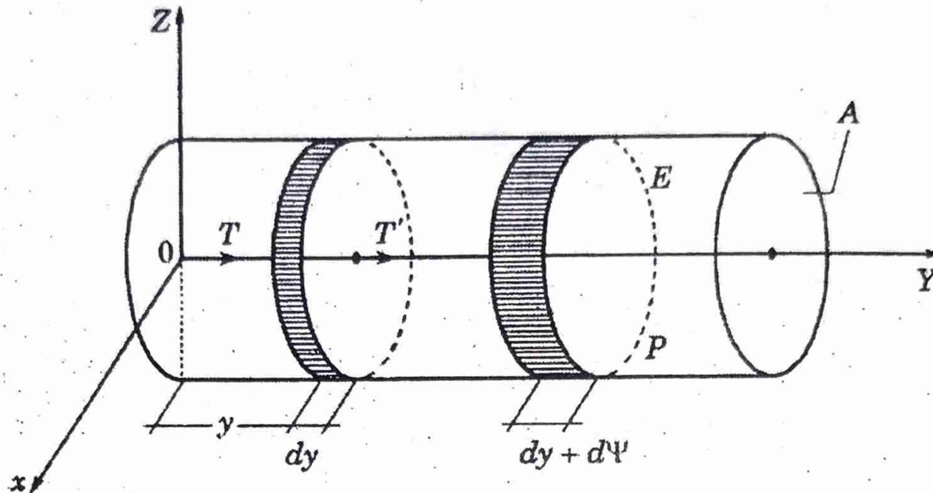


Fig. 100 *Ondas longitudinales en una barra*

Se vio en el capítulo de elasticidad, la definición del módulo de Young: E

$$E = \sigma/\Delta = (T/A)/(\partial\Psi/\partial y)$$

$$T = AE\frac{\partial\Psi}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial y} = AE\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)$$

Luego: $\dfrac{\partial T}{\partial y} = AE\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}$ .... (1)

Como la deformación es longitudinal, entonces la fuerza neta $T - T'$ es diferente de cero y se tiene:

$dT = T - T'$ ó $dT = \dfrac{\partial T}{\partial y}dy$ .... (2)

De la segunda ley de Newton: $dT = dm\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$ .... (3)

De (1) y (2) en (3): $\left(\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)dy = \text{dm}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \rho\, Ady\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$

$$\left(AE\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)dy = \rho A\partial y\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} \quad , \quad \therefore\ \upsilon = \sqrt{E/\rho}$$

ONDAS LONGITUDINALES DE PRESIÓN EN UNA COLUMNA DE GAS ENCERRADA

Sea un cilindro de sección S, que contiene un gas de densidad ρ_0, que tiene K: módulo de elasticidad de volumen y se aplica una presión al gas, el cual no es la misma para toda la sección y produce una perturbación a lo largo del eje Z, tal como se indica en la figura 101. Estas ondas se llaman Ondas de presión.

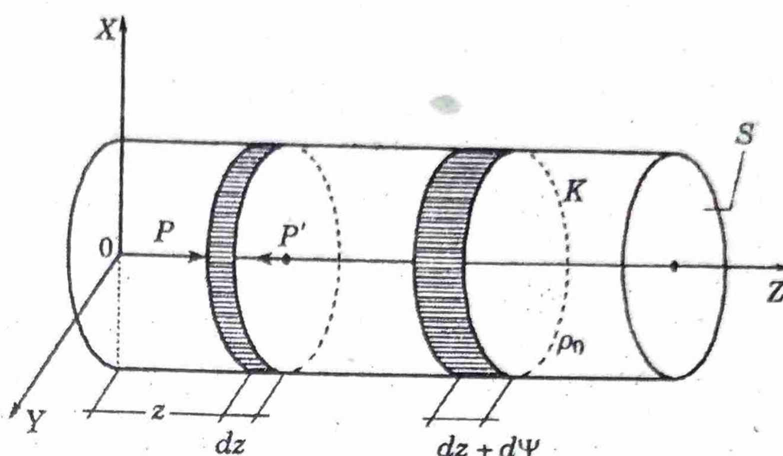


Fig. 101 *Ondas en una columna de gas.*

Se demuestra (ver bibliografía): $\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \dfrac{K}{\rho_0}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2}$, $\upsilon = \sqrt{\dfrac{K}{\rho_0}}$ ó $\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \dfrac{K}{\rho_0}\dfrac{\partial^2 p}{\partial Z^2}$

Estas ondas se llaman ondas de presión.

ONDAS ESTACIONARIAS

Se produce debido a la superposición de dos ondas que se propagan en sentido contrario.

Para la experiencia de Melde, mencionada en Ondas transversales en una cuerda, se tiene la figura 102.

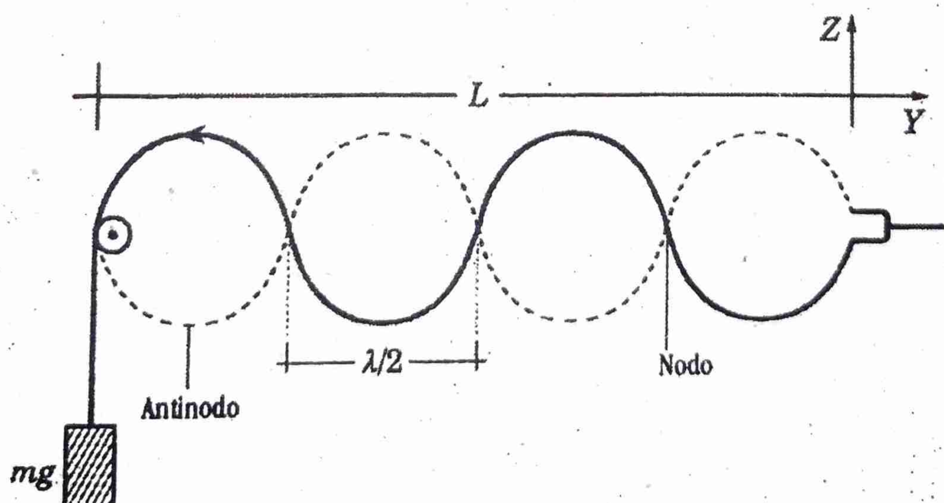


Fig. 102 *Ondas estacionarias*

Sean dos ondas que avanzan en sentidos opuestos, de igual amplitud, frecuencia y velocidad y sus ecuaciones son:

$$\Psi_1 = \Psi_0 \operatorname{sen}(Ky - wt)$$

$$\Psi_2 = \Psi_0 \operatorname{sen}(Ky + wt)$$

Al suponer: $\Psi_0[\operatorname{sen}(Ky - wt) + \Psi_0 \operatorname{sen}(Ky + wt)] = \Psi_1 + \Psi_2$

$$\Psi = 2\Psi_0 \operatorname{sen} Ky \cos wt$$

Luego cada partícula ejecuta un MAS y la amplitud es un máximo cuando:

$$\operatorname{sen} Ky = 1 \ , \ Ky = (2n+1)\,\pi/2 \ , \ n: 0,1,2\ldots$$

como: $K = 2\pi/\lambda$, $y = (2n+1)\,\lambda/4$ estos puntos son los antinodos.

La amplitud tendrá un mínimo, cuando $\operatorname{sen} Ky = 0$, $Ky = n\pi$, $n: 0,1,2,3$
$y = n\,\lambda/2$ estos puntos son los nodos.

Cuando $y = L$, se tiene un nodo y $Ky = n\pi$, $KL = n\pi$

$$\frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \quad , \quad \lambda = 2L/n$$

y sabemos $\upsilon = \sqrt{T/u}$, $\upsilon = \lambda\nu$, $\nu = \upsilon/\lambda$, $\nu = n\left(\sqrt{T/\mu}/2L\right)$

Para $n = 1$; $\nu_1 = (\sqrt{T/\mu})/2L$: frecuencia fundamental

RESONANCIA

Cuando sobre un sistema que oscila, actúa una serie de impulsos periódicos que posean una frecuencia igual o próximo a una de las frecuencias naturales de oscilación del sistema, el sistema oscilará con una amplitud grande.

REFUERZO

Cuando en un punto determinado del espacio se superponen el sonido directo, el reflejado y con retraso los originados por resonancia y produce en ese punto una elevación de la intensidad del sonido.

REVERBERACIÓN

Cuando en un punto del espacio se superponen los elementos sonoros anteriormente mencionados, pero espaciados en el tiempo, entonces se produce una superposición confusa.

POTENCIA EN EL MOVIMIENTO ONDULATORIO

Sabemos que en un movimiento ondulatorio, se transmite o propaga energía y momentum.



Potencia.- Hallaremos la potencia que se transmite en la barra de densidad ρ y módulo de Young E.

Por definición: $P = \frac{dw}{dt} = Tv = T\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ .... (1)

Sea la perturbación: $\Psi = \Psi_0 \operatorname{sen}(Ky - wt)$

Se vio en Ondas longitudinales en una barra: $T = AE\frac{\partial \Psi}{\partial y}$

Luego: $T = AE\,[\Psi_0 K \cos(Ky - wt)]$ .... (2)

$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\Psi_0\, w \cos(Ky - wt)$ .... (3)

De (2) y (3) en (1): $P = [AE\,\Psi_0 K \cos(Ky - wt)][-\Psi_0 w \cos(Ky - wt)]$

$$P = -\Psi_0^2 AE\; Kw \cos^2(Ky - wt)$$

Usando: $\upsilon = \sqrt{E/\rho}$, $k\upsilon = w$

$$P = -\rho w^2 \Psi_0^2\; \upsilon A \cos^2(Ky - wt)$$

El valor medio de la potencia: $\bar{P} = -\rho\, w^2 \Psi_0^2\; \upsilon\, A\, \overline{\cos^2(Ky - wt)}$

$$\bar{P} = -\frac{\rho w^2 \Psi_0^2\, \upsilon A}{2} = -\upsilon A\, \frac{\{\rho \omega^2 \Psi_0^2\}}{2}$$

El signo menos, significa el sentido en el cual se desplaza la onda y que lleva energía.

Hallemos la densidad de energía o la energía por unidad de volumen.

$$U = 1/2\,\rho w^2 \Psi_0^2 \text{ (Joules/}m^3\text{)}$$

Luego: $P = \upsilon A U$ (Joules/seg)

INTENSIDAD DE LA ONDA

Se define como el flujo de energía por unidad de área y de tiempo: $\bar{I} = \bar{P}/A$

$$I = \frac{1}{A}\left(\frac{dW}{dt}\right) = \frac{1}{A}\upsilon AU$$

$$I = \upsilon U \; (watts/m^2)$$

A) Hallaremos la potencia transmitida en una cuerda. En este caso, la perturbación es vertical; luego:

$$P = T_z\,\upsilon = \left(T\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) \quad \text{.......................................} \quad (1)$$

Para una solución senoidal: $\Psi_0 = \Psi_0 \operatorname{sen}(Ky - wt)$

Luego en (1): $P = [T\Psi_0 K\cos(Ky - wt)][-\Psi_0 w\cos(Ky - wt)]$

$$P = -T\,\Psi_0^2\, Kw\cos^2(Ky - wt)$$

$$P = -\Psi_0^2\,\upsilon\mu w^2 \cos^2(Ky - wt)$$

Se ha usado: $\upsilon = \sqrt{T/\mu}$, $K\upsilon = w$

El valor medio de la potencia: $\bar{P} = -\Psi_0^2\,\upsilon\mu w^2 \cos^2(Ky - wt)$

$$\bar{P} = -\frac{\Psi_0^2\,\upsilon\mu w^2}{2}$$

Podemos decir, que la potencia depende del cuadrado de la amplitud (Ψ_0^2) y del cuadrado de la frecuencia w^2.

La potencia varia linealmente con la velocidad de la onda.

La onda produce potencia en la dirección que se propaga, de ahí que el signo de la potencia puede ser positiva o negativa.

También la intensidad de la onda, se define como la energía media que atraviesa el área perpendicular a la dirección de propagación por unidad de tiempo, es decir.

$$I = \frac{1}{A}\frac{dw}{dt} \quad , \quad \bar{I} = \frac{1}{A}(\bar{P})$$

Para una cuerda, la intensidad media es: $\bar{I} = \frac{1}{2A}\Psi_0^2\,\upsilon\mu w^2$

Como se puede ver la intensidad de la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud.

B) Relación entre la intensidad de la onda y la distancia a la fuente

Cuando la onda se genera en la fuente, ésta se propaga en un medio isotrópico, los frentes de onda son esféricos. Si no hay pérdida o ganancia de energía, la energía total transportada por segundo permanece constante de valor P de la figura 103.

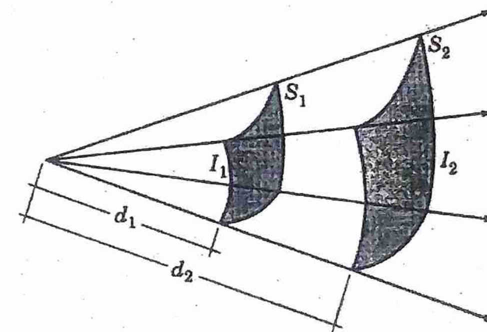


Fig. 103 *Ondas esféricas*

Luego: $P = I_1 A_1 = I_2 A_2$

$$I_1 4\pi d_1^2 = I_2 4\pi d_2^2 \qquad \boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}}$$

Podemos concluir que la intensidad de la onda varía en razón inversa de la distancia a la fuente.

C) Se puede deducir [Ver bibliografía Alonso - Finn, pág 721] que la intensidad de las ondas en una columna de gas en función de la onda de presión está dada por:

$$I = P_0^2/2\upsilon p_0 \quad \text{y}$$

$$Po = 2\pi\rho\upsilon f\,\Psi_0$$

ONDAS SONORAS

Las vibraciones que se generan en el aire o en cualquier gas, se propagan formando ondas longitudinales.

El ser humano, percibe el sonido para un rango de 20 a 20,000 vibraciones por segundo o Hertz (H_z), para este grupo especial de oscilaciones se llama sonoras o acústicas o sonidos.

Las vibraciones cuya frecuencia son mayores de 20,000 hz se llaman ultrasonidos y las menores de 20 hz infrasonidos.

El sonido para que se transmita a través del medio, necesita que ese sea elástico (el medio recupera su estado inicial, una vez que cesa la causa que perturba) y la inercia (su masa debe ser capaz de cambiar su estado neutro y efectuar un movimiento en sentido opuesto).

A continuación daremos algunas definiciones.

a) Acústica: Es la ciencia que estudia los métodos de generación, recepción y propagación del sonido.

b) Electroacústica: Se ocupa del estudio de la producción y registro del sonido por medios eléctricos (micrófonos, altoparlantes, amplificadores, etc.).

c) Acústica Arquitectónica: Trata del diseño y construcción de salas y edificios y el comportamiento de las ondas sonoras en ambientes cerrados.

d) Acústica musical: Estudia la relación entre el sonido y la música.

El oído humano detecta la intensidad del sonido en el rango de: 10^{-16} hasta $10^{-4}\ W/cm^2$.

Como el rango de la intensidad es grande, para estudiarlo, se usa una escala logarítmica, que relaciona la intensidad de sonido relativo a la intensidad umbral o discernible mínima $I_0 = 10^{-16}\ W/cm^2$. Se utiliza la unidad de decibeles o db:
$B = 10\log(I/I_0)db$

En la tabla Nº 8, se da el nivel de las intensidades de algunos sonidos y en la figura 103, se da los umbrales de audición para el oído humano.

En la sección Ondas longitudinales de presión en una columna de gas cerrado, se demostró que la velocidad del sonido en un cilindro que tiene un gas de densidad ρ y módulo de elasticidad K es $\upsilon = \sqrt{k/\rho}$.

Se puede demostrar que para estas ondas longitudinales y considerando un proceso adiabático para el gas encerrado, su velocidad de propagación es:

$v = \sqrt{\gamma RT/\mu}$ donde $\gamma = Cp/Cv$,
R : constante universal de los gases
T : temperatura
μ : peso molecular.

En la tabla Nº 9, se da la velocidad del sonido en sustancias sólidas, líquidas y gases.

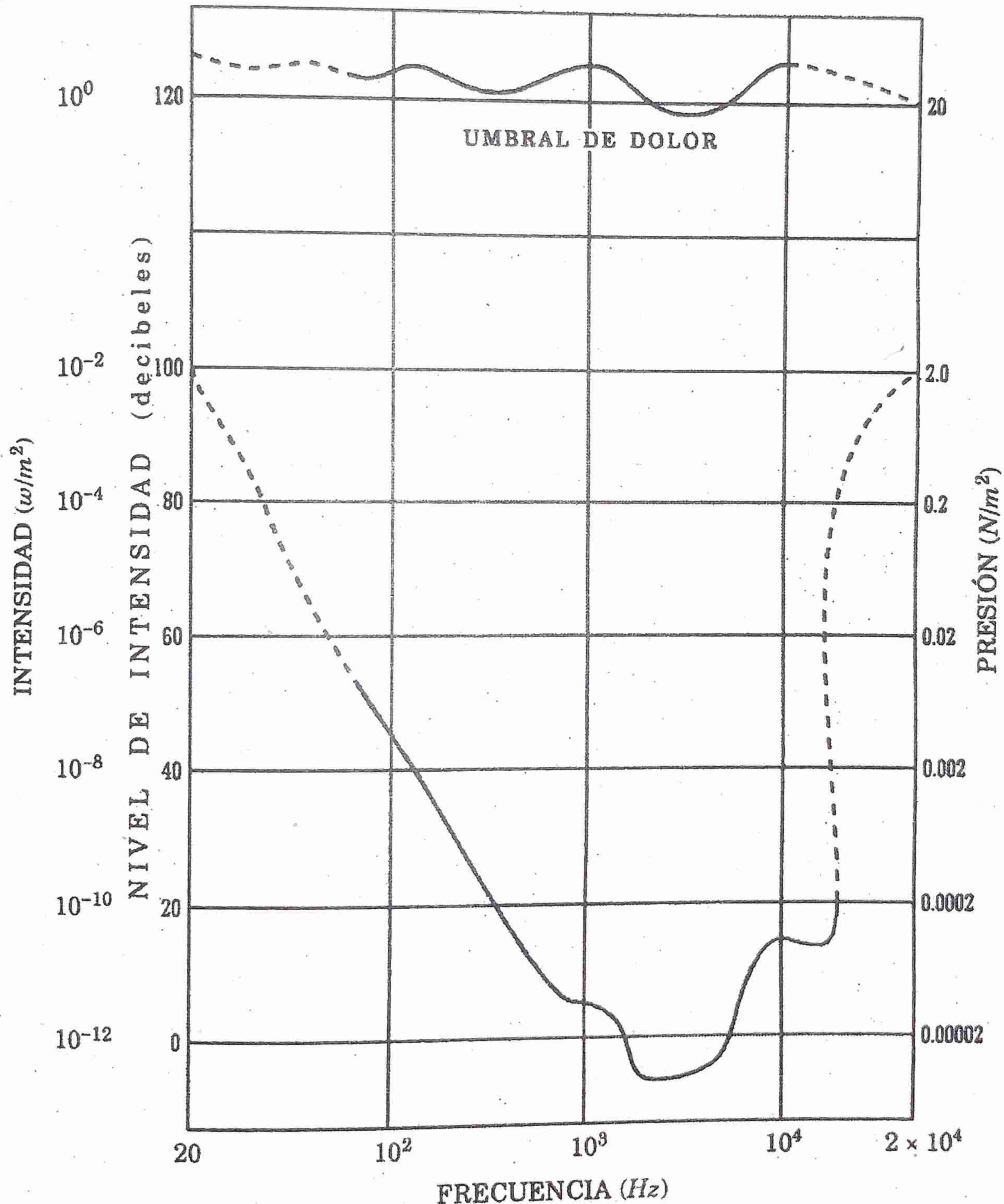


Fig. 104 *Umbrales de Audición para el Ser Humano (M. Alonso. Vol. II. Campos y Onda. pag. 721)*

ONDAS ESTACIONARIAS EN UNA COLUMNA DE AIRE ABIERTA EN AMBOS EXTREMOS

Sabemos para ondas estacionarias, se tiene que usar una expresión de la forma: $\Psi = (A\,sen\,Kx + B\cos Kx)\,sen\,wt$, tal como se usó en **ONDAS ESTACIONARIAS**, su gráfico es como se indica en la figura 105.

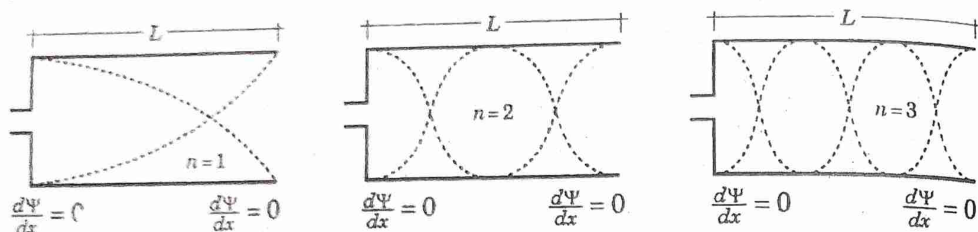


Fig. 105. *Ondas estacionarias. Tubo abierto por ambos extremos*

Se observa que la perturbación Ψ, tiene un máximo en los extremos, es decir hay un atinodo.

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0,\ \text{para}\ x = 0\ \ \text{y}\ \ x = L$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = K(A\cos Kx - B\,\text{sen}\,Kx)\,\text{sen}\,wt$$

Para $x = 0$, $\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=0} = K(A\cos 0 - B\,\text{sen}\,0)\,\text{sen}\,wt = 0$, $KA = 0$

luego $A = 0$ y la ecuación queda reducida a: $\Psi = B\cos Kx\,\text{sen}\,wt$

Para $x = L$, $\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=L} = -BK\,\text{sen}\,Kx\,\text{sen}\,wt\Big|_{x=L} = 0$

Como B no puede ser nulo, $\text{sen}\,KL = 0$, $KL = n\pi$

Pero $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\frac{2\pi L}{\lambda} = n\pi$, $\lambda = \frac{2L}{n}$, $n = 1,2,3,\ldots$

la frecuencia son: $\nu_n = \frac{\upsilon}{\lambda} = n\frac{\upsilon}{2L}$

la frecuencia fundamental es: $\nu_1 = \upsilon/2L$

y las armónicas tendrán frecuencias: $\nu_n : \nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1, \ldots$

ONDAS ESTACIONARIAS EN UNA COLUMNA DE AIRE ABIERTA POR UN EXTREMO

Para las ondas estacionarias se usará la misma expresión

$$\Psi = (A\,\text{sen}\,Kx + B\cos Kx)\,\text{sen}\,wt$$

su gráfico se indica en la figura 106.

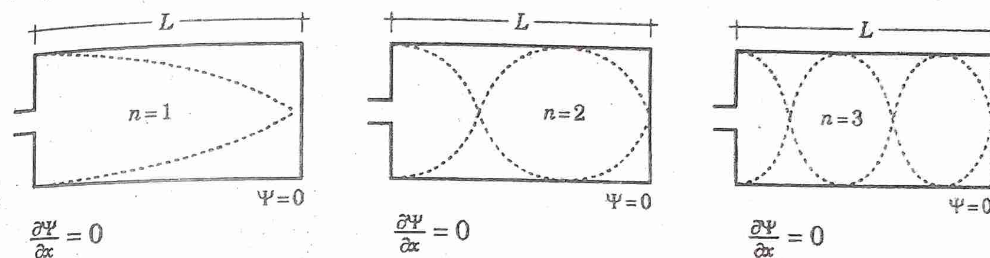


Fig. 105 *Ondas estacionarias. Tubo abierto en un extremo*

Se observa que en el extremo izquierdo, la condición es:

$$X = 0,\ \frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial\Psi}{\partial x} = K(A\cos Kx - B\,\text{sen}\,Kx)\,\text{sen}\,wt$$

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=0} = K(A\cos - B\,\text{sen}\,0)\,\text{sen}\,wt = 0,\ A = 0$$

luego $\Psi = B\cos K\,x\,\text{sen}\,wt$, la otra condición es:

$$x = L\ \ ;\ \ \Psi = 0\ \ ;\ \ B\cos K(L)\,\text{sen}\,wt = 0$$

Para $B \neq 0$, $\cos KL = 0$, $KL = (2n+1)\,\pi/2$ y $K = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\frac{2\pi}{\lambda}L = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $\lambda = \frac{4L}{2n+1}$.

La frecuencia fundamental es: $\upsilon = \lambda\nu$, $\nu_1 = \frac{\upsilon}{4L}$

Las armónicas serán: $\nu_n = \frac{\upsilon}{\lambda_n} = (2n+1)\frac{\upsilon}{4L}$

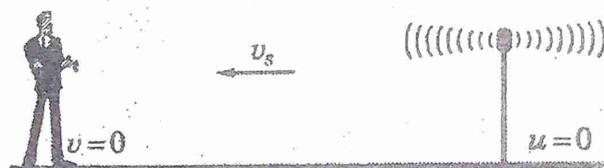
$$\nu_1, 3\nu_1, 5\nu_1$$

EFECTO DOPLER

Fue estudiado por C.J. Doppler (1803 – 1853), observó que la frecuencia de las ondas percibidas eran diferentes de la frecuencia de las ondas emitidas por la fuente. También podemos decir que: Consiste en el estudio de las frecuencias registradas por un observador o receptor (en reposo o movimiento) con relación a la frecuencia emitida por una fuente o foco (en reposo o movimiento). Para todos los casos se supone que el medio está en reposo.

1er Caso.- El observador A y el foco B están en reposo con relación al medio, entonces la fuente emite vibraciones de frecuencia ν y el observador recibirá ν', en este caso: $\nu' = \nu$.

Es decir el número de vibraciones recibidas por el observador en la unidad de tiempo es igual al número de vibraciones emitidas por el foco en este mismo tiempo.



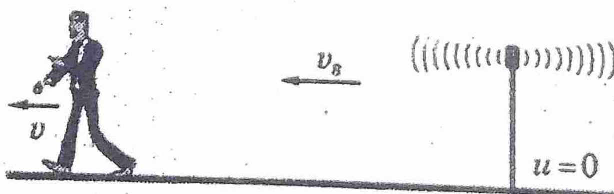
v_s = *velocidad del sonido*

2do Caso.- a) El observador se mueve con relación al medio con una velocidad v acercándose al foco y el foco permanece en reposo $u = 0$.



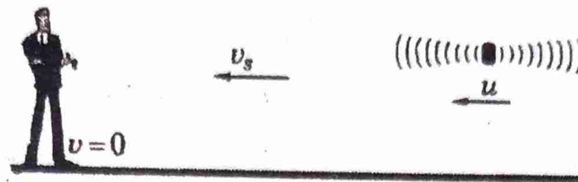
La frecuencia que percibe el observador es: $\nu' = \nu\left(1 + \frac{v}{v_s}\right)$

b) Cuando el observador se aleja de la fuente que está en reposo.



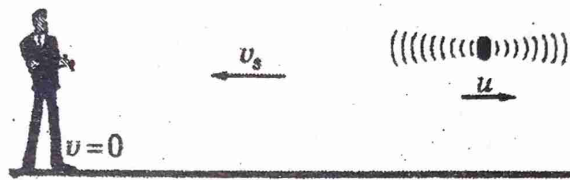
La frecuencia que percibe el observador es: $\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{v_s}\right)$

3er Caso.- a) El observador se encuentra en reposo ($\upsilon = 0$) con respecto al medio y el foco se mueve acercándose al observador.



La frecuencia que percibe el observador es: $\nu' = \nu(\upsilon_s / \upsilon_s + u)$

b) El observador se encuentra en reposo ($\upsilon = 0$) con respecto al medio y el foco se mueve alejándose del observador.



La frecuencia que percibe el observador es: $\nu' = \nu(\upsilon_s / \upsilon_s + u)$

4to Caso .- El caso general: cuando tanto la fuente ($u \neq 0$) y el observador ($\upsilon \neq 0$) se mueven simultáneamente con respecto al medio en que se propagan las ondas.

La frecuencia percibida por el observador es:

$$\nu' = \nu\left(\frac{\upsilon_s \pm \upsilon}{\upsilon_s \mp u}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

En la ecuación (α), los signos superiores del numerador (+) y denominador (–), corresponde al caso cuando la fuente y el observador se mueven sobre la línea que los une dirigiéndose uno hacia el otro.

Los signos inferiores en el numerador (–) y denominador (+) cuando la fuente y el observador se mueven alejándose uno del otro.

Si las velocidades υ y μ no tienen la dirección de la recta que los une el observador con el foco, entonces hay que tomar sus componentes sobre esta línea.

PROBLEMAS RESUELTOS

01 Dada la onda $\Psi = 5 \text{ sen } 2\pi(4y - 10t)$, donde y se mide en cm y t en segundos. Hallar (a) la longitud de onda (b) frecuencia (c) velocidad de propagación de la onda.

Solución:

a) Por teoría, sabemos que la perturbación se expresa así:

$\Psi = \Psi_0 \text{ sen}(ky - wt)$, luego: $\Psi = 5\text{sen}(8\pi y - 20\pi t)$

Por comparación: $K = 8\pi = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\lambda = 1/4\,cm$

b) También $W = 20\pi = 2\pi f$, $f = 10\,Hz$

c) Luego: $\upsilon = \lambda f = \frac{1}{4} \times 10 = 2.5$ cm/seg

02 Dada una onda armónica $\Psi = 5\text{sen}(\pi y - 5\pi t)$, donde y se mide en metros y t en segundos. Hallar (a) La velocidad de oscilación de las partículas (b) Cuál es la velocidad de propagación de la onda.

Solución:

a) Por definición: $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 5(-5\pi)\cos(\pi y - 5\pi t)$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -25\pi \cos(\pi y - 5\pi t)$$

b) La velocidad de propagación es: $\upsilon = \lambda f$, donde:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi\,,\ \lambda = 2 \text{ y } w = 2\pi f = 5\pi\,,\ f = 2.5$$

entonces $\upsilon = 2 \times 2.5\, m/s = 5\, m/s$

03 Dada la ecuación de la onda $\Psi = 0.6\text{sen}(12x + 4t)$, donde x se mide en metros y t en segundos. Hallar (a) para $t = 0$ el desplazamiento para $x = 0.1$ m y (b) Para $x = 0{,}3$ m, el desplazamiento para $t = 0.2$ seg.

Solución:

a) Dada la onda $\Psi = 0.6\text{sen}(12x + 4t)$

Para $t = 0\text{seg}$, $\Psi = 0.6\text{sen}(12x + 0)$

Para $x = 0.1\,m$, $\Psi = 0.6\text{sen}[12(0.1)] = 0.56\,m$

b) Si $\Psi = 0.6\text{sen}(12x + 4t)$

Para $x = 0.3\,m$, $\Psi = 0.6\text{sen}[12(0.3) + 4t]$

Para $t = 0.2\text{seg}$, $\Psi = 0.6\text{sen}[3.6 + 4(0.2)]$

$$\Psi = 0.6\text{sen}(3.6 + 0.8) = 0.6\text{sen}\,4.4 = -0.57\,m$$

04 Se tiene una onda viajera cuya frecuencia angular es 100 rad/s y velocidad de propagación 20 m/s a lo largo de una cuerda (a) Hallar el desplazamiento de un punto de la cuerda en todo instante en función de la frecuencia y la longitud de onda.

Solución:

a) Sabemos que la onda es de la forma $\Psi = \Psi_0 \text{ sen}(Kx - wt)$

en función de lo pedido: $\Psi = \Psi_0 \text{ sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi f t\right)$

$$\Psi = \Psi_0 \text{ sen } 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)$$

Como: $W = 100\frac{\text{rad}}{\text{seg}} = 2\pi f$, $f = \frac{50}{\pi}Hz$

$$\upsilon = 20\,m/s\,,\ \lambda = \upsilon/f = 20/\left(\frac{50}{\pi}\right) = \frac{20\pi}{50} = \frac{2\pi}{5}m$$

Luego: $\Psi = \Psi_0 \text{ sen } 2\pi\left(\frac{x}{2\pi/5} - \frac{50t}{\pi}\right)$

$$\Psi = \Psi_0 \text{ sen}(5x - 100t)$$

05 Dada una onda viajera transversal $\Psi = 3.2\text{sen}(0.1x - 10t)$ donde la perturbación se mide en metros, hallar la constante de propagación o el número de onda y la velocidad de la onda.

Solución:

De la onda dada $\Psi = 3.2\text{sen}(0.1x - 10t)$

$k = 0.1m^{-1}$, $w = 10$ rad/seg , luego $\upsilon = w/k$

$\upsilon = 10/0.1$ m/seg $= 100$ m/s

06 Se tiene una onda $\Psi(x,t) = 0.20\,\text{sen}(2\pi x - \pi t)$ donde Ψ y X están en metros y en segundos. Hallar (a) La velocidad $\partial\Psi/dt$ y la aceleración $\partial^2\Psi/\partial t^2$ para $x = 0$, y $t = 1$ seg. (b) La tensión de la cuerda, si la onda viaja por ésta, si la densidad lineal de la cuerda es 0.01 Kg/m.

Solución:



a) Si $\Psi(x,t) = 0.20\,\text{sen}(2\pi x - \pi t)$

la velocidad: $\frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0.20(-\pi)\cos(2\pi x - \pi t)$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\pi 0.2\cos[2\pi(0) - \pi(1)] = 0.63 \text{ m/s}$$

la aceleración: $\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0.20(-\pi)^2\,\text{sen}(2\pi x - \pi t)$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0.20(-\pi)^2\,\text{sen}[2\pi(0) - \pi(1)] = -3.14\times 10^{-3} \text{ m/s}$$

b) Sabemos por teoría: $\upsilon = \sqrt{T/u}$, $T = \mu\upsilon^2$

La velocidad es: $\upsilon = \lambda f = 1\times\frac{1}{2} = 0.5\text{m/s}$, $\mu = 0.01\text{Kg/m}$

Luego: $T = 0.01\frac{\text{kg}}{\text{m}}\times\left(0.5\frac{\text{m}}{\text{seg}}\right)^2 = 2.5\times 10^{-3}\,N$

07 Dada la ecuación diferencial del movimiento ondulatorio

$$18\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$$

hallar la velocidad de propagación de la onda, si Ψ esta en metros y t en seg.

Solución:

Expresando la ecuación dada: $\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{18}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{9\partial^2\Psi}{\partial x^2}$

luego $\upsilon^2 = 9m^2/\text{seg}^2$, $\upsilon = 3\text{m/s}$. Se ha usado la expresión (γ).

08 La velocidad de fase de una armónica de flexión en una barra es: $\upsilon_f = \sqrt{E/\rho}\Big/\sqrt{1+\lambda^2/4\pi^2R^2}$ donde λ es la longitud de onda y R el radio de giro de la sección transversal de la barra respecto del eje que pasa por el centro y es normal al eje longitudinal de la barra, E módulo de Young y ρ densidad de la barra. Hallar la velocidad de grupo.

Solución:

De la expresión: $\upsilon_f = \sqrt{E/\rho}\Big/\sqrt{1+\lambda^2/4\pi^2R^2} = \sqrt{E/\rho}\Bigg/\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2R^2}}$

$$\upsilon_f = \sqrt{E/\rho}\Big/\sqrt{1+\frac{1}{K^2R^2}}\text{, donde: } K = 2\pi/\lambda$$

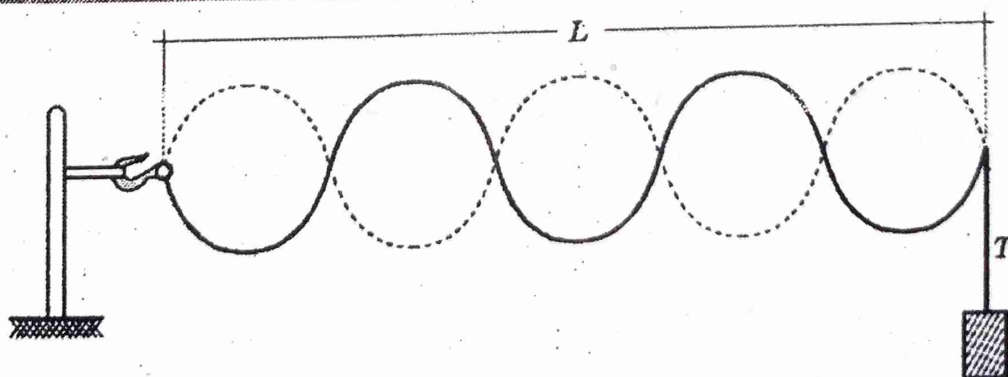
La velocidad de grupo es:

$$\upsilon_g = \upsilon_f + K\frac{d\upsilon_f}{dK} = \upsilon_f + K\sqrt{E/\rho}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{K^2R^2}\right)^{-3/2}R^{-2}(-2K^{-3})$$

$$\upsilon_g = \upsilon_f + \frac{\sqrt{E/\rho}}{1+\frac{1}{K^2R^2}}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{K^2R^2}\right)K^2R^2} = \upsilon_f + \frac{\upsilon_f}{(K^2R^2+1)}$$

$$\upsilon_g = \frac{\upsilon_f(R^2K^2+2)}{(R^2K^2+1)}$$

09 En la experiencia de Melde, se tiene una cuerda de 100 cm de longitud y 10 g de masa, está unido en un extremo a un diapasón cuya frecuencia es de 200 Hz. Hallar la tensión en el hilo que le haga vibrar a la frecuencia del quinto armónico.



Solución:

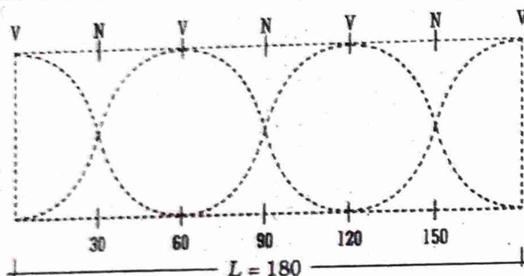
Sabemos por teoría: $\upsilon = \sqrt{T/\mu}$, $T = \mu\upsilon^2$

Donde: $\upsilon = f\lambda$, $\frac{\lambda}{2} = \frac{100}{5}\text{cm}$, $\lambda = 40\text{cm}$

$\upsilon = 200 \times 40\text{cm/s} = 8000\ \text{cm/s}$, $T = \frac{10}{100}\frac{g}{\text{cm}}\left(8000\frac{\text{cm}}{\text{seg}}\right)^2 = 64 \times 10^5\text{dinas}$

(10) Una barra de 180 cm. de longitud se sujeta por su centro y se la golpea, produciendo su primer sobretono. Dibujar un esquema indicando los vientres (máxima vibración) y nodos (mínima vibración) y hallar en que otros puntos se debe sujetar para producir el mismo tono.

Solución:



El gráfico del primer sobretono se indica al lado, se puede observar 4 vientres y 3 nodos.

Se debe sujetar según el gráfico en los nodos a 30 cm. de cada extremo.

(11) Una barra de metal de 9 m de longitud, se sujeta por su centro y vibra longitudinalmente emitiendo su primer sobretono, si se hace vibrar con un diapasón de 600 Hz. Hallar la velocidad del sonido en el metal.

Solución:

Se observa (Prob. 10) que en el primer sobretono se tiene: $6\frac{\lambda}{4} = 9m$, $\lambda = 6m$,

luego $\upsilon = \lambda f = 6m \times 600\ 1/\text{seg} = 3600\ \text{m/seg}$.

(12) Dado el perfil $\Psi(x,0) = \frac{5}{x^3+2}$

Hallar una expresión para la onda que se mueve con una velocidad de 8 m/seg en la dirección negativa de x.

Solución:

Hacemos el cambio de $x \to x + \upsilon t = x + 8t$

luego: $\Psi(x,t) = \frac{5}{(x+8t)^3 + 2}$

(13) Explicar si la perturbación $\Psi(y,t) = 0.2e^{-(3y+t)^2}$ es una onda viajera y verificar si satisface la ecuación de la onda.

Solución:

a) La expresión $\Psi(y,t) = 0.2e^{-(3y+t)^2}$ se puede expresar así:

$\Psi(y,t) = 0.2e^{-9(y+1/3t)^2}$ que representa una onda que se mueve en la dirección y negativa con una velocidad $\upsilon = 1/3$.

b) Hallando: $\frac{\partial\Psi}{\partial Y} = 0.2e^{-9(y+1/3t)^2}[-18(y+1/3t)] = -18(y+1/3t)\Psi$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2} = -18\left(y+\tfrac{1}{3}t\right)\left\{0.2e^{-9(y+1/3t)^2}\left[-18\left(y+\tfrac{1}{3}t\right)\right]\right\} - 18\Psi = \left[18\left(y+\tfrac{1}{3}t\right)\right]^2\Psi - 18\Psi \ \ldots (1)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0.2\,e^{-9(y+1/3t)^2}\,[-18(y+1/3t)\,1/3] = -6(y+1/3t)\Psi$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -6(y+1/3t)\left\{0.2\,e^{-9(y+1/3t)^2}[-18(y+1/3t)1/3]\right\} - 6\Psi\,(1/3)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = [6(y+1/3t)]^2\,\Psi - 2\Psi \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Como la ecuación de onda es: $\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$ de (1) y (2):

$[18(y+1/3t)]^2\Psi - 18\Psi = \frac{1}{\upsilon^2}[6(y+1/3t)]^2\Psi - 2\Psi$ que se satisface para $\upsilon = 1/3$.

(14) Cuál de las siguientes funciones describe ondas viajeras. Donde P, Q y R son constantes:

a) $\Psi_1(x,t) = P(x+t)^3$

b) $\Psi_2(x,t) = P(x+t^2+B)$

c) $\Psi_3(x,t) = P\cos Q(x^2 - Rt^2)$

d) $\Psi_4(x,t) = R/(Qx^2+t)$

Solución:

a) La perturbación $\Psi_1(x,t) = P(x+t)^3$, si corresponde a una onda viajera porque es de la forma $(x+\upsilon t)$, su velocidad es $\upsilon = 1$.

b) La perturbación $\Psi_2(x,t) = P(x+t^2+B)$, no corresponde a una onda viajera porque no es de la forma $(x+\upsilon t)$.

c) La perturbación $\Psi_3(x,t) = P\cos Q(x^2 - Rt^2) = P\cos Q(x - \sqrt{Rt})(x + \sqrt{Rt})$ como se puede ver se trata de una onda que viaja hacia la derecha y hacia la izquierda simultáneamente y no puede ser una onda.

d) La perturbación $\Psi(x,t) = R/(Qx^2 + t)$, no corresponde a una onda viajera porque no es de la forma $x + vt$, el exponente de x es 2.

(15) Se tiene una onda $\Psi(y,t) = 20\,\mathrm{sen}(2\pi y - 2\pi t)$ y se usan dos detectores para medir las perturbaciones en los puntos $y_1 = 1$ y $y_2 = 5$. ¿Cuál será la perturbación en el instante t' cuando $\Psi(y_1, t') = 10$?

Solución:

Nos piden:

t' t'

$y_1 = 1$ $y_2 = 5$

$$\Psi(y_2, t') = 20\,\mathrm{sen}(2\pi y_2 - 2\pi t')$$

$$\Psi(5, t') = 20\,\mathrm{sen}(10\pi - 2\pi t') \;\dots\dots\dots\dots (1)$$

Hallamos el valor de t': $\Psi(y_1, t') = \Psi(1, t') = 20\,\mathrm{sen}(2\pi - 2\pi t') = 10$

$$\mathrm{sen}(2\pi - 2\pi t') = 0.5\,,\; 2\pi - 2\pi t' = \pi/6\,,\; t' = 11/12$$

Luego en (1):

$$\Psi(5, 11/12) = 20\;sen\;(10\pi - 2\pi \times 11/12) = 10$$

(16) Al aumentar en 1.5 *atm* la presión, se produce una deformación unitaria volumétrica del agua de 2×10^{-5}. Hallar la longitud de onda en el agua de un sonido de frecuencia 100 Hz.

Solución:

Sabemos por teoría: $v = \sqrt{B/\rho} = \sqrt{\dfrac{\Delta p/\Delta v}{\rho}}$, en nuestro caso.

$$\Delta p = 1.5\text{ atm} = 1.5 \times 1.013 \times 10^5\; N/m^2 = 1.519 \times 10^6\text{ dinas/cm}^2$$

$$\Delta v = 2 \times 10^{-5} \quad \text{y} \quad \rho = 1 g/\text{cm}^3$$

Luego: $\upsilon = \sqrt{\frac{1.519 \times 10^6}{1 \times 2 \times 10^{-5}} \frac{\text{cm}}{\text{seg}}} = 2755\,\text{m/seg}$

$$\lambda = v/f = 2755/100 = 27.55\,m$$

(17) Sabiendo que la velocidad del sonido en el aire, en condiciones normales es de 331 m/s, hallar la velocidad del sonido en hidrógeno a 0°C y 1 *atm*. La densidad relativa del hidrógeno con respecto al aire es 0.069. Considere para ambos gases $\gamma = 1.4$.

Solución:

Sabemos por teoría: $\upsilon = \sqrt{\gamma p/\rho}$ en nuestro caso, comparamos la velocidad del sonido en los dos gases (aire e hidrógeno).

$$\frac{\upsilon_a}{\upsilon_H} = \sqrt{\frac{\gamma p/\rho_a}{\gamma p/\rho_H}} = \sqrt{\frac{\rho_H}{\rho_a}} = \sqrt{\frac{0.069\,\rho_a}{\rho_a}} = \sqrt{0.069}$$

$$\upsilon_H = \upsilon_a/\sqrt{0.069} = 331/\sqrt{0.069} = 1260\,m/s$$

(18) Un resorte que tiene una longitud normal de 50 cm. y una masa de 100 *g* se estira 2 cm. cuando se le aplica una fuerza 1 *N*. Hallar la velocidad de propagación de las ondas longitudinales a lo largo del resorte.

Solución:

Se puede demostrar que las ondas longitudinales en un resorte está dado por $\upsilon = \sqrt{KL/\mu}$, donde K es la constante elástica del resorte, μ: la densidad lineal de masa.

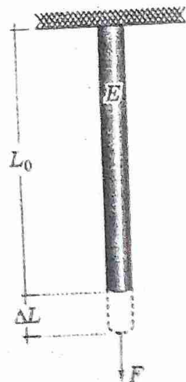
En nuestro caso: $\mu = 0.100$ Kg/ 0.50 m = 0.2 Kg/m. la constante elástica es:

$$K = F/x = 1N/0.02\,m = 50\,N/m \;\; \text{y} \;\; L = 0.50\,m$$

Luego: $\upsilon = \sqrt{50 \times 0.5/0.2}\,m/s = 125$ m/seg

(19) Un alambre de cobre que tiene una longitud de 1 *m* y un radio de 0.9 *mm* está soportada del techo (a) Se aplica una fuerza de 100 *Kg* en su extremo libre, hallar la elongación del alambre (b) Hallar la velocidad de las ondas longitudinales y transversales que se propagan a lo largo del alambre.

Solución:



a) Sabemos por elasticidad: $\Delta L = FL_0/ES = FL_0/E\pi r^2$

donde:

$F = 100Kg$, $L_0 = 1m$, $r = 0.9\times10^{-3}m$

$E = 11.8\times10^{10}\ N/m^2$

$\Delta L = 0.003m$

b) $\upsilon_{long} = \sqrt{E/\rho} = \sqrt{11.8\times10^{10}/8.6\times10^3} = 3704$ m/seg

$\upsilon_{trans} = \sqrt{T/\mu} = \sqrt{T/\rho\pi r^2} = 21.16$ m/seg

(20) Una barra de hierro transmite ondas longitudinales por medio de un oscilador fijo a uno de sus extremos. La barra tiene un diámetro de 1 cm. La amplitud de las oscilaciones 0.05 mm y su frecuencia 20 Hz. Hallar (a) La ecuación de las ondas que se propagan a lo largo de la barra (b) La energía por unidad de volumen (c) El flujo de energía media por unidad de tiempo a través de una sección cualquiera de la barra, (d) la potencia necesaria para que funcione el oscilador.

Solución:



a) La ecuación de la onda es:

$\Psi = \Psi_0 \operatorname{sen}(Kx - wt)$

$K = 2\pi/\lambda$, $w = 2\pi f$, $\lambda = \upsilon/f$

donde: $\upsilon = \sqrt{E/\rho}$

$\Psi_0 = 5\times10^{-5}m$

$f = 20H_z$

$r = 10^{-2}m$

$E = 19.6\times10^{10}\ N/m^2$, $\rho = 7.9\times10^3\ Kg/m^3$

Luego: $\upsilon = \sqrt{19.6\times10^{10}/7.9\times10^3}\ m/s = 4981\ m/s$

$\lambda = 4981/20m = 249.05m$, $\Psi = 5\times10^{-5}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{249.05}x - 40\pi t\right)$

$\Psi = 5\times10^{-5}\operatorname{sen}2\pi(4\times10^{-3}x - 20t)$

b) Por teoría: $U = \frac{\rho}{2}W^2\Psi_0^2 = \frac{1}{2}(7.9\times10^3)(2\pi\ 20)^2(5\times10^{-5})^2\ J/m^3$

$U = 0.158\pi^2\ J/m^3$

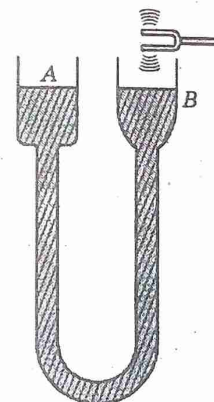
c) La potencia pedida es: $P = \upsilon AU = 4981\times\pi(10^{-2})^2\times0.158\pi^2$ J/seg

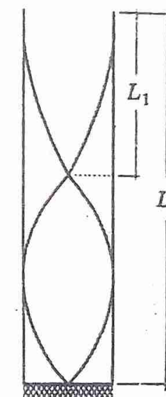
$P = 0.0787\pi^3W$

d) La potencia requerida es 2.44 W.

(21) Un diapasón de frecuencia 100 Hz hace oscilar a una columna de aire que está sobre la superficie libre del agua, usando el sistema que se indica en la figura. Hallar las longitudes de las dos primeras columnas de aire que están en resonancia con el diapasón, la velocidad del sonido es 340 m/s

Solución:





Se vio en la teoría, sección ONDAS ESTACIONARIAS EN UNA COLUMNA DE AIRE ABIERTA EN AMBOS EXTREMOS, la resonancia se produce cuando:

$\lambda = \frac{4L}{(2n+1)}$, $n = 0,1,2,3,\ldots$

$L = \frac{\lambda}{4}(2n+1)$

$L_1 = \frac{\lambda}{4}$ y $L_2 = \frac{\lambda}{4}(2+1) = \frac{3}{4}\lambda$

Hallemos: $\lambda = \upsilon/f = 340/100 = 3.4\ m$

$L_1 = 3.4/4m = 0.85m$ y $L_2 = 3\times0.85m = 2.55m$

(22) Un diapasón realiza 200 vibraciones por segundo en el aire. Hallar la longitud de onda del tono emitido a 27°C

Solución:

Se usará la expresión $v_5(°t) = 331\ m/s + 0.6t(°C)\ m/s$ que nos da la velocidad del sonido en el aire en función de la temperatura en °C.

También se conoce la relación $v = \alpha\ \sqrt{T} = 20.05\sqrt{T}$ que nos da la velocidad de la onda de presión en un gas en función de la temperatura (°Kelvin) del gas.

Luego comparando la velocidad para $t_0 = 0°C$, $T_0 = 273°K$ su velocidad es $v_0 = 331 m/s$ y para $T_1 = 27 + 273 = 300°K$ su velocidad será:

$$\frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} \quad , \quad v_1 = v_0\sqrt{\frac{T_1}{T_0}} = 331\sqrt{\frac{300}{273}}$$

$$v_1 = 346.9\ m/s = 347\ m/s$$

Si hubiéramos usado la expresión de arriba al inicio, se hubiera obtenido:

$$v = 331 + 0.6(27) = 347.2\ m/s$$

La longitud de onda pedida es: $\lambda = v/f = 347/200 = 1.73\,m$

(23) El sonido que puede oírse, tiene una amplitud de presión de aproximadamente $1.5\times10^{-5}\ N/m^2$. Hallar la intensidad del sonido en W/m^2 y en db, la amplitud de las oscilaciones, si la frecuencia es 500 Hz. La velocidad del sonido es 345 m/s y la densidad del aire 1.29 Kg/m^3.

Solución:

a) Se tiene como datos:

$$P_0 = 1.5\times10^{5}\ N/m^2 \ , \ f = 500\ Hz \ , \ v_5 = 345 m/s \ , \ \rho = 1.29\,Kg/m^3$$

de la teoría: $I = P_0^2/2v\rho = (1.5\times10^{-5})^2/2(345)(1.29)$

$$I = 0.25\times10^{-12}\ W/m_2$$

Para hallar en db, usaremos la intensidad de referencia $I_0 = 10^{12}\, w/m^2$

luego: $B = 10\log(I/I_0) = 10\log(0.25\times10^{-12}/10^{-12}) = -6.02\,db$

b) Para hallar la amplitud, usamos la expresión: $P_0 = 2\pi\upsilon\rho f\psi_0$

$\Psi_0 = P_0/2\pi\,\upsilon\,\rho\,f = 1.5\times10^{-5}/2\times3.14\times345\times1.29\times500 = 1.07\times10^{-11}\,m$

(24) Hallar en db la diferencia en los niveles de intensidad de dos ondas sonoras si la intensidad de una de las ondas es 3 veces es la intensidad de la otra.

Solución:

Sabemos: $B_1 = 10\log I/I_0$ y $B_2 = 10\log 3I/I_0$

$$B_2 - B_1 = 10\log 3I/I_0 - 10\log I/I_0 = 10\log\frac{(3I/I_0)}{I/I_0}$$

$$B_2 - B_1 = 10\log 3 = 4.7\,db$$

(25) Una locomotora viaja a 144 km/h y su silbato tiene una frecuencia de 1000 Hz. Si la velocidad del sonido es 331 m/s. Hallar la frecuencia del sonido percibido por una persona antes de que la locomotora pase por delante de ella y después de haber pasado.

Solución:



a) En este caso se tiene, cuando la locomotora se acerca y el observador está en reposo, la frecuencia solicitada es:

$\nu' = \nu(\upsilon_s/\upsilon_s - \mu)$, $\mu = 144\,Km/h = 40\,m/s$, $\upsilon_s = 331\,m/s$ y $\nu = 100\,Hz$

Luego: $\nu' = 1000\,(331/331 - 40) = 1137\,Hz$

b) Cuando la locomotora se aleja del observador que está en reposo

$\nu' = \nu(\upsilon_s/\upsilon_s + \mu) = 1000\,(331/331 + 40) = 892\,Hz$

PROBLEMAS PROPUESTOS

01 Cierta cuerda de violín tiene 50 cm. de largo entre sus puntos fijos y su masa es de 2.0 g. La cuerda toca la nota "la" (440 Hz) cuando se la toca sin pulsarla con los dedos. ¿En dónde debe ponerse el dedo para tocar un do (528 Hz).

Rpta.: $L = 41{,}7\,\text{cm}$

02 ¿Podría usted ir manejando hacia una luz roja con una velocidad suficiente para que la viera verde?. ¿Le levantarían una infracción por exceso de velocidad?. Tómese $\lambda = 6200\times100^{-10}m$ para la luz roja, $\lambda = 5400\times10^{-10}m$ para la luz verde, y $C = 3\times10^{8}$ m/s como velocidad de la luz.

Rpta.: $V_0 = 4{,}4\times10^{7}$ m/s

03 Un observador que está a la orilla del mar oye el sonido de la sirena de un barco. Cuando el observador y el barco están en reposo, el sonido que percibe aquél corresponde a la frecuencia de 420 Hz. Cuando el barco se mueve en dirección al observador, la frecuencia del sonido que este percibe es de 430 Hz. Y cuando el barco se aleja del observador, la frecuencia es de 415 Hz. Hallar la velocidad del barco, en el primer y segundo caso si la velocidad del sonido es de 338 m/seg.

Rpta.: a) $\upsilon = 28.3\,\text{Km/h}$
b) $14.7\,\text{Km/h}$

04 Una cuerda con densidad lineal de masa 4.10^{-3} kg/m está bajo una tensión de $360N$ y está fija en ambos extremos. Una de sus frecuencias de resonancias es 375 Hz y la próxima es 450 Hz.

a) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de esta cuerda?

b) ¿Cuáles son los armónicos dados?

c) ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

Rpta.: a) $f = 75$ Hz
b) 5to, 6to
c) $L = 2\text{m}$

05 En el acero $(E = 2\times10^{11}\,N/m^2,\ \rho = 8000\,kg\,m^3)$ se propaga una onda longitudinal de forma sinusoidal, en la que la amplitud del desplazamiento es 0.1 mm., y cuya frecuencia es 1000 Hz.

Cuánto valen las tensiones máximos σ que tienen lugar en el material.

Rpta.: $\sigma_{máx} = 256\ \text{kg/cm}^2$

06 El desplazamiento de una onda estacionaria está dada por

$$y_{(x,t)} = 5{,}6\,\text{sen}(0{,}66x)\cos(53t)$$

a) ¿Cuál es la distancia entre los nodos?

b) ¿Cuál es la amplitud, frecuencia y velocidad de cada una de las ondas componentes?

c) ¿Cuál es la velocidad de una de las partículas de la cuerda en $x = 2{,}10$ cm $t = 1{,}25$ segundos.

Rpta.: a) 4,8 cm. b) $A = 4{,}8$ cm , $f = 8{,}4$ Hz , $V = 80$ cm/s
c) $V = 80$ cm/s

07 Un sonido de frecuencia 1000 Hz, tiene una intensidad de 100 dB. Se pide (a) la amplitud (b) la velocidad de las moléculas de aire y (c) la amplitud de las fluctuaciones de presión.

Rpta.: a) $1.09\times10^{-6}\,m$ b) $0.685\times10^{-2}\,m/s$ c) 2.9×10^{-5}atm

08 Dada la onda $\Psi = 0.3\,\text{sen}(2\pi Z - 18\pi t)$, donde Z se mide en metros y t en segundos. Hallar la velocidad de propagación de la onda.

Rpta.: $\upsilon = 9\,m/s$

09 Un tubo de vidrio está abierto en un extremo y cerrado en el otro mediante un émbolo móvil. El tubo se llena con aire caliente a mayor temperatura que la ambiente, y un diapasón de 384 Hz se sostiene en el extremo abierto. Se escucha la resonancia cuando el émbolo está a 22.8 cm. del extremo abierto y nuevamente cuando se encuentra a 68.3 cm. de dicho extremo.

a) Por estos datos, ¿qué rapidez del sonido está implicada?

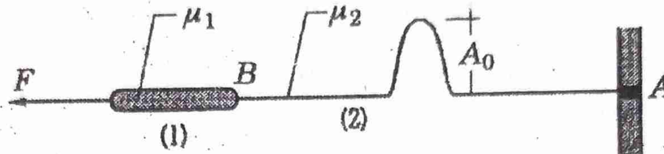
b) ¿A qué distancia desde el extremo abierto estará el émbolo cuando se escuche la siguiente resonancia?.

Rpta.: a) 350 m/s b) 1,14 m.

10 Se tiene una onda, cuya forma matemática es: $\Psi(z,0)=2\text{sen}\frac{2\pi}{3}Z$. Si la onda se mueve en la dirección negativa del eje Z a la velocidad de 6 m/s. Hallar la perturbación para $t=1$ seg.

Rpta.: $\Psi(z,1)=2\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}z+4\pi\right)$

11 En la figura, el pulso viaja hacia la derecha luego, es cierto que



a) El pulso en A, se refleja y refracta.
b) En B, solo existe reflexión.
c) El pulso refractado en B, mantiene la amplitud del pulso incidente.
d) El pulso reflejado en B tiene amplitud menor a (A_0).
e) En B el pulso reflejado mantiene la forma del pulso incidente.

Rpta.: e

12 Cuánto vale la amplitud de las oscilaciones en una onda sonora de frecuencia 1000 Hz con una intensidad sonora de 130 db y de 0 dB (umbral doloroso y umbral audible).

***Rpta.:** a) $\Psi(130dB)=3.36\times10^{-5}m$
b) $\Psi(0dB)$

13 Dos ondas que se mueven en la misma dirección y cuyas ecuaciones son:

$$y=5\text{sen}(1000t-100x)\quad,\quad y_2=5\text{sen}(1000t+100x)$$

Al interferir las ondas determinar.

a) La ecuación de onda resultante.
b) La amplitud de los vientres.
c) Distancia entre los nodos consecutivos.

Rpta.: a) $10\text{sen}(1000t)\cos(100x)$
b) 10 cm.
c) 0,0314

14 Un estudiante sostiene un diapasón que oscila a 256 Hz. Camina hacia una pared a una rapidez constante de 1.33 m/s.

a) ¿Qué frecuencia de pulsación observa entre el diapasón y su eco?

b) ¿Qué tan rápido debe alejarse de la pared caminando para observar una frecuencia de pulsación de 5.00 Hz?

Rpta.: a) 1,99 golpes/s
b) 3,38 m/s

15 Se da la velocidad de fase de ondas armónicas longitudinales que se propagan a lo largo de un cilindro de radio R, $\upsilon_f = \sqrt{E/\rho}\,(1-\pi^2\sigma^2 R^2/\lambda^2)$, donde E, ρ, σ, R son constantes. Hallar la velocidad de grupo de las ondas que se propagan a lo largo de la barra.

Rpta.: $\upsilon_g = 3\upsilon_f - 2\sqrt{E/\rho}$

16 ¿A cuánta tensión está sometida una cuerda de densidad $6\,000\,\text{kg/m}^3$ y de radio 0,1 mm. si un movimiento ondulatorio transversal se propaga en ella con una rapidez de 100 m/s?

Rpta.: $T = \frac{7\pi}{10}$

17 Una fuente sonora tiene una frecuencia de 800 Hz y está en reposo respecto al aire. Un observador se mueve con una velocidad de 20 m/s. Suponiendo que la velocidad del sonido respecto al aire en reposo es 340 m/seg. Hallar (a) la frecuencia percibida por el observador cuando se acerca y (b) cuando se aleja de la fuente sonora.

Rpta.: a) $f' = 847\ Hz$

b) $f' = 753\ Hz$

18 La ecuación de una onda estacionaria está dada por $y = \cos(5\pi x)\text{sen}(40\pi t)$ con x en metros y t en segundos. ¿Con qué rapidez se propaga las ondas y cuál es la ecuación de la onda que se propaga hacia la izquierda?.

Rpta.: $V = 8$ m/s ; $y = 0{,}05\,\text{sen}\left(\frac{t}{4} - \frac{x}{4}\right)m$

19 En una cuerda de 120 cm. de longitud se formó una onda estacionaria, con la particularidad de que los puntos, para los cuales la amplitud de desplazamiento es igual a 3.5 mm., distan 15 *cm* uno de otro. Hallar la amplitud máxima de desplazamiento. A qué sobretono corresponden estas oscilaciones.

Rpta.: $\Psi_0 = 5\,\text{mm}$, al tercer sobretono.

20 El nivel del agua en un tubo de vidrio vertical de 1.m. se puede ajustar a una posición cualquiera en el tubo. Exactamente sobre el extremo abierto del tubo se colocan un diapasón cuya frecuencia es de 660 Hz (vibraciones/s) ¿En qué posiciones del nivel de agua habrá resonancia? Tómese para velocidad del sonido $C = 330\,\text{m/s}$.

Rpta.: $L = \frac{1}{8}m$, $L = \frac{3}{8}m$, $L = \frac{5}{8}m$, $L = \frac{7}{8}m$

21 Un diapasón de 512 Hz de frecuencia se coloca cerca de la parte superior del tubo mostrado en la figura 18.15a.
El nivel del agua se reduce de modo que la longitud L aumenta lentamente desde un valor inicial de 20.0 cm.
Determine los dos siguientes valores de L que corresponden a modos resonantes.

Rpta.: 0,502 m y 0,837 m.

22 Hallar el número de posibles oscilaciones propias de una columna de aire en un tubo, cuyas frecuencias son inferiores a 1250 Hz. La longitud del tubo es 85 cm. La velocidad del sonido 340 m/s. Considérese dos casos siguientes (tomando los extremos abiertos del tubo por los vientres de desplazamiento) : (a) el tubo está cerrado en uno de sus extremos (b) el tubo está abierto en ambos extremos.

Rpta.: a) $f_n = \frac{f}{4L}(2n+1), n = 0,1,2 \ldots$ Hay seis oscilaciones

b) $f_n = \frac{f}{4L}(n+1)$, $n = 0,1,2 \ldots$ Hay seis oscilaciones

23 Un tren desplaza a rapidez constante de $10\,\text{m/s}$ y en línea recta. Si el silbato de la locomotora vibra con una frecuencia de 660 Hz. ¿Con qué frecuencia escucha el silbato un joven parado en la estación? (Desprecie los efectos de amortiguamiento del sonido y considere $V_{sonido} = 340\,\text{m/s}$)

Rpta.: $f = 800\,\text{Hz}$

24 ¿Cuál es la velocidad y la dirección de propagación de cada una de las siguientes ondas?

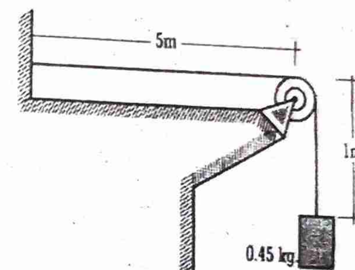
a) $\Psi,(x,t) = A(X+2t)^2$

b) $\Psi,(x,t) = P(Qx - Rt - D)$

c) $\Psi,(x,t) = Be^{-(Ax^2+AP^2t^2-2APxt)}$ donde A, B, P, Q, R y D son constantes.

Rpta.: a) $v = 2$ en la dirección negativa del eje X
b) $v = R/Q$ en la dirección positiva del eje X
c) $v = P$ en la dirección positiva del eje X

25 Una cuerda tiene masa de 0,3 kg y una longitud de 6 m. La cuerda se mantiene tensa suspendiendo un bloque de 2 kg de un extremo. Determine el tiempo que tarda un pulso en viajar desde la pared hasta la polea ($g = 10\,\text{m/s}^2$)



Rpta.: $t = 0,25$ segundos.

26 Un cable flexible de 30 *m* de longitud y 8 kg de peso se ata entre dos postes con una tensión de 200 *kg*. Si se golpea al cable en uno de sus extremos. Hallar el tiempo que tardará la onda transversal producida en alcanzar el otro extremo y regresar al punto de partida.

Rpta.: $t = 0.7$ seg

27 Un observador que está a la orilla del mar oye el sonido de la sirena de un barco. Cuando el observador y el barco están en reposo, el sonido que percibe aquél corresponde a la frecuencia de 420 Hz (ciclos/s).
Cuando el barco se mueve en la dirección del observador, la frecuencia del sonido que éste percibe es de 430 Hz. Determinar la velocidad del barco, en el primer y segundo caso, si la velocidad del sonido en las condiciones del experimento era igual a 330 m/s.

Rpta.: $V_s = 4,0\,m/s$

28 Una cuerda sometida a 15 *kg* de tensión produce una diapasón 8 pulsaciones por segundo. Cuando esta cuerda se tensa hasta 16 *kg* resulta afinada al unísono con el diapasón. Hallar el número de vibraciones del diapasón.

Rpta.: a) $f_2 = 252\,H_z$

29 Una pieza de artillería dispara un proyectil sobre un blanco situado a una distancia de 800 m. El ruido de la explosión se oye 5 segundos después de que el proyectil sale de la boca. Hallar la velocidad media del proyectil, siendo la temperatura del aire de 20°C.

Rpta.: $\upsilon = 303\ m/s$

30 Una fuente sonora S, emite al aire libre una onda esférica amortiguada con el tiempo de potencia $P = P_0 e^{-\alpha t}$, donde $P_0 = 10^{-4}\ W$, $\alpha = 0.1\text{seg}^{-1}$. Hállese al cabo de cuánto tiempo deja de oírse la oscilación a una distancia de 2 m, cuando la intensidad del límite audible es $10^{-12}\ W/m^2$.

Rpta.: $t = 145$ seg.

31 Un tren rápido se mueve a la velocidad de 30 m/s. La frecuencia de la nota emitida por el silbato de la locomotora es 50 Hz (ciclos/s). Si sopla el viento de 9 m/s en el mismo sentido en que se mueve la locomotora. ¿Cuál es la longitud de onda en las ondas sonoras?: a) delante b) detrás de la locomotora?. ¿Cuál sería la frecuencia del sonido percibido por un observador inmóvil; c) delante, d) detrás de la locomotora?. ¿Qué frecuencia percibiría un viajero de otro tren que llevase una velocidad de 15 m/s y e) se aproximase, f) se alejase del primero? Tómese para velocidad del sonido $C = 330$ m/s

Rpta.: a) 0,613 m   b) 0,702 m   c) 549 Hz
d) 547 Hz   e) 573 Hz   f) 436 Hz

32 Un avión de retropropulsión a chorro vuela con una rapidez de 600 m/s y a una altura de 1,7 km. ¿A qué distancia se encuentra el avión de una persona, cuando ésta escucha el ruido producido por sus motores? ($V_{son} = 340$ m/s)

Rpta.: $d = 2$ km

33 La ecuación de cierta onda transversal es $y = 0{,}02\ \text{sen}\, 2\pi\left(\frac{t}{0{,}01} - \frac{x}{0{,}3}\right)$ donde x e y se mide en metros y t en segundos; halle la velocidad de propagación de la onda.

Rpta.: $\vec{V} = 100(+\hat{i})$ m/s

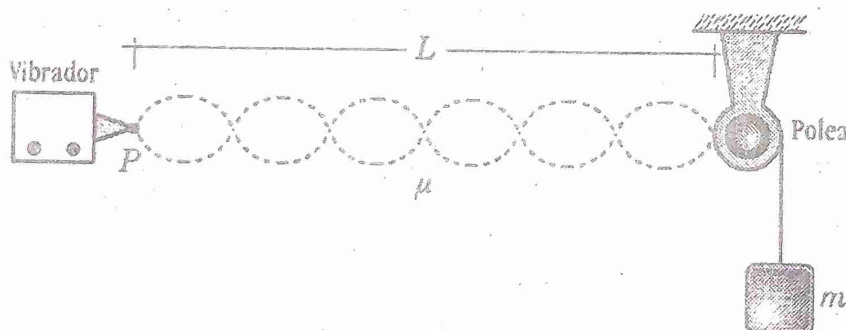
34 La Ecuación de una onda transversal en una cuerda es $y = 5\cos(6t - 3x)$ con x, y en cm. y t en segundos; luego la rapidez de propagación, en m/s es igual a:

Rpta.: $V = 0{,}01$ m/s

35 Una cuerda de violín tiene una longitud de 0.350 m y se afina para un concierto en sol con $f_{sol} = 392\,\text{Hz}$. ¿Dónde debe poner el dedo la violinista para tocar un concierto en La, $f_{la} = 440\,\text{Hz}$?. Si esta posición va a permanecer correcta hasta un ancho de la mitad de un dedo (es decir, dentro de 0.600 cm.), ¿cuál es el porcentaje máximo permitido de cambio en la tensión de la cuerda?

Rpta.: 32,1 cm. desde el puente 3,84%

36 En el arreglo mostrado en la figura, puede colgarse una masa de una cuerda (con una densidad de masa lineal $m = 0.002\,00\ \text{kg/m}$) que pasa sobre una polea ligera. La cuerda se conecta a un vibrador (de frecuencia constante, f), y la longitud de la cuerda entre el punto P y la polea es $L = 2.00\,\text{m}$. Cuando la masa m es de 16.0 kg. ó de 25.0 kg. se observan ondas estacionarias, pero no se observan ese tipo de ondas para cualesquiera otras masas entre estos valores.



a) ¿Cuál es la frecuencia del vibrador? (sugerencia: A mayor tensión en la cuerda menor número de nodos en la onda en la onda estacionaria).

b) ¿Cuál es la masa más grande para la cual podrían observarse ondas estacionarias?.

Rpta.: a) 350 Hz. b) 400 kg.

37 Las cadenas de las que se suspenden una columna para niños son de 2,00 m. de largo. ¿Con qué frecuencia deberá un hermano mayor empujar para hacer que la columna tenga la amplitud más grande?

Rpta.: $f = 0{,}352$ Hz

38 Dos altavoces se colocan sobre una pared a 2.00 m de distancia. Un escucha está parado directamente enfrente de uno de los dos altavoces, a3.00 m. de la pared. Los altavoces se están excitando por medio de un solo oscilador a una frecuencia de 300 Hz.

a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre las dos ondas cuando llegan al observador?

b) ¿Cuál es la frecuencia más cercana a 300 Hz a la cual el oscilador puede ajustarse de manera que el observador escuche el mínimo sonido?

Rpta.: a) 3,33 rad.
b) 283 Hz.

39 Calcule la longitud a partir de su abertura del oído externo al tímpano. Si usted considera al canal como un tubo que está abierta en un extremo y cerrado en el otro. ¿Aproximadamente con qué frecuencia fundamental esperaría usted que su oído fuera más sensible?

Rpta.: $f \cong 3k$ Hz

40 Un acorde *La* mayor consiste de las notas *La*, *Do #* y *Mi*. Este se puede tocar en un piano al teclear simultáneamente las cuerdas que tienen frecuencias fundamentales de 440.00 Hz, 554.37 Hz y 659.26 Hz. La rica consonancia del acorde está asociada con la igualdad cercana de las frecuencias de algunos de los armónicos superiores de los tres tonos. Considere los primeros cinco armónicos de cada cuerda y determine cuáles armónicos son casi iguales.

Rpta.:
- Segundo armónico *Mi* está cerca del tercero de *La*.
- El cuarto armónico de *Do* está cerca al quinto armónico de *La*.

41 Calcule la longitud de un tubo que tiene una frecuencia fundamental de 240 Hz si está a) cerrado en un extremo, y b) abierto en ambos extremos.

Rpta.: a) 0,357 m.
b) 0,715 m.

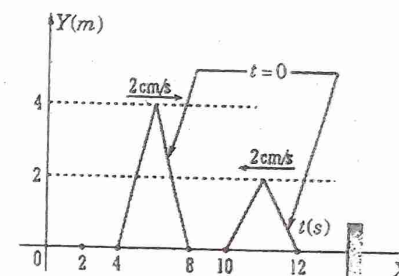
42 La longitud total de un flautín es de 32.0 cm. La columna de aire resonante vibra como un tubo abierto en ambos extremos.

a) Encuentre la frecuencia de la nota más baja que se puede tocar en un flautín suponiendo que la rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s .

b) Los agujeros abiertos laterales acortan de manera efectiva la longitud de la columna resonante. Si la nota más alta que puede tocarse en un flautín es de 4 000 Hz, encuentre la distancia entre antinodos adyacentes para este modo de vibración.

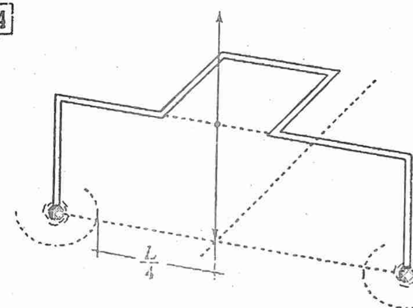
Rpta.: a) 531 Hz
b) 42,5 mm.

43 Dos pulsos *A* y *B* se mueven en direcciones opuestas a lo largo de una cuerda tensa. Entonces, es cierto que:



Rpta.: Luego del cruce, cada pulso no mantiene sus propiedades originales.

44 A un dipolo de frecuencia cíclica w se sujetan dos pequeñas esferas que distan L. Ellos generan ondas en la superficie del agua.



Determine la rapidez de propagación de las ondas en la superficie del agua.

Rpta.: $V = 2wL$

45 Una barra de aluminio de 1,60 m de largo se sostienen en su centro. Se golpea con un paño cubierto de resina para generar vibraciones longitudinales.

a) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de las ondas establecidas en la barra?

b) ¿Qué armónicos se generan en la barra sostenida de este modo?

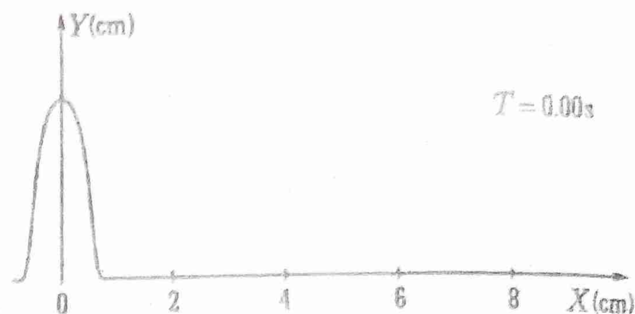
Rpta.: a) 1,59 K Hz.
b) armónicos en número impar

46 De las funciones que se presentan a continuación, solo dos pueden representar ecuaciones de onda, de ondas unidimensionales que se propagan en el eje OX:

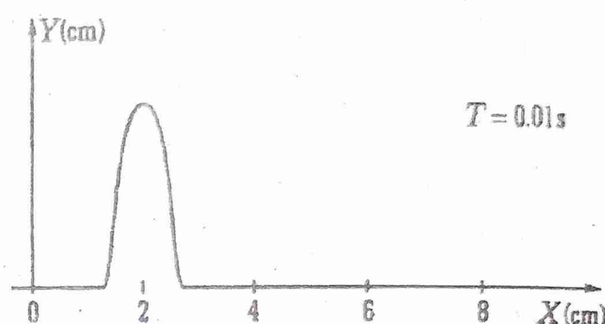
$y_1(x,t) = 5 \times 10^{-2} / [0{,}25 + (x-2t)^2]$

$y_2(x,t) = 5 \times 10^{-2} / [0{,}25 + (x^2 + 4t^2 - 2t)]$

$y_3(x,t) = 5 \times 10^{-2} / [0{,}25 + (2x+t)^2]$

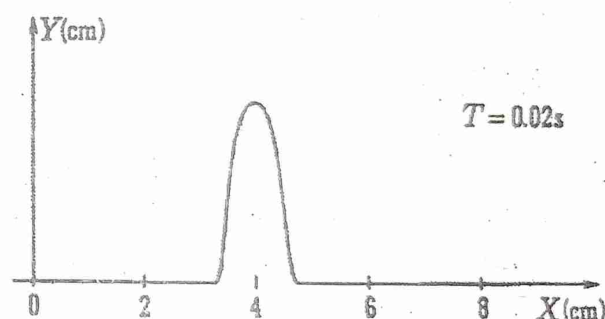


a) Indicar cuál de las funciones y_1, y_2 e y_3 son funciones de onda. Justifique su respuesta.

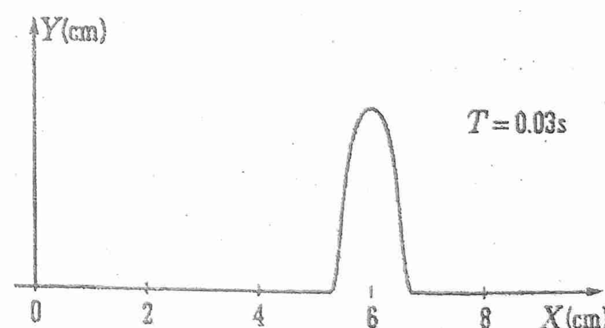


b) ¿Cuáles son las velocidades de propagación de dichas ondas?

c) En la figura se muestra varias fotografías de una cuerda tensa, en la cual se está propagando una onda que corresponde a una de las dos anteriores. Las "fotografías" corresponden a instantes separados 0,01 s ¿A cuál de las ondas corresponden las "fotos"?



d) ¿Podrán las dos ondas propagarse por la misma cuerda, si está sometida a la misma tensión?



Rpta.: a) y_1 e y_2 c) y_1

b) $V_1 = 2$ m/s d) Nunca

47 Los silbatos de dos trenes tienen frecuencia idéntica de 180 Hz. Cuando un tren está en reposo en la estación y toca su silbato, se escucha una frecuencia de pulsación de 2,00 Hz de un tren cercano en movimiento. ¿Cuáles son las dos rapideces y la dirección posibles que puede tener el tren en movimiento?

Rpta.: 3,85 m/s alejado de la estación.

3,77 m/s hacia la estación.

48 Con una particular posición de los dedos, una flauta suena una nota con una frecuencia de 880 Hz a 20.0°C. La flauta tiene ambos extremos abiertos.

a) Encuentre la longitud de la columna de aire.

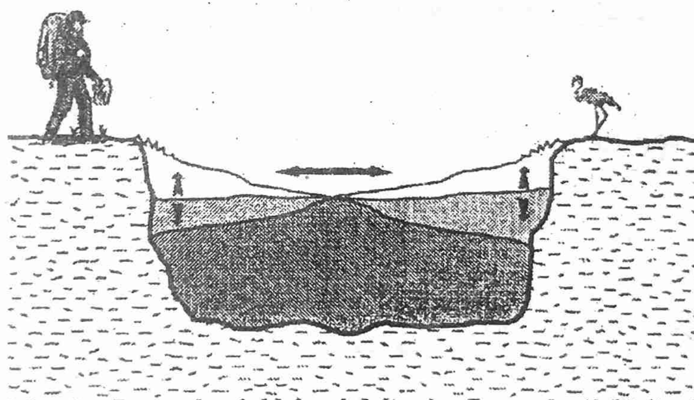
b) Encuentre la frecuencia que ésta produce durante el medio tiempo de un juego del futbol de la ultima temporada, cuando la temperatura ambiente es de −5.00°C.

Rpta.: a) 19,5 cm b) 841 Hz.

49 Un terremoto puede producir un seiche en un lago, en el agua salpica de aquí para allá de un extremo a otro con una amplitud notablemente grande y un gran período. Considere un seiche producido en un estanque rectangular de una granja, como se bosquejó en la vista de sección transversal de la figura (la figura no está dibujada a escala). Suponga que el estanque tiene 9.15 m. de largo y una profundidad uniforme. Usted mide que un pulso de onda producido en un extremo alcanza el otro extremo en 2.50 s.

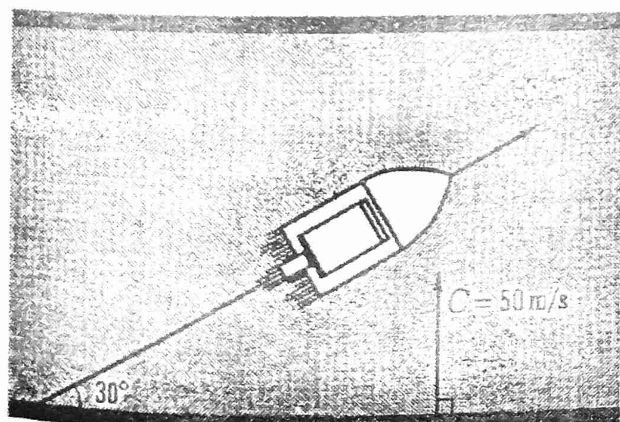
a) ¿Cuál es la rapidez de la onda?

b) Para producir el seiche usted sugiere que varias personas se paren en la orilla en uno de los extremos y juntas chapoteen con palas de nieve, moviéndose juntos en un movimiento armónico simple. ¿Qué frecuencia debe tener este movimiento?



Rpta.: a) 3,66 m/s b) 0,2 Hz.

50

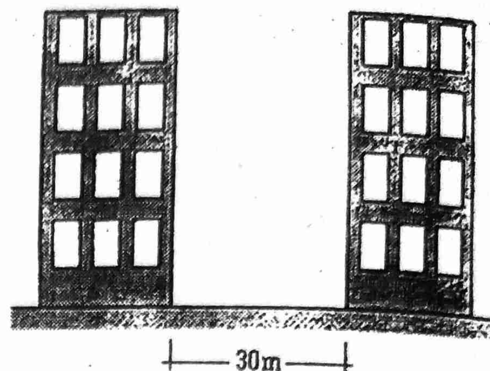


Las olas inciden paralelamente sobre la orilla con una frecuencia de 10 Hz. ¿Con qué frecuencia chocarán contra una lancha motora que se aleja de la orilla a la rapidez de 10 m/s?

La rapidez de las olas en el agua es $c = 50$ m/s

Rpta.: $f = 8$ Hz

51 determine la tercera frecuencia de resonancia de las oscilaciones del aire entre dos edificios paralelos que distan 30 m. La altura de los edificios es considerablemente mayor que esta distancia. Considere que la velocidad del sonido en el aire es 330 m/s.



Rpta.: $f = 8{,}75 \text{ Hz}$

52 La velocidad de propagación en un gas y en un líquido a la misma temperatura es de 330 m/s y 1500 m/s respectivamente. Un dispositivo, por ejemplo, un diapasón, produce ondas sonoras en ambos fluidos de 420Hz. Halle la relación de longitudes de onda en el líquido respecto del gas y la longitud de onda del sonido en cada medio.

Rpta.: a) $\dfrac{\lambda_{\text{líquido}}}{\lambda_{\text{gas}}} = 4{,}55$

b) $\lambda_{\text{gas}} = 0{,}786\,m$

c) $\lambda_{\text{líquido}} = 3{,}57$

CAPÍTULO IV

HIDROSTÁTICA

FLUIDO

Es una sustancia incapaz de resistir fuerzas o esfuerzos de corte sin desplazarse, mientras que un sólido si puede hacerlo. Los fluidos pueden ser líquidos y gases.

Algunas características de líquidos y gases:

Líquidos

a) Están sometidos a fuerzas intermoleculares que los mantienen unidos de tal forma que su volumen es definido, pero su forma no.

b) Cuando se vierte un líquido dentro de un recipiente, ocupará dentro de este un volumen igual al suyo propio sin importar la forma del recipiente.

c) Los líquidos son ligeramente compresibles y su densidad varía poco con la temperatura o presión.

d) Los líquidos tienen superficie libre.

Gases

a) Consta de partículas en movimiento que chocan unas con otras y tratan de dispersarse de tal modo que un gas no tiene forma, ni volumen definido y llenará completamente cualquier recipiente en el cual se coloque.

b) Para un gas, la P, T y el V que ocupa, se relacionan por medio de la ley de los gases, o sea, la ecuación apropiada del estado del gas.

c) Los gases son compresibles.

d) En los gases, la viscosidad aumenta con la temperatura, a diferencia de los líquidos que disminuye con la temperatura.

DENSIDAD

Para un fluido homogéneo está definida como una relación de su masa y el volumen que tiene u ocupa, depende la temperatura y presión para los gases, en cambio para los líquidos la variación es pequeña.

$D = \rho = M/V$.

PESO ESPECÍFICO

Es el cociente entre el peso del cuerpo por la unidad de volumen

$P_e = \gamma = P/V$ y $\gamma = \rho g$.

DENSIDAD RELATIVA

Es un número adimensional, es una relación de la densidad de la sustancia a la densidad del agua para sólidos y líquidos y para gases el aire.

La densidad absoluta y relativa de una sustancia tiene el mismo valor numérico, cuando la densidad se expresa en g/cm^3.

PRESIÓN

Para un fluido en reposo la fuerza en la superficie siempre debe estar dirigida perpendicularmente a la superficie, si hubiera una fuerza tangencial, las capas del fluido resbalarían una sobre las otras y el fluido no estaría en reposo. La presión es una cantidad escalar y está definida en un punto, ver fig. 25.

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}$$

a) Toda presión está relacionada con una fuerza, pero no toda fuerza está relacionada con una presión.

b) La presión es independiente de la dirección.

c) La presión es independiente de la forma del recipiente.

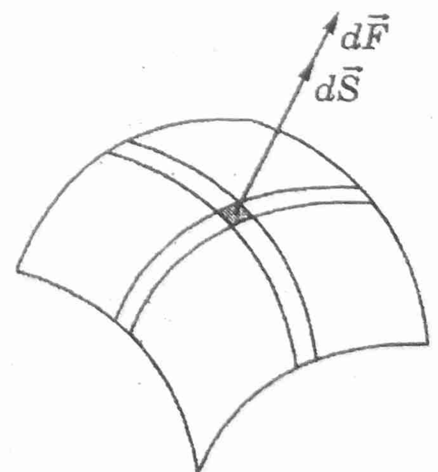


Fig. 25 *Presión*

$1\,atm = 760\,Torr = 760\,mmHg = 1.033\,Kgf/cm^2 = 1.013\,bar = 1.013 \times 10^5\,N/m^2$
$= 1.013 \times 10^5\,Pascal = 1.013 \times 10^5\,Pa$

VARIACIONES DE LA PRESIÓN EN UN FLUIDO EN REPOSO

a. Líquidos

Tomemos una porción del líquido de sección A y espesor dy. Como el fluido está en reposo, fig. 26.

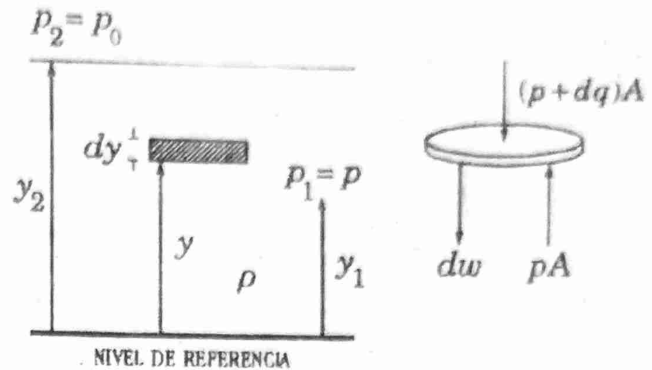


Fig. 26 *Presión de un fluido en reposo.*

$\Sigma F = 0$

$pA - (p + dp)A - dw = 0$

$pA - pA - Adp - \rho g A dy = 0$

$$dp = -\rho g dy \quad , \quad \int_{p_1 = p}^{p_2 = p_o} dp = -\rho g \int_{y_1}^{y_2} dy$$

y $\quad y_2 - y_1 = h$

$p = p_0 + \rho g h$ donde:

p_0 : Presión atmosférica del lugar.

$\rho g h$: Presión manométrica.

p : Presión absoluta o real.

Luego: la presión es la misma en todos los puntos a la misma profundidad.

b. Gases

Se procede de igual forma y se obtiene $dp = -\rho g dy$, considerando que la densidad varía con la presión, ρ proporcional a p, se considera que la temperatura no varía.

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} \, , \, dp = -g(\rho_0 / p_0) \, p \, dy$$

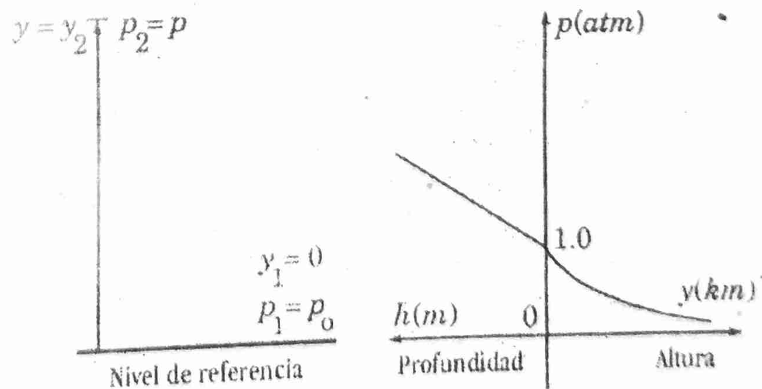


Fig. 17 *Presión en función de la altura y profundidad.*

$$\int_{p_1=p_0}^{p_2=p} \frac{dp}{p} = -\frac{g\,\rho_0}{p_0} \int_{y_1=0}^{y_2=y} dy \quad , \quad \text{donde } x = \frac{\rho_0 \cdot g}{p_0}$$

$p = p_0 e^{-\alpha y}$, $\alpha = 0.116\ Km^{-1}$, ver figura 27.

EQUILIBRIO DE LOS LÍQUIDOS NO MISCIBLES EN LOS VASOS COMUNICANTES

Al depositar el líquido ρ' en las dos ramas alcanzan el mismo nivel.

Luego se deposita el líquido ρ en la rama de la izquierda y se desnivela. Consideremos el caso de la figura 28.

$P_A = P_B$, (el líquido al mismo nivel)

$$p_0 + \rho g h = p_0 + \rho' g h'$$

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{h'}{h}$$

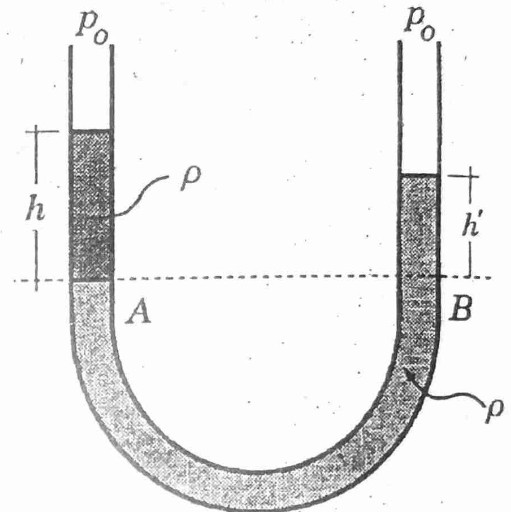


Fig. 28 *Vasos comunicantes.*

FUERZA EJERCIDA SOBRE LA PARED DE UN RECIPIENTE

Tomemos un $dF = p dA = \rho g y (b\, d y)$ $\qquad F = \rho g b \int_0^h y\, dy = \frac{\rho g b h^2}{2}$

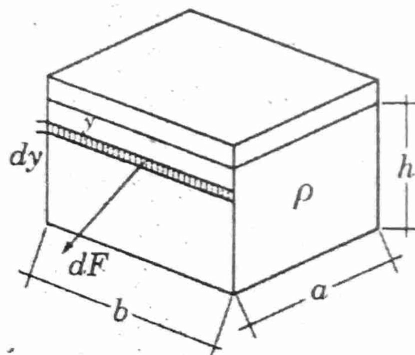


Fig. 29 *Presión sobre la pared de un recipiente.*

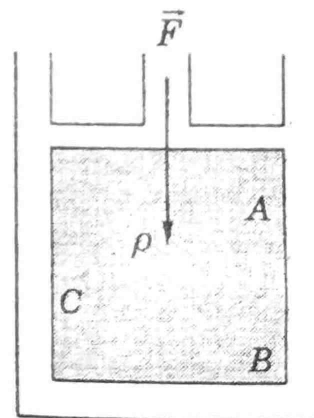


Fig. 30 *Principio de Pascal.*

PRINCIPIO DE PASCAL

Expresa lo siguiente: La presión aplicada a un fluido se transmite sin disminución alguna a todas las partes del fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene.

Veamos un ejemplo en particular.

Cuando un fluido está encerrado en un recipiente provisto de un émbolo o un pistón. Las presiones en los puntos A, B y C, son P_A, P_B y P_C.

Si provocamos un cambio repentino en la presión Δp, debido a la acción de la fuerza $\bar{F}$ en el pistón.

El principio de Pascal dice que las presiones en A, B y C, toman los valores $P_A + \Delta p$, $P_B + \Delta p$ y $P_C + \Delta p$.

PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

Se expresa así: Un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido experimenta un empuje ascendente igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo.

Consideremos un prisma de sección A y altura h, sumergido dentro de un líquido de densidad ρ y peso específico γ.

La presión en la base del bloque es γy_1 y la fuerza ascendente ejercida por el líquido sobre el bloque es: $F_1 = \rho_1 A = \gamma y_1 A$

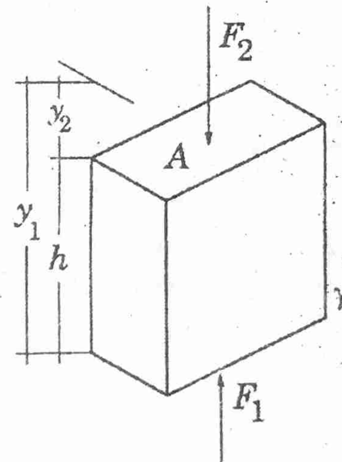


Fig. 31 *Principio de Arquímedes.*

De igual forma el líquido ejerce presión sobre la sección superior γy_2 y la fuerza está dirigida hacia abajo y vale $F_2 = p_2 A = \gamma y_2 A$.

El empuje es: $E = F_1 - F_2 = \gamma y_1 A - \gamma y_2 A = \gamma A(y_1 - y_2)$

$$E = \gamma A h = \gamma V$$

$$E = \gamma V$$

MANÓMETRO

Son aparatos destinados a medir la presión de los gases y líquidos. Se puede tener las situaciones que se indican en la fig. 32 (a), (b) y (c).

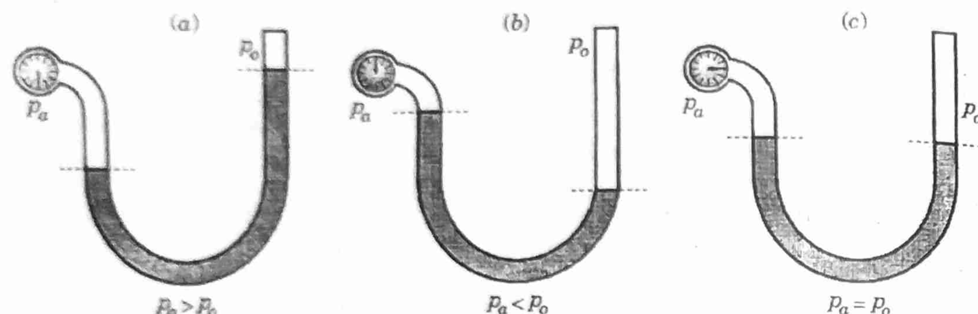


Fig. 32 *Manómetros*

FUERZAS MOLECULARES EN LOS LÍQUIDOS

Si se coloca una lámina de vidrio en un depósito de agua, y después se retira, algo del agua quedará pegada. Las fuerzas de atracción entre las moléculas de agua y las del vidrio son mayores que las fuerzas entre las moléculas de agua adyacentes. Se mide con el ángulo de contacto α (trazando una tangente en el punto de intersección de la lámina de vidrio y la superficie libre del agua), en este caso $\alpha \approx 25°$, figura 33.

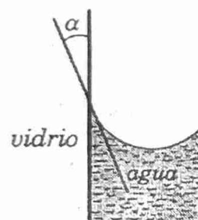


Fig. 33 *Ángulo de contacto entre el vidrio y el agua.*

Ahora, si la varilla de vidrio se coloca en un depósito de mercurio y retiramos la lámina, nada del mercurio se adhiere al vidrio. En este caso, la atracción de las moléculas de Hg con las del vidrio es menor que las fuerzas de cohesión de las moléculas de mercurio entre sí. De igual forma se halla el ángulo de contacto, trazando una tangente, en este caso $\alpha \approx 130°$. Figura 34.

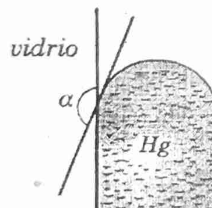


Fig. 34 *Ángulo de contacto entre el vidrio y el mercurio.*

Cuando el ángulo es pequeño, decimos que el líquido *moja* el vidrio.

TENSIÓN SUPERFICIAL

Se puede explicar en función de las fuerzas de atracción que las moléculas de un líquido ejercen entre sí.

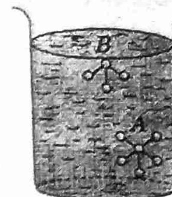


Fig. 35 *Fuerzas moleculares*

Para una molécula dentro del líquido *A*, figura 35, la fuerza media es nula, debido a las moléculas vecinas a su alrededor.

Para el caso de la molécula *B* que se halla en la superficie del líquido, experimenta fuerzas de atracción dirigidas solamente hacia abajo, si llevamos la molécula *B* hacia arriba, habrá una fuerza resultante actuando hacia abajo para impedir que escape.

DEFINICIÓN DEL COEFICIENTE DE TENSIÓN SUPERFICIAL (σ)

Es la fuerza aplicada a la unidad de longitud del borde de la película superficial del líquido: $\sigma = F/L$, también la emergía almacenada por unidad de área es igual al coeficiente de tensión superficial $\sigma = U/A$, esta expresión se deduce de la figura 36.

Se utiliza una solución jabonosa, al retirar el marco de alambre de ancho a, se forma dos películas cuyo ancho total o perímetro es $2a$.

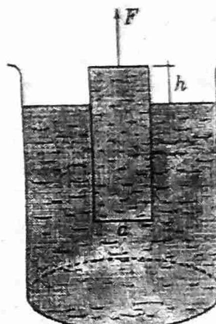


Fig. 36 *Tensión superficial*

Por definición de σ:

$$\sigma = \frac{\text{Fuerza perpendicular a la longitud}}{\text{Ancho de las dos películas}} = \frac{F_\sigma}{2a}$$

Si la altura de la película formada en el marco es h, luego el trabajo hecho para formar la película es:

$$W = F_\sigma h = 2a\sigma h = \sigma(2ah)\ .\ \text{Luego}\ \sigma = \frac{W}{2ah} = \frac{U}{A}$$

FORMACIÓN DE UNA GOTA LÍQUIDA

Consideremos la mitad de la gota y F_σ: es la fuerza hacia la izquierda debido a la tensión superficial y F_p: fuerza hacia la derecha debido a Δp. Figura 37.

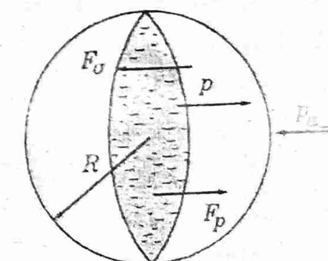


Fig. 37 *Gota líquida*

En el equilibrio, para formar la gota.

$$F_\sigma = F_p\ ,\ \sigma(2\pi R) = \Delta p\, \pi R^2$$

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}\ ,\ \text{Ley de Tate.}$$

FORMACIÓN DE UNA BURBUJA DE JABÓN

Sea la figura 38. Por definición

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2 = (p - p') + (p' - p_a) = p - p_a$$

$$\frac{2\sigma}{R} + \frac{2\sigma}{R} = \Delta p \quad \therefore \quad \Delta p = \frac{4\sigma}{R}$$

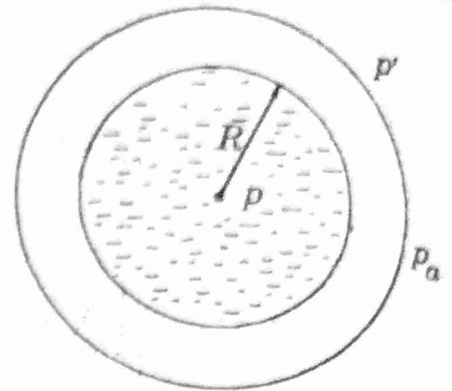


Fig. 38 *Burbuja de jabón*

ASCENSO DE LÍQUIDO EN TUBOS CAPILARES

El líquido ascenderá hasta que la fuerza de tensión superficial se equilibra con el peso del líquido que ascendió por el tubo capilar, figura 39.

Se tiene en el equilibrio: $\Sigma F_y = 0$

$F_\sigma \cos\theta - mg = 0 \quad , \quad F_\sigma \cos\theta = mg$

$2\pi r \sigma \cos\theta = \rho g \pi r^2 h$

$h = 2\sigma \cos\theta / \rho g r$ (Ley de Jurín)

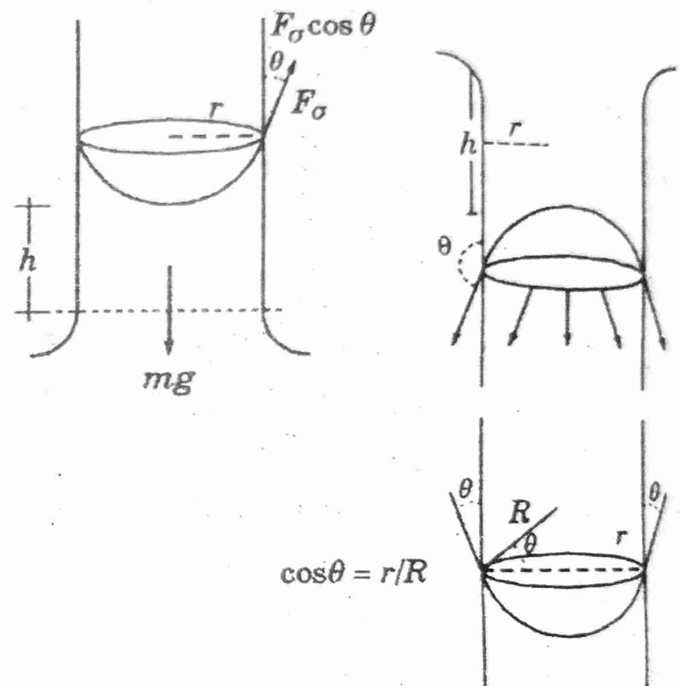


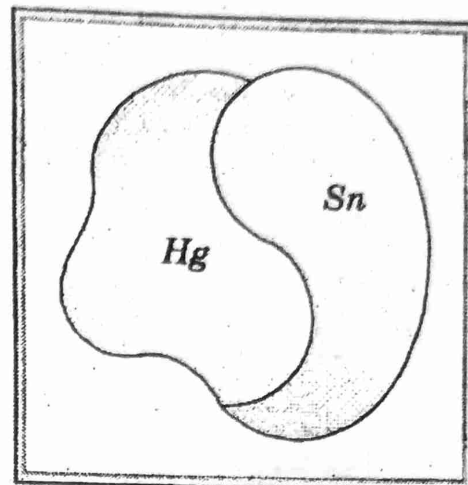
Fig. 39 *Ascenso de líquidos en capilares.*

APLICACIONES DE LA TENSIÓN SUPERFICIAL

1) Trabajo en vidrio
2) Capilaridad
3) Insectos que caminan sobre el agua
4) Tejidos Impermeables
5) Flotación de minerales
6) Teñido de ropa

PROBLEMAS RESUELTOS

01 Hallar la densidad de la amalgama de estaño, sabiendo que en ella el peso del mercurio es la cuarta parte del peso del estaño y que las densidades de estos metales son 13.6 (Hg) y 7.3 (Sn).



Solución:

La masa del cuerpo $m_c = m_{Hg} + m_{Sn}$

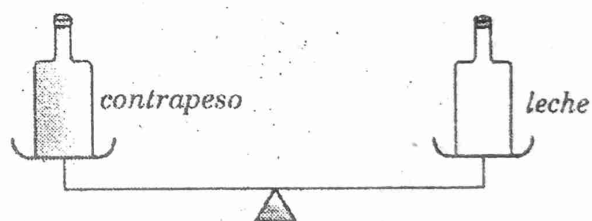
El volumen del cuerpo $V_c = V_{Hg} + V_{Sn}$

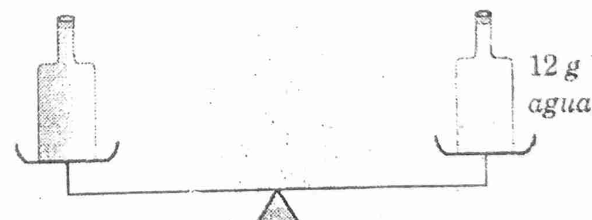
Como dato $m_{Hg} = \frac{1}{4} m_{Sn}$, la densidad del cuerpo (amalgama)

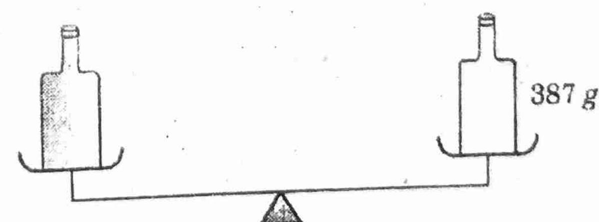
$$D = \frac{m_c}{V_c} = \frac{m_{Hg} + m_{Sn}}{V_{Hg} + V_{Sn}} = \frac{\frac{1}{4}m_{Sn} + m_{Sn}}{\frac{m_{Hg}}{\rho Hg} + \frac{m_{Sn}}{\rho Sn}} = \frac{\frac{5}{4}m_{Sn}}{\frac{m_{Sn}}{4\rho Hg} + \frac{m_{Sn}}{\rho Sn}} = 8.04$$

$$D = 8.04\ g/cm^3$$

02 Un frasco lleno de leche colocado sobre uno de los platillos de la balanza está equilibrado con un contrapeso. Si se reemplaza la leche por agua, es preciso agregar 12 g del lado de la botella para restablecer el equilibrio, si se coloca el frasco vacío y seco sobre el mismo platillo, es preciso poner a su lado 387 g para establecer el equilibrio. ¿Cuál es el peso específico de la leche?







Solución:

En equilibrio, primera figura:

$$A = P_{frasco} + P_{leche} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

En equilibrio, segunda figura: $A = P_F + P_{agua} + 12$ .... (2)

En equilibrio, tercera figura: $A = P_f + 387\,g$ .... (3)

De (1) y (3) se obtiene: $P_{leche} = 387\,g$

De (1) y (2) se obtiene: $P_{agua} = 375\,g$

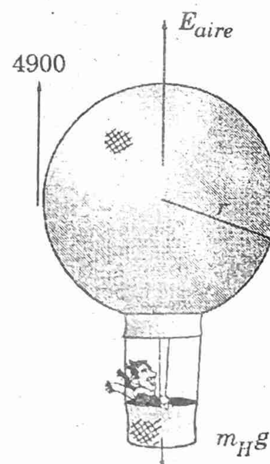
Peso específico de la leche $P_e = \frac{P_L}{V_L}$, $V_L = V_{agua}$

Como la densidad del agua es $1\,g/cm^3$, el volumen del agua

$V_{agua} = 375\,cm^3$, luego $P_e = 387/375 = 1.032$

$P_e = 1.032\,g/cm^3$

(03) A un ingeniero se le asigna la tarea de diseñar un globo esférico cuya capacidad bruta de carga sea de 4,900 N, lo que corresponde a una masa de 500 Kg que incluye la masa del propio aeróstato. El globo se llenará con hidrógeno. Hallar el radio mínimo que deberá tener el globo para levantar esa carga total. $(\rho_{aire} = 1.293\,Kg/m^3)$, $(\rho_H = 0.090\,Kg/m^3)$



Solución:

$\Sigma F = 4{,}900$, $E_{aire} - m_{Hg} = 4{,}900$

$Vg\rho_A - Vg\rho_H = 4{,}900$

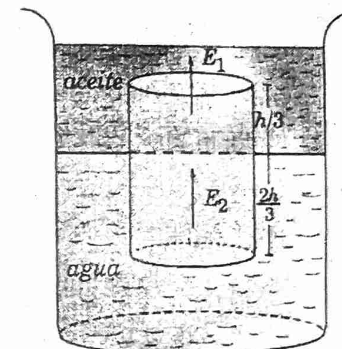
$Vg(\rho_A - \rho_H) = 4{,}900$, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$r = \left(\frac{3 \times 4{,}900}{4\pi g(\rho_A - \rho_H)}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 4.63m$, $r = 4.63m$

(04) Un recipiente contiene una capa de agua sobre la que flota una capa de aceite $0.8g/cm^3$. Un objeto cilíndrico de densidad desconocida ρ cuya área en la base es a y altura h, se deja caer al recipiente, quedando a flote finalmente cortando la superficie de separación entre el aceite y el agua, sumergido en esta última hasta la profundidad de $2h/3$. Hallar la densidad del objeto.

Solución:

Como existe el equilibrio $E_1 + E_2 = mg$ donde E_1 y E_2 son el empuje del aceite y del agua, respectivamente.



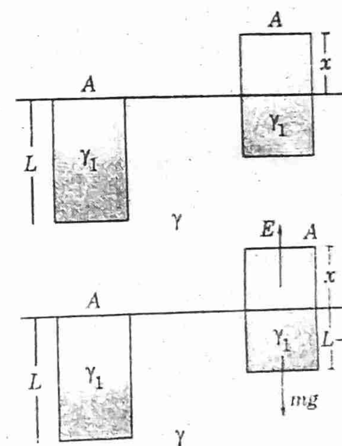
$$\rho_1 g a \tfrac{h}{3} + \rho_2 g a \tfrac{2}{3} h = \rho g a h$$

Simplificando $ah\rho = \frac{ah}{3}(\rho_1 + 2\rho_2)$

$\rho = \frac{1}{3}(0.8 + 2 \times 1) = 0.93$

$\rho = 0.93\,g/cm^3$

(05) Un prisma de longitud L y peso específico $\gamma_1 = \frac{3}{4}\gamma$ se sujeta en la posición indicada. Al soltar el prisma sobresale de la superficie del líquido. Hallar la altura máxima que alcanza y el tiempo que en ello emplea.



Solución:

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son el empuje y el peso:

$$\Sigma F = ma = E - mg$$

$$(L - x)A\gamma - AL\gamma_1 = ma$$

Simplificando: $a = \frac{\gamma}{\gamma_1} - 1 - \frac{\gamma x}{L\gamma_1}$, se observa que es variable y depende de x:

Se sabe $vdv = adx$, $vdv = \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - 1 - \frac{\gamma x}{L\gamma_1}\right)dx$ integrando

$$v^2 = 2g\left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - 1\right)x - \frac{2\gamma g}{2L\gamma_1}x^2$$

La elevación máxima se alcanza cuando $v = 0$ y $\gamma_1 = \frac{3}{4}\gamma$

$$0 = 2g\left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - 1\right)x - \frac{2\gamma g}{2L\gamma_1}x^2 \quad , \quad x_1 = \frac{L}{2}$$

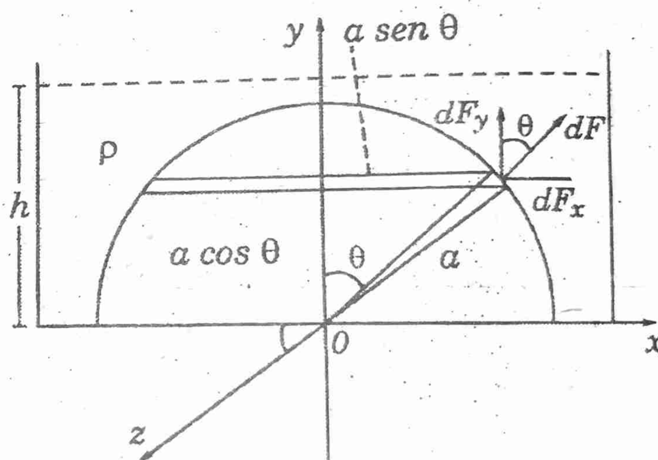
Para hallar el tiempo empleado se usa: $v^2 = -\frac{4g}{3L}x^2 + \frac{2}{3}g\,x$

Integrando, poniendo límites y sabiendo que: $v = dx/dt$

$$\int_0^{\frac{L}{2}} dx/\sqrt{(-4g/3L)x^2 + (2g/3)x} = \int_0^t dt \quad , \quad -\sqrt{3L/4g}\,\text{sen}^{-1}\frac{\left(\frac{-8gx}{3L}+\frac{2g}{3}\right)}{\frac{2}{3}g}\Bigg]_0^{L/2} = t$$

Valorando y simplificando se obtiene: $t = \pi\sqrt{3L/4g}$

06 Un hemisferio sólido de radio a reposa al fondo de un depósito que contiene agua de densidad ρ hasta una altura $h > a$. Suponiendo que haya aire a la presión atmosférica P_0 atrapado entre el lado plano del hemisferio y el fondo del depósito. Hallar la fuerza vertical inicial total que se requiere para elevar el hemisferio. Despreciar el peso del hemisferio.



Solución:

Las componentes de las fuerzas en la dirección X y Z se anulan

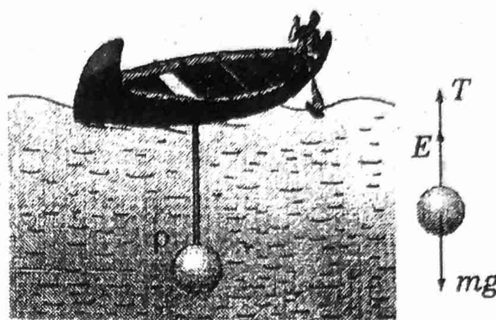
$$F_x = \int dF\,\text{sen}\,\theta = 0 = F_z$$

Sólo existe la componente en el eje F_y que es el valor de la fuerza pedida.

$$F_y = \int p\,dA\cos\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho g(h - a\cos\theta)\,(2\pi a^2 \text{sen}\,\theta\, d\theta)\cos\theta$$

$$F_y = \pi a^2 \rho g(h - 2a/3)$$

(07) Una esfera de hierro ($\rho_h = 7.6 \times 10^3\, Kg/m^3$) y volumen $0.5\, m^3$ cuelga del fondo de una barca, como se indica en la figura. Si el agua es salada y $\rho_a = 1.4 \times 10^3\ Kg/m^3$. Hallar la tensión de la cuerda.



Solución:

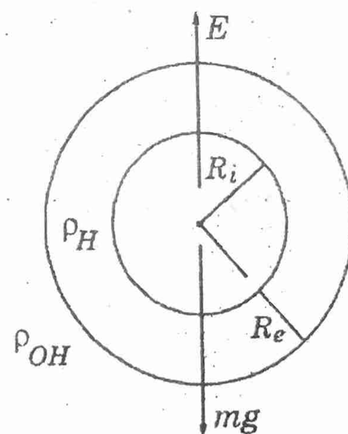
Las fuerzas que actúan sobre la esfera son su peso, la tensión de la cuerda (T) y el empuje (E), como la esfera está en equilibrio:

$$\Sigma F = T + E - mg = 0$$

$$T = mg - E = \rho_H V_0 g - \rho_a V_0 g = V_0 g(\rho_H - \rho_a)$$

$$T = 0.5 \times 9.8(7.6 - 1.4) \times 10^3\ \ N = 30{,}300N$$

(08) ¿Cuál debe ser la relación entre los radios interior R_i y exterior R_e de una esfera de hierro hueca $\rho_H = 7.6 \times 10^3\ Kg/m^3$, para que flote totalmente sumergida en alcohol $\rho_{OH} = 0.9 \times 10^3\ Kg/m^3$.



Solución:

Las únicas fuerzas que actúan sobre la esfera son el peso y el empuje, que permite el equilibrio

$$\Sigma F = E - mg = 0 \ \ ,\ \ E = mg$$

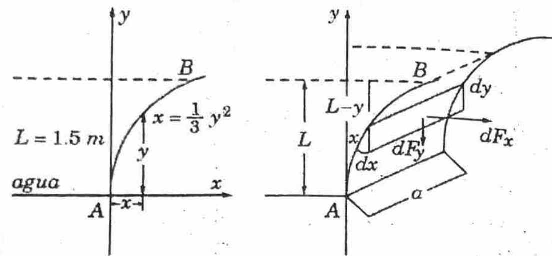
$$\rho_{OH}\, \tfrac{4}{3}\pi R_e^3 g = \rho_H\, \tfrac{4}{3}\pi\,(R_e^3 - R_i^3)g$$

Usando la relación $\quad x = R_i / R_e$

$$900 = 7600\,[1 - x^3]$$

$$x = 0.96$$

09 Una compuerta de sección parabólica AB está articulada en A e inmovilizada en B, como se indica en la figura. Si la compuerta tiene una anchura de $a = 3m$. Hallar las componentes de la fuerza que produce el agua al actuar sobre la compuerta.



Solución:

Hallemos la componente anular de la fuerza en la dirección del eje X:

$$dFx = \rho dA = pg\,(L-y)(a\cdot dy) \quad ; \quad Fx = pga\left[L\int_0^L dy - \int_0^L y\cdot dy\right] = \tfrac{1}{2}aL^2$$

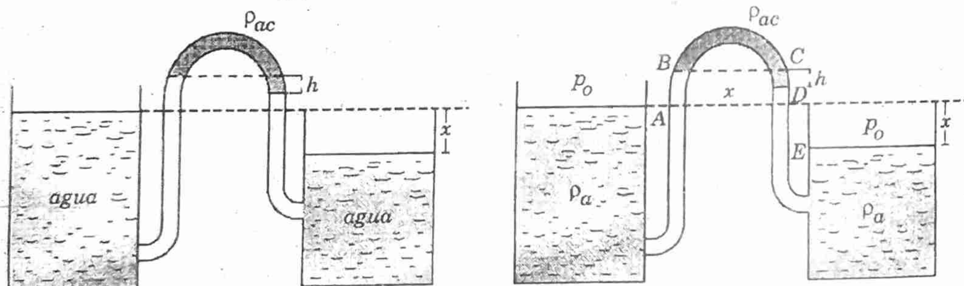
La componente en dirección Y:

$$dFy = pdA = pg(L-y)adx \ \text{ como } x = y\tfrac{2}{3} \ ; \ dx = \tfrac{2}{3}ydy$$

$$Fy = pga\int_0^L (L-y)dx = ga\int_0^L (L-y)\tfrac{2}{3}\,y\,dy = \tfrac{2}{3}$$

$$ga\left[L\int_0^L ydy - \int_0^L y^2\,dy\right] = Fy = \tfrac{1}{9}gaL^2$$

10 El manómetro que se muestra en la figura se utiliza para medir la diferencia de nivel de agua entre los dos tanques. Calcular esta diferencia x, sabiendo la densidad del aceite ρ_{ac} y del agua ρ_a.



Solución:

La incógnita del problema es hallar x. Sea x' la altura que se indica. Por ser el líquido igual en ambos ramales y estar en reposo se tiene $P_B = P_C$, $P_A = p_0$, $P_E = p_0$

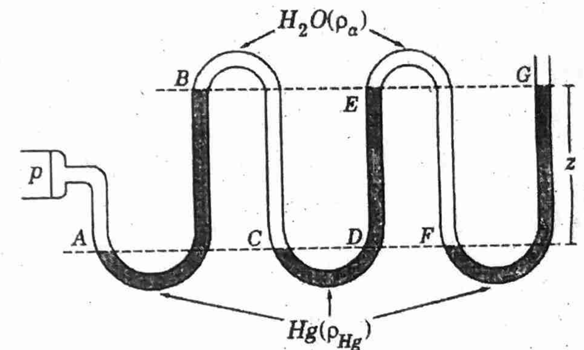
Luego:

$$P_B + \rho_{ac}gh + \rho_a gx' = P_A = p_0 \ \text{.................. (ramal de la izquierda)}$$

$$P_C + \rho_{ac}gh + \rho_a gx' + \rho_a gx = P_E = p_0 \ \text{........ (ramal de la derecha)}$$

Igualando las dos últimas expresiones se halla: $x = \frac{\rho_a - \rho_{ac}}{\rho_a}h$

11 Se desea medir la presión p del caldero, para lo cual se ha colocado un manómetro diferencial de 3 ramas (sifones).



Solución:

Como el líquido, agua y mercurio, están en reposo, aplicamos la propiedad: el líquido que se halla en ambos ramales del sifón situados a la misma altura dan presiones iguales. $P_G = p_0$

$$P_G + \rho_{Hg}gz = P_F \ , \ P_E + \rho_{Hg}gz = P_c$$

$$p = P_A = P_B + \rho_{Hg}g\,z$$

$$P_E + \rho_a gz = P_F \ , \ P_B = P_C - \rho_a gz$$

Luego:

$$p = (P_C - \rho_a g\,z) + \rho_{Hg}gz = P_E + \rho_{Hg}gz - \rho_a gz + \rho_{Hg}gz$$

$$p = P_F - \rho_a g\,z + 2\rho_{Hg}gz - \rho_a gz = p_0 + \rho_{Hg}gz - \rho_a gz + 2\rho_{Hg}gz - \rho_a gz$$

$$p = p_0 + 3\rho_{Hg}gz - 2\rho_a gz = p_0 + (3\rho_{Hg} - 2\rho_a)\,gz$$

12 Para una presión manométrica en A de $-0.12\ Kg/cm^2$, hallar la densidad relativa ρ_r del líquido.

Solución:

Nuevamente se tiene líquido en tubo de forma de U en reposo.

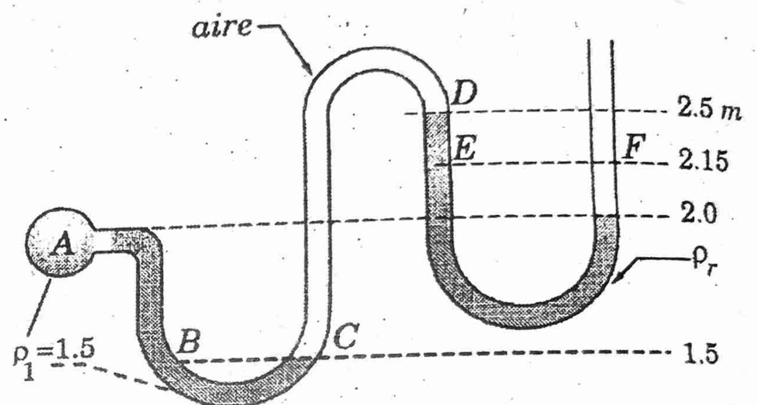
$P_D + \rho_r g 0.35 = P_E = P_F = p_0$ .... (1)

$P_A + \rho_1 g 0.5 = P_B = P_C = P_D$ .... (2)

La columna de aire ejerce una presión despreciable en comparación con los líquidos.

Además $P_{mA} = P_A - p_0$ .... (3)

$P_{mA} = -0.12\ Kg/cm^2$



De (1) y (2):

$P_A + \rho_1 g\, 0.5 = p_0 - \rho_r g\, 0.35$

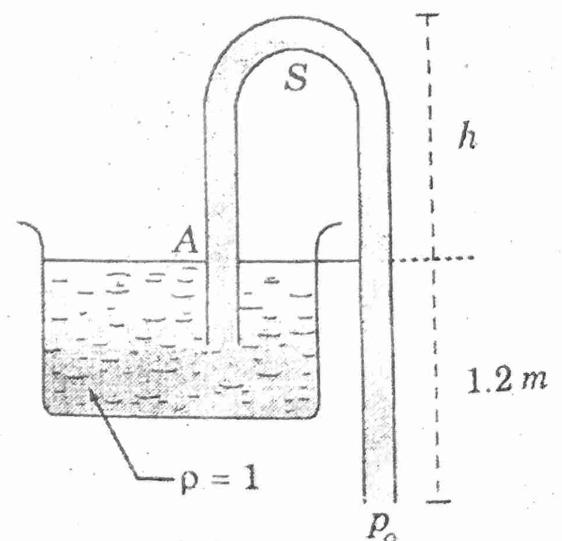
$P_a - p_0 = -\rho_1 g\, 0.5 - \rho_r g\, 0.35$ ... (4)

Expresado en N/m^2

De (3) en (4) : $-9.8 \times 0.12 \times 10^4 = -0.15 \times 10^4 \times 9.8 \times 0.5 - \rho_r \times 9.8 \times 0.35 \times 10^3$

Despejando: $\rho_r = 1.29$

(13) La presión absoluta en el interior de la tubería en S no debe ser inferior a $0.24\ Kg/cm^2$. ¿Despreciando pérdidas. ¿Hasta qué altura sobre la superficie libre A del agua puede elevarse S?



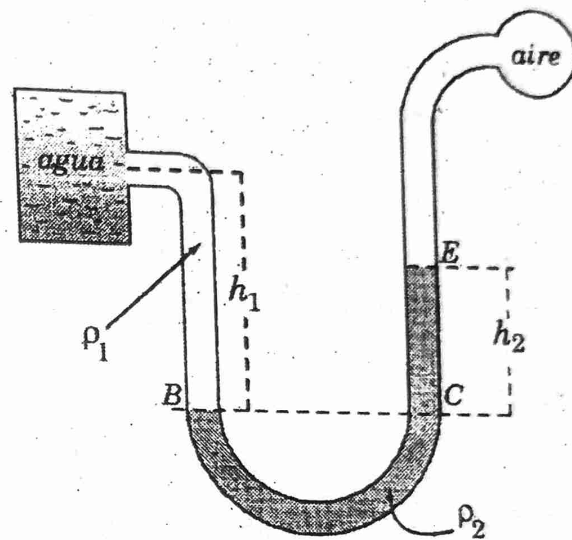
Solución:

El líquido alcanzará la altura, hasta el punto S, cuando cumpla la condición:

$P_S + \rho g(h+1.2) = P_0$ donde: $P_0 = 1.033\ Kg/cm^2$ y $P_S = 0.24\ Kg/cm^2$

Reemplazando valores se obtiene: $h = 6.73$ m

(14) Hallar la diferencia de presión entre el agua y el aire del sistema indicado por el gráfico.



Solución:

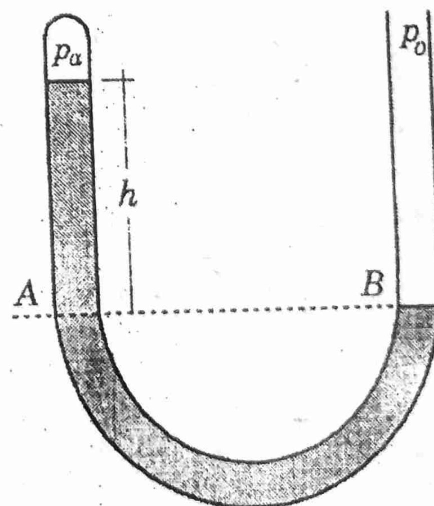
La columna de aire $(h_1 - h_2)$ es despreciable cuando se evalúa la presión equivalente, por ello la presión del aire es la misma que la del punto E.

Por equilibrio de líquido en el tubo en U, se tiene: $P_B = P_C$, P_{AG} = presión del agua, P_{Ai} = presión del aire.

$$P_{AG} + \rho_1 g h_1 = P_{Ai} + \rho_2 g h_2$$

$$P_{AG} - P_{Ai} = (\rho_2 h_2 - \rho_1 h_1)g$$

(15) Un tubo doblado en U contiene mercurio en las dos ramas. Se chupa por una de ellas y el líquido sube hasta 12 cm, con respecto al nivel de la otra rama. Hallar la presión del aire encerrado en la rama donde se succionó si el experimento se hace a la orilla del mar.



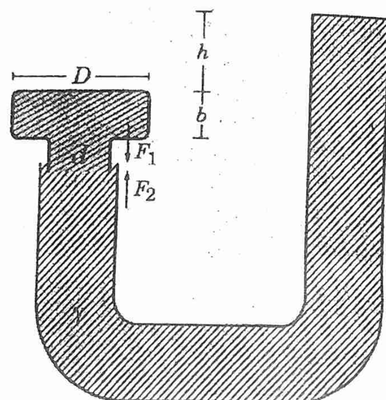
Solución:

Como el líquido está en reposo en ambos ramales:

$$P_A = P_B = P_0 \ , \ \rho_{Hg} g h = P_0$$

$$P_a = P_0 - \rho_{Hg}\ h = 0.87\ Kgf/cm^2$$

(16) Un émbolo hueco y abierto por su parte inferior, de diámetro D y altura b puede desplazarse en el brazo corto de un depósito de dos brazos como el indicado en la figura. Hallar la fuerza con que el líquido le empuja hacia arriba. (γ = peso específico del líquido).



Solución:

En el ramal de la izquierda del tubo, actúan dos fuerzas F_1 y F_2. Donde:

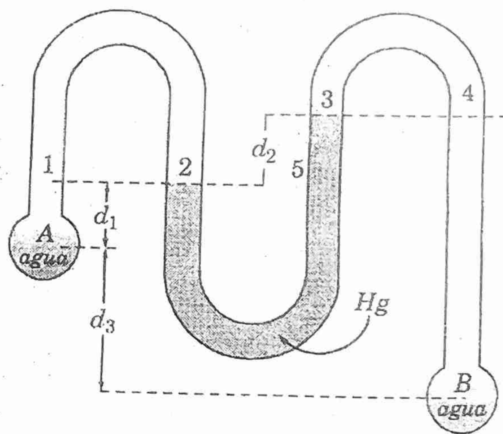
F_1 : es la fuerza que ejerce el líquido del tubo.

F_2 : es la fuerza que ejerce el líquido del émbolo.

La diferencia de fuerzas es lo que piden: $F_2 - F_1 = p_2 A_2 - p_1 A_1$

$$F_2 - F_1 = \gamma(h+b)\frac{\pi d^2}{4} - \gamma b \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\gamma\pi}{4}[(h+b)d^2 - bD^2]$$

(17) ¿Cuál es la diferencia de presiones entre los puntos A y B de los depósitos que se muestran en la figura.



Solución:

Como los líquidos están en reposo, se tiene:

$$P_1 = P_2$$

$$P_1 + \rho_a g d_1 = P_A \ ,$$

$$P_1 = P_A - \rho_a g d_1$$

$$P_3 = P_4 \ , \ P_3 + \rho_{Hg} g d_2 = P_5 \ ,$$

$$P_4 + \rho_a g(d_2 + d_1 + d_3) = P_B$$

$$P_2 = P_5 \ ,$$

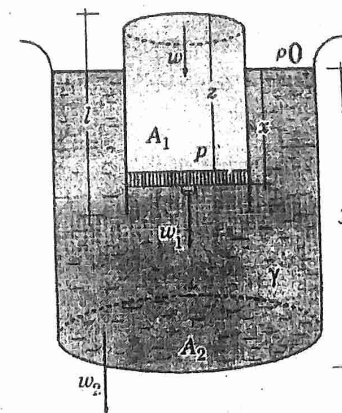
$$P_1 = P_5 = P_3 + \rho_{Hg} g d_2 = P_4 + \rho_{Hg} g d_2$$

Reemplazando en la última expresión P_1 y P_4:

$$P_A - \rho_a g d_1 = P_B - \rho_a g(d_2 + d_1 + d_3) + \rho_{Hg} g d_2$$

$$P_A - P_B = \rho_a g(d_2 + d_3) + \rho_{Hg} g d_2$$

(18) Un émbolo A_1 ajusta perfectamente en un vaso cilíndrico de peso w, lleno de aire a la presión inicial ρ_0. Todo ello se sumerge en otro depósito con agua. Calcular para el equilibrio las longitudes x, y, z siendo w_1 el peso del émbolo, w_2 el peso del líquido (γ : peso específico), y A_2 la sección del depósito mayor.



Solución:

Sea p_0 la presión atmosférica exterior y p la presión interior del depósito.

Por estar el líquido y el depósito en reposo, se tiene: $p_0 + \gamma x = p + w_1/A_1$

Como no existe variación de temperatura, se cumple:

pV = constante, $p_0/A_1 = p z A_1$.

$$z = p_0 l / p = p_0 l \Big/ \left(p_0 + \gamma x - \frac{w_1}{A_1} \right) \quad \text{.......................} \quad (1)$$

Hallando x :

$$\Sigma F = E - w + w_1 = 0 \ , \ \gamma A_1 x = w + w_1$$

$x = (w + w_1)/\gamma A_1$, reemplazando en (1)

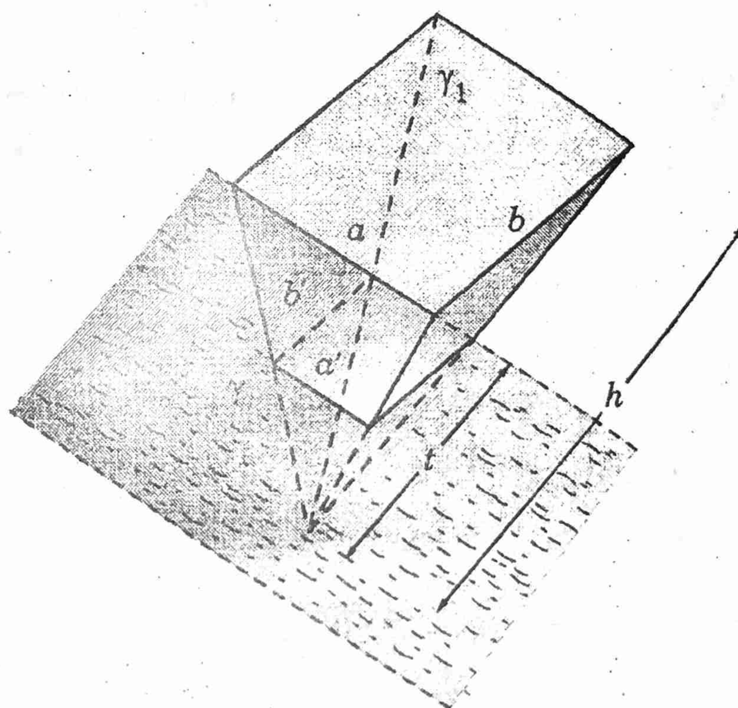
$$z = p_0\, l \Big/ \left[p_0 + \frac{w + w_1}{A_1} - \frac{w_1}{A_1} \right] = \frac{p_0\, l\, A_1}{w + p_0 A_1} \ , \ z = \frac{p_0 l A_1}{w + p_0 A_1}$$

Además: $\quad w_2 = \gamma A_2 y - \gamma A_1 x \ , \ y = \dfrac{w_2}{\gamma A_2} + \dfrac{\gamma A_1 x}{\gamma A_2}$

Usando el valor de x : $\quad y = \dfrac{w_2}{\gamma A_2} + \dfrac{A_1}{A_2}\dfrac{w + w_1}{\gamma A_1}$

$$y = (w + w_1 + w_2)/\gamma A_2$$

(19) Hallar la inmersión t de una pirámide γ_1 que flota con el vértice hacia abajo en agua γ, según la figura.



Solución:

El equilibrio se halla: $E = w$

$$\left(\tfrac{1}{3} a'b't \right) \gamma = \tfrac{1}{3} a\, b\, h\, \gamma_1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (1)$$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{h}{t'} \ , \ \frac{b}{b'} = \frac{h}{t'} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (2)$$

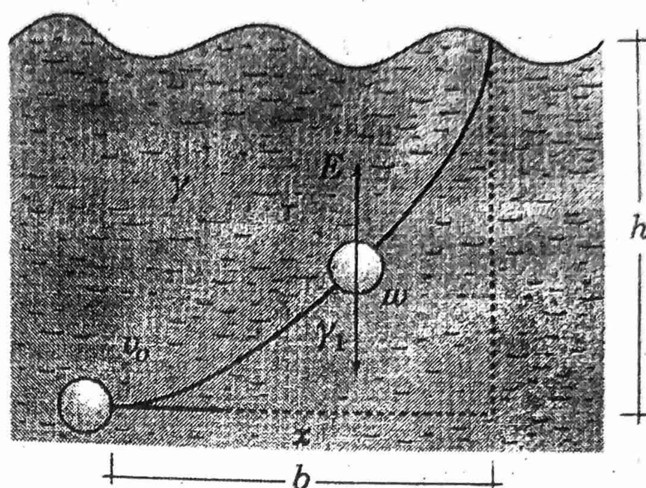
Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{a'}{a}\frac{b'}{b} t\gamma = h\gamma_1 \ ,$$

$$\frac{t\,t}{h\,h} t\gamma = h\gamma_1 \ ,$$

$$t = h\,(\gamma_1/\gamma)^{\frac{1}{3}}$$

(20) Una pequeña bola de madera de peso específico $\gamma_1 = 0.5$ se sujeta al fondo de una corriente de agua de $h = 4\text{m}$ de profundidad y que lleva una velocidad $v_o = 1.5\ m/s$. (a) ¿Qué curva describe el centro de la bola cuando se le deja libre) (b) ¿A qué distancia b aparece, contando desde la vertical inicial? (se prescinde del rozamiento con el agua).



Solución:

a) Hallemos que fuerza actúa sobre la bola

$\Sigma F = E - w = ma$

$V_c\gamma - V_c\gamma_1 = ma$, se observa que la aceleración es constante: $a = g\left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - 1\right)$

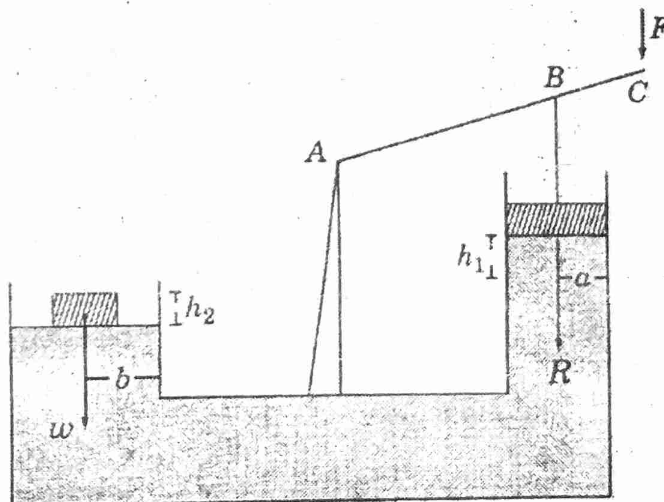
$a = 9{,}8 m/s^2$

Luego, para una posición intermedia: $x = V_0 t$, $y = \frac{1}{2}at^2$, $y = \left(\frac{a}{2V_0^2}\right)x^2$, que es la ecuación de la parábola, la cual describe la bola.

b) Para hallar el tiempo: $h = \frac{1}{2}at^2$, $t = \sqrt{2h/a} = 0.9\,seg$

c) La distancia $b = v_0 t = 1.35\ m$.

(21) (a) Determine la fuerza que hay que aplicar a una palanca que acciona al émbolo menor de una prensa hidráulica para levantar una carga de $10^3\,Kg$ aplicada al émbolo mayor, se sabe que los radios de los émbolos están en razón de 7 a 3 y que los brazos de palanca de 5 a 2. Considere el líquido incomprensible. (b) Hallar la altura que ha subido la carga cuando el émbolo menor ha bajado 1 m.



Solución:

a) Se conoce: $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{5}{2}$

$w = 10^3\, Kgf$, $h_1 = 1\, m$

En equilibrio: $\Sigma_{\tau A} = 0$, $\overline{AB}R - \overline{AC}F = 0$

$$F = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} R \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Por el principio de Pascal: $p = \frac{R}{\pi a^2} = \frac{w}{\pi b^2}$

$$R = w\left(\frac{a}{b}\right)^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De (2) en (1) : $F = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} w \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{2}{5} \times 10^3 \left(\frac{3}{7}\right)^2 = 73\, Kgf$

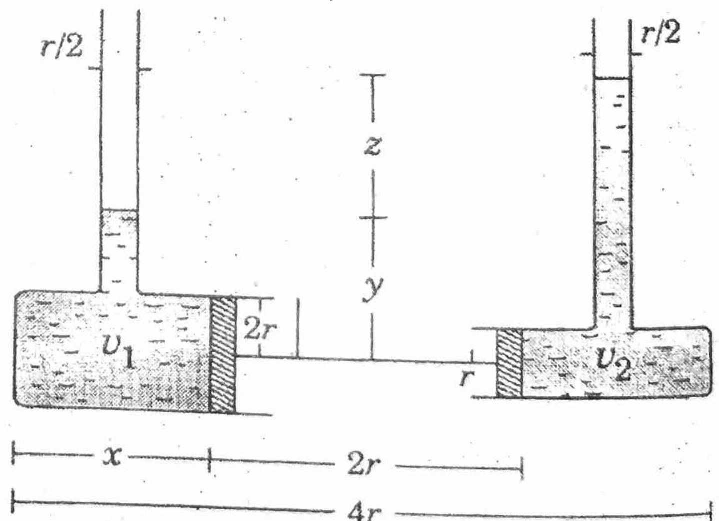
$F = 73\, Kgf$

b) Para hallar la altura que sube el émbolo mayor, consideramos que el volumen no varía: $\pi a^2 h_1 = \pi b^2 h_2$

$$h_2 = h_1\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1\left(\frac{3}{7}\right)^2 m = 0.18m$$

$$h = 18\, cm.$$

(22) En los depósitos dibujados en la figura hay la misma cantidad de agua. Si esta agua se introdujese integralmente en los tubos verticales, subiría en cada lado hasta una altura igual a 40 r. En la posición de la figura, el agua llena por completo los cilindros cerrados por los émbolos enlazados entre sí. Hallar la altura Z para la posición de equilibrio de los émbolos.



Solución:

Sea la distancia x e y que se introducen en el problema.

$V = \pi\left(\frac{r/2}{2}\right)^2 \times 40r$ (volumen inicial)

$V_1 = \pi(2r)^2 \times x + \pi\left(\frac{r/2}{2}\right)^2 (y-2r)$ .... (1)

$V_2 = \pi r^2 (4r - 2r - x) + \pi\left(\frac{r/2}{2}\right)^2 (z + y - r)$ .... (2)

Como el líquido en ambos émbolos están en reposo, las fuerzas sobre estos F_1 y F_2 deben ser iguales:

$$F_1 = p_1 A_1 = \gamma y \pi (2r)^2$$

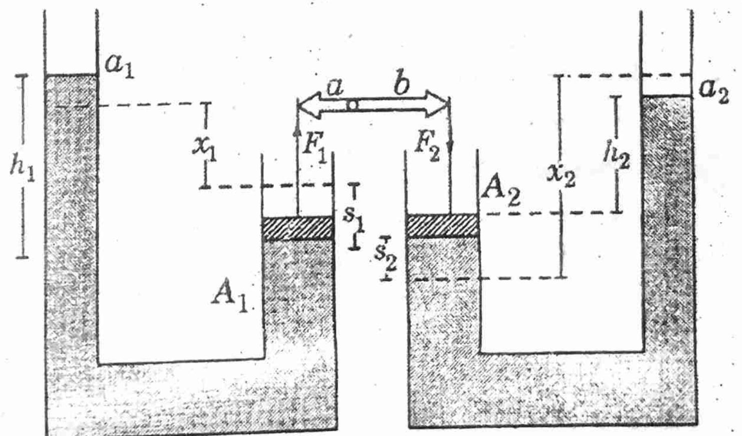
$$F_2 = p_2 A_2 = \gamma (Z + y)\pi r^2$$

y $\quad F_1 = F_2$. Por lo tanto:

$\gamma y \pi (2r)^2 = \gamma (Z + y)\pi r^2$ .... (3)

Teniendo en cuenta que los volúmenes son iguales $V = V_1 = V_2$ y usando las expresiones (1), (2), (3): $Z = 13.7\,r$

(23) Dos émbolos de áreas desiguales $A_1 = 100\ cm^2$ y $A_2 = 40\ cm^2$ colgados de una palanca giratoria alrededor de O (relación de los brazos de palanca $a{:}b$ = 1:2) y que están en equilibrio, descansan sobre las superficies de dos líquidos de idéntica naturaleza, contenidos en recipientes de dos tubos en los que inicialmente, el líquido tiene el mismo nivel a cada lado. En los tubos más delgados de éstos depósitos, cuyas secciones son $a_1 = 10\ cm^2$ y $a_2 = 4\ cm^2$, se echa líquido: en el de la izquierda hasta la altura $h_1 = 1\ m$ y



en el tubo de la derecha, hasta $h_2 = 0.6\ cm$ (a) ¿Cuánto sube S_1 el émbolo F_1, y cuánto baja S_2 el F_2? (b) ¿Qué distancias verticales x_1 y x_2 habrá entonces entre los niveles en los tubos estrechos y las caras inferiores de los émbolos?

Solución:

b) Por la segunda condición de equilibrio: $\Sigma\tau_o = 0$

$$aF_1 - bF_2 = 0$$

$$ap_1A_1 = bp_2A_2$$

$$a\gamma x_1A_1 = b\gamma x_2A_2$$

$$x_1aA_1 = x_2bA_2 \quad \text{.......................} (1)$$

Por igualdad de volúmenes:

$$A_1S_1 = a_1(h_1 - x_1 - S_1) \quad \text{.......................} (2)$$

$$A_2S_2 = a_2(X_2 - h_2 - S_2) \quad \text{.......................} (3)$$

También se cumple: $A_1S_1 = A_2S_2$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{a}{b}$$

$$S_1/S_2 = a/b \quad \text{.......................} (4)$$

De (1), (2), (3) y (4) : $\quad S_1 = a\dfrac{aA_1h_1 - bA_2h_2}{a^2A_1\left(1+\frac{A_1}{a_1}\right)+b^2A_2\left(1+\frac{A_2}{a_2}\right)}$

Reemplazando valores: $\quad S_1 = 1.82\ cm$, $S_2 = 3.64\ cm$

a) De (2) y (3):

$$x_1 = h_1 - S_1\left(1+\frac{A_1}{a_1}\right) = 79.9\ cm$$

$$x_2 = h_2 - S_2\left(1+\frac{A_2}{a_2}\right) = 100.0\ cm$$

(24) El alcohol que hay en un recipiente gotea saliendo a través de un tubo vertical que tiene 2 mm. de diámetro interior. Considerando que cada gota se desprende 1 seg. después de la anterior, hallar cuanto tiempo tardaría en salir 10 g de alcohol. El diámetro del cuello de la gota en el momento en que ésta se desprende tómese igual al diámetro interior del tubo.

Solución:

Para hallar el tiempo, es necesario calcular el número de gotas N, así: $N = Mg/w$ y por definición $\sigma = w/2\pi r$, $w = 2\pi\sigma r$.

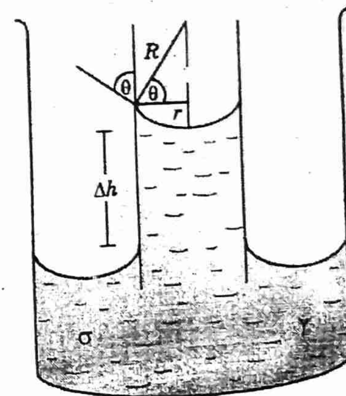
Luego: $\quad N = Mg/2\pi r\sigma = Mg/\sigma\pi d$, reemplazando valores:

$$\sigma = 0.02\ N/m^2 \quad , \quad M = 10g \quad , \quad d = 2mm \quad , \quad +N = 780 \text{ gotas}$$

Como cada gota cae cada segundo, luego el tiempo pedido será $t = 780\ seg = 13\min$

(25) En un recipiente con agua se introduce un tubo capilar cuyo diámetro interior d = 1 mm. La diferencia entre los niveles del agua en el recipiente y en el tubo capilar es 2.8 cm. (a) ¿Qué radio de curvatura tendrá el menisco en el tubo capilar. (b) ¿Cuál sería la diferencia entre los líquidos del agua en el recipiente y en el tubo capilar si este líquido mojara perfectamente?

Solución:



a) Se ha visto en teoría:

$$\Delta h = \frac{2\sigma\cos\theta}{r\gamma} \quad \text{.......................} (1)$$

$$y \cos\theta = r/R \quad \text{.......................} (2)$$

De (1) y (2): $R = 2\sigma/\Delta h\gamma$ .... (3)

donde $\sigma = 0.073\,N/m$, $\gamma = 1\ gf/cm^3$

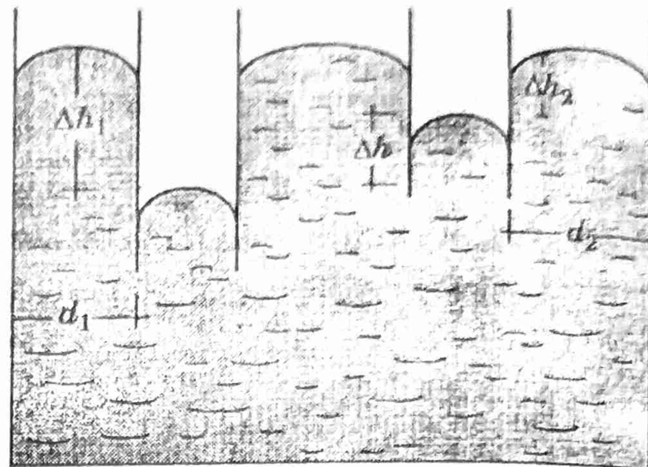
y $\Delta h = 2.8\ cm$

Reemplazando en (3): $R = 0.53$ mm.

b) Para que moje perfectamente: $\theta = 0°$ $\Delta h = 4\,\sigma/\lambda d$

Reemplazando valores y las unidades respectivas: $\Delta h = 2.98\ cm$

(26) Hallar la diferencia de alturas a que se encuentra el mercurio que hay en dos tubos capilares comunicantes cuyos diámetros respectivamente son $d_1 = 2mm$ y $d_2 = 1\,mm$. Considerar que el mercurio no moja en absoluto.



Solución:

Sabemos que la altura alcanzada por el mercurio en tubo capilar está dada por:



$$\Delta h_1 = 4\,\sigma \cos\theta / d_1\,\gamma$$

$$\Delta h_2 = 4\,\sigma \cos\theta / d_2\,\gamma$$

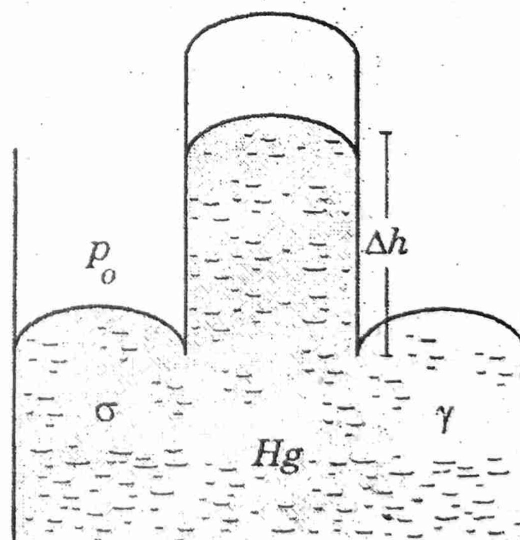
$$y\ \theta = \pi$$

$$\Delta h = \Delta h_1 - \Delta h_2 = \frac{4\sigma}{d_2\gamma} - \frac{4\sigma}{d_1\gamma} = \frac{4\sigma}{\gamma}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right)$$

Reemplazando valores: $\sigma = 0.5N/m$, $\gamma = 13.6\ g/cm^3$

$d_1 = 2mm$, $d_2 = 1mm$, $\Delta h = 7.5mm$

(27) El tubo barométrico de la figura, está lleno de mercurio y tiene un diámetro interior d, igual (a) 5 mm, y (b) 1.5 cm. ¿Se puede determinar directamente la presión atmosférica por la altura de mercurio en cada uno de los casos antedichos si la presión atmosférica es igual a 758 mm. de Hg?. Considerar que el mercurio no moja en absoluto.



Solución:

a) En el menisco hay una presión $\left(-\frac{2\sigma}{r}\right)$, porque $\theta = \pi$ en $\frac{2\sigma\cos\theta}{r}$ es un menisco convexo.

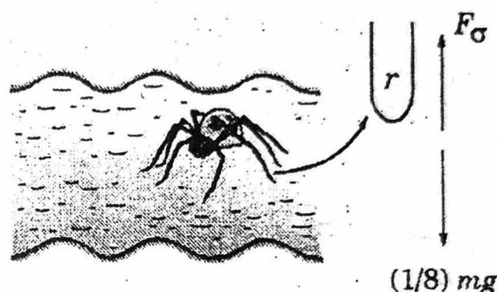
Luego: $\frac{2\sigma}{r} + \rho g \Delta h = p_0$

$$\Delta h = \frac{1}{\rho g}\left(p_0 - \frac{2\sigma}{r}\right) \text{ y } \sigma = 0.5\,N/m\,,\ \rho = 13.6\,g/cm^3$$

Reemplazando valores para (a): $2r = 5\,mm\,,\ \Delta h = 755\,mm$

b) $2r = 1.5\,cm\,,\ \Delta h = 757\,mm$

(28) Una araña de agua de 2 g de masa está apoyada sobre la superficie del agua. Suponiendo que cada pata soporta un octavo del peso de la araña, ¿Cuál es el radio de depresión hecho por cada pata?



Solución:

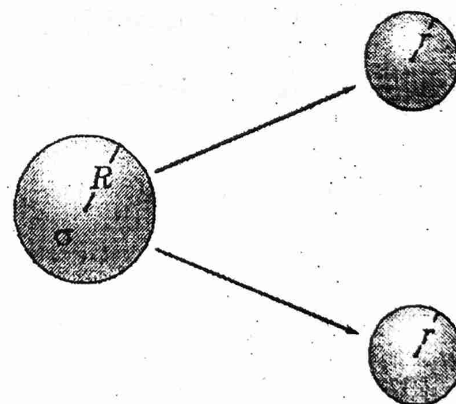
En equilibrio: $\Sigma F = F_\sigma - \frac{mg}{8} = 0$

$$\sigma 2\pi r = mg/8$$

$$r = mg/16\pi\sigma \qquad \sigma = 0.073\,N/m$$

$$r = 5.3\,mm$$

(29) ¿Qué trabajo hay que realizar contra las fuerzas de la tensión superficial para dividir una gota esférica de mercurio de 3 mm. de radio en dos iguales?



Solución:

La energía almacenada en la gota antes de la división es: $U_0 = \sigma 4\pi R^2$

La energía almacenada en ambas gotas después de la división: $U_f = 2\sigma 4\pi r^2$

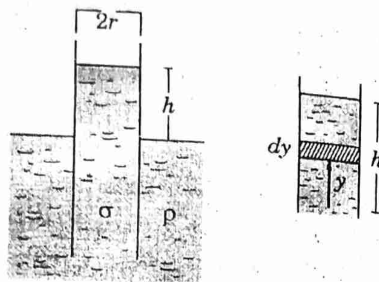
La diferencia, viene a ser el trabajo solicitado $W = U_f - U_0$

$$W = \sigma 4\pi (R^2 - 2r^2)$$

Por igualdad de volúmenes: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$, $r = R\,2^{-1/3}$

Reemplazando valores: $R = 3\,mm$, $\sigma = 0.5\,N/m$, $W = 1.47\times10^{-5}\,J$

(30) El extremo de un tubo capilar de radio r fue metido en el agua. ¿Qué cantidad de calor se desprenderá al subir el líquido por el capilar?



Solución:

Hallemos la energía potencial almacenada en el tubo debido a una altura h. Para ello tomemos un diferencial de masa:

$$dE_p = dm\,g\,y \;,\; E_p = \rho g A\int_0^h y\,dy$$

$$E_p = \tfrac{1}{2}\rho g A h^2 = \tfrac{1}{2}\rho g \pi r^2 h^2 \quad \text{......} \quad (1)$$

Hallemos el trabajo debido a las fuerzas de tensión superficial:

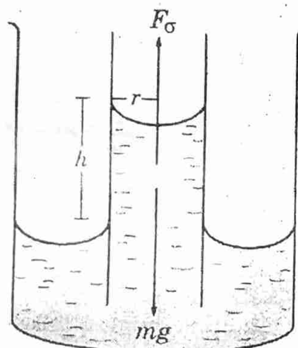
$$W = F_\sigma h = \sigma 2\pi r h \quad \text{......} \quad (2)$$

Sabemos también que un líquido sube por un tubo capilar $h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$, si el líquido moja perfectamente $\theta = 0$, $h = 2\sigma/\rho g r$ ...... (3)

De (3) en (1), (2) y sabiendo que el calor: $Q = W - E_p$

$$Q = \sigma 2\pi r h - \tfrac{1}{2}\rho g\pi r^2 h^2 = 2\pi\sigma^2/\rho g$$

(31) Un tubo capilar de 2mm. de radio interior se introduce en un líquido. Hallar el coeficiente de tensión superficial del líquido sabiendo que la cantidad de éste que se eleva por el tubo capilar pesa $9\times10^{-5}\,Kgf$.



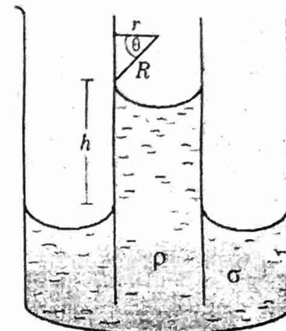
Solución:

El líquido ascenderá, hasta que se halle el equilibrio:

$$\Sigma F = F_\sigma - mg = 0 \;,\; F_\sigma = mg \;,\; \sigma 2\pi r = mg$$

$$\sigma = mg/2\pi r = \frac{9\times10^{-5}\times9.8N}{2\times3.14\times2\times10^{-3}m} = 0.07\,N/m$$

(32) En un recipiente ancho que contiene agua se introduce un tubo capilar de manera que su extremo superior sobresale del nivel del agua una altura $h = 2$ cm. El radio interior del tubo capilar es $r = 0.5\,mm$. Hallar el radio de curvatura R del menisco que se forma en el tubo capilar. Considerar que el agua moja perfectamente.



Solución:

Sobre el menisco actúa la presión cuyo valor es: $p_1 = \frac{2\sigma}{R}$, y la presión hidrostática $p_2 = \rho g h$.

El líquido ascenderá una altura h, en el instante que: $p_1 = p_2 = \rho g h = \frac{2\sigma}{R}$

$R = \frac{2\sigma}{\rho g h} = 0.75\,mm \quad \sigma = 0.073\,N/m$

(33) Se transforma agua en niebla constituida por esferillas de 3×10^{-4} cm de diámetro, a razón de $3\times10^{-3}\,m^3/\text{min}$. Hallar la potencia necesaria para formar las superficies de las partículas de la niebla. Use $\sigma_{agua} = 7.5\times10^{-3}$ gf/m.

Solución:

Sabemos que en 1 *min* = 60 *seg*, se forman $3\times10^{-3}\,m^3$ de volumen.

Para que forme una esfera de radio r, se empleara un tiempo:

$$t = (4/3\,\pi r^3\times60)/3\times10^{-3}\,seg$$

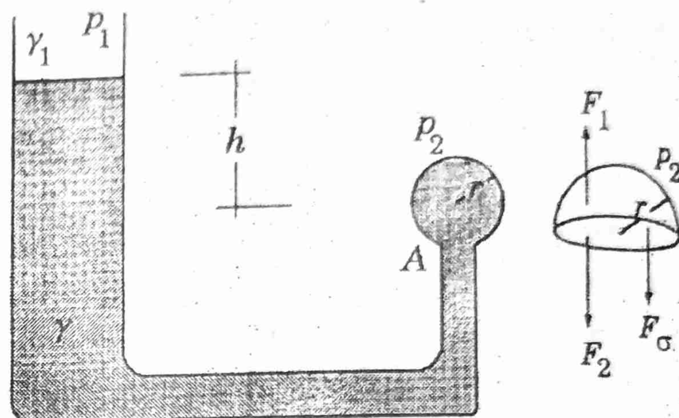
Sabemos que la energía almacenada en la superficie de la esfera es $W = \sigma S$ que viene a ser el trabajo empleado para formarla.

Luego, la potencia necesaria para formar las superficies de las partículas será:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\sigma S}{t} = \frac{\sigma 4 \pi r^2}{t}$$

Reemplazando $t = (4/3\,\pi r^3 \times 60)/3 \times 10^{-3}\,seg$, se obtiene: $P = 0.75\ Kgf/seg$.

(34) De un depósito lleno de líquido rodeado de su vapor, sale por A una gota, que toma la forma esférica correspondiente al equilibrio de su tensión capilar superficial. Las tensiones de vapor en la superficie libre del líquido y en el espacio que rodea a la gota son p_1, p_2; γ, γ_1 son los pesos específicos del líquido y del vapor. Calcular la tensión capilar superficial σ por unidad de longitud.



Solución:

Dividamos la gota por la mitad y determinemos las fuerzas que actúan y dan lugar a la esfera en equilibrio.

$$\Sigma F = F_1 - F_2 - F_\sigma = 0$$

$$F_1 = F_2 + F_\sigma \quad , \quad \pi r^2 (p_1 + \gamma h) = \pi r^2 p_2 + 2\pi r \sigma$$

Además: $p_2 = p_1 + \gamma_1 h$ .... (1)

Luego: $\pi r^2 (p_1 - p_2) + \pi r^2 \gamma h = 2\pi r \sigma$

$$\pi r^2 (p_1 - p_2) + \frac{\pi r^2 \gamma}{\gamma_1} h \gamma_1 = 2\pi r \sigma \quad \text{.......................................} \quad (2)$$

De (1) en (2)

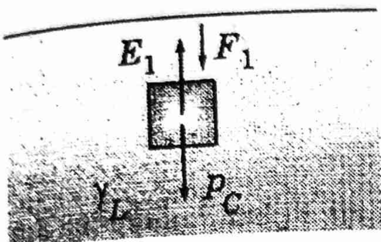
$$\pi r^2 (p_1 - p_2) + \frac{\pi r^2 \gamma}{\gamma_1}(p_2 - p_1) = 2\pi r \sigma$$

$$\pi r^2 (p_2 - p_1)\left(-1 + \frac{\gamma}{\gamma_1}\right) = 2\pi r \sigma$$

Simplificando: $\sigma = \frac{r}{2}(p_2 - p_1)\left(\frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma_1}\right)$

(35) Un cuerpo que tiene un volumen de 150 dm^3, requiere una fuerza de 20 kg para mantenerlo sumergido en el agua. Si para mantenerlo sumergido en otro líquido se necesita una fuerza de 10 kg. ¿Cuál es la densidad relativa de éste último líquido?

Solución:

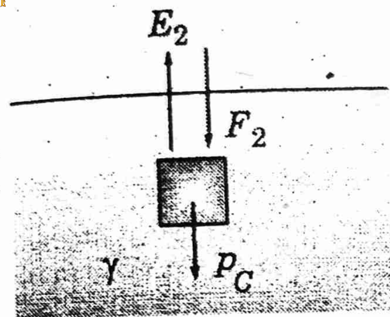


Por la condición de equilibrio: $\Sigma F = 0$

$$E_1 - F_1 - P_c = 0$$

$$P_c = V_c\gamma_L - F_1$$

$$P_c = 150 - 20 = 130\ kg$$



También se cumple:

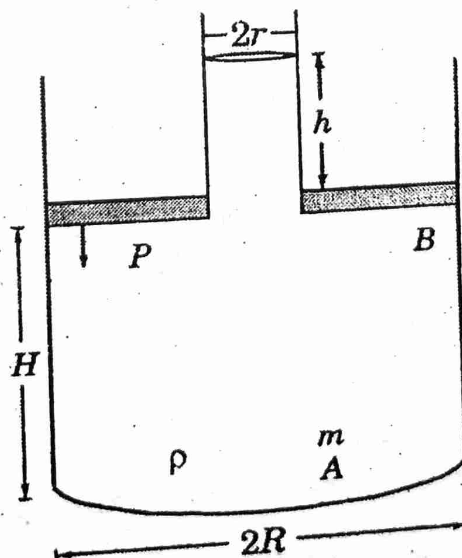
$$\Sigma F = E_2 - F_2 - P_c = 0$$

$$E_2 = P_c + F_2 = 130 + 10$$

$$E_2 = 140\ kg$$

Como $E_2 = V_c\gamma \Rightarrow \gamma = E_2/V_c$, $\gamma = 140/150 = 0.93$

(36) Un émbolo de peso W tiene la forma de un disco redondo de radio R con una abertura, en la cual se pone un tubo de paredes finas y de radio r. El émbolo puede introducirse perfectamente ajustado y sin fricción en el vaso e inicialmente se encuentra en el fondo del vaso. A qué altura H se elevará el émbolo si echamos en el tubo una masa m de agua.



Solución:

Por la condición de equilibrio:

$$\Sigma F = P_B S_B - W = 0$$

$$P_B S_B = W \;;\; \rho g h \pi \,(R^2 - r^2) = W$$

$$h = \frac{W}{\rho g \pi (R^2 - r^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Usando la equivalencia de presiones en el punto A:

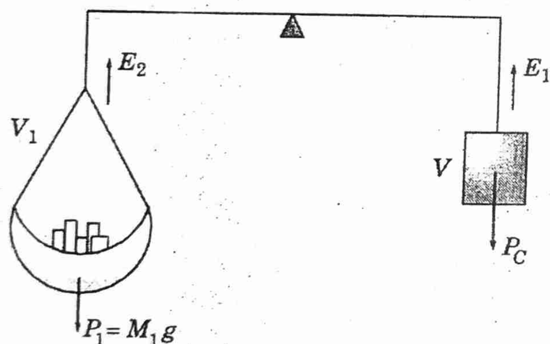
$$P_A = fg(h + H) = \frac{W + mg}{\pi R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De (1) en (2): $\rho g \left[\dfrac{W}{\rho g \pi (R^2 - r^2)} + H \right] = \dfrac{W + mg}{\pi R^2}$

Luego: $H = \left(mg - \dfrac{W r^2}{R^2 - r^2} \right) \Big/ \rho g \pi R^2$

(37) Cuál es el error cometido al pesar un cuerpo de volumen en 1 lt, si al pesarlo en el aire, utilizamos pesos de cobre de masa 800 g. El peso específico del cobre es $\gamma_1 = 8.8 g/cm^3$ y del aire es $\gamma_2 = 1.29\ g/lt$.

Solución:



Sea $E_1 = V\gamma_2$: Es el empuje del aire sobre el cuerpo

$E_2 = V_1 \gamma_2$: Es el empuje del aire sobre el cobre

Por condición de equilibrio:

$$P_1 - E_2 = P_c - E_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$P_c = P_1 + E_1 - E_2 = P_1 + V\gamma_2 - V_1\gamma_2$$

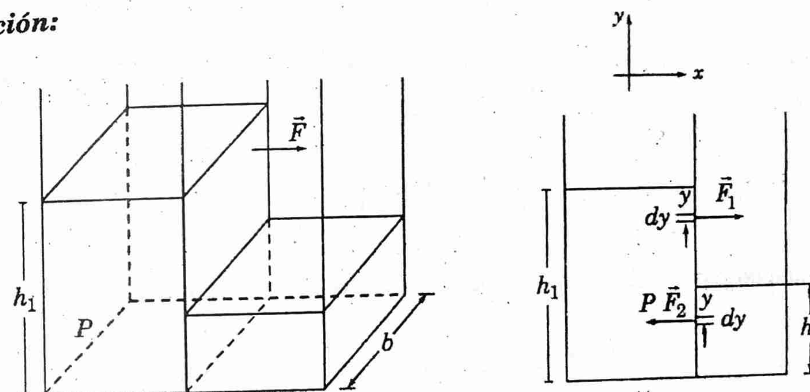
$$P_c = P_1 + \gamma_2 (V - V_1) = P_1 + \gamma_2 (V - P_1/\gamma_1)$$

reemplazando valores : $P_c = 801.17 g$

El error porcentual será : $\dfrac{P_c - P_1}{P_c} \times 100 = 0.14\%$

(38) Un estanque con agua, cuya anchura es b, está dividido por un tabique. Por un lado del tabique el nivel del agua respecto del fondo es h_1, por el otro h_2. Hallar la fuerza que actúa sobre el tabique.

Solución:



La fuerza solicitada se indica en el gráfico de la izquierda: $\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$

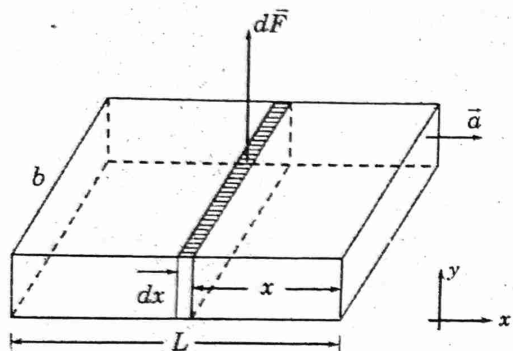
Luego: $F_1 = \displaystyle\int p\, dA = \int_0^{h_1} \rho g y (b\, dy) = 1/2\, \rho g b h_1^2$

$F_2 = \displaystyle\int p\, dA = \int_0^{h_2} \rho g y (b\, dy) = 1/2\, \rho g b h_2^2$

Entonces: $\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = 1/2\, \rho b\, (h_1^2 - h_2^2)\,\hat{i}$

(39) Una cisterna cuya forma se da en la figura, está llena hasta el máximo de agua y se mueve con aceleración a en la dirección horizontal. Hallar la fuerza con que el agua actúa sobre la tapa de la cisterna.

Solución:



Debemos considerar que la presión en un punto es la misma en todas las direcciones, en especial sobre la tapa de la cisterna.

Por definición:

$$dF = pdS = p(bdx)$$

Como el líquido se está moviendo, ejercerá una presión debido a la velocidad llamada presión dinámica: $p = \frac{\rho v^2}{2}$

$$d\vec{F} = \left(\frac{\rho v^2}{2}\right)(bdx)\hat{J}$$

pero el cuerpo parte del reposo, entonces por la ecuación de la cinemática:

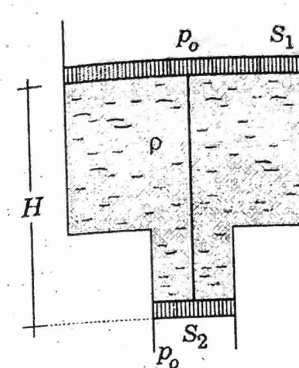
$$v^2 = v_o^2 + 2ax = 2ax \;\; ; \;\; v_0 = 0$$

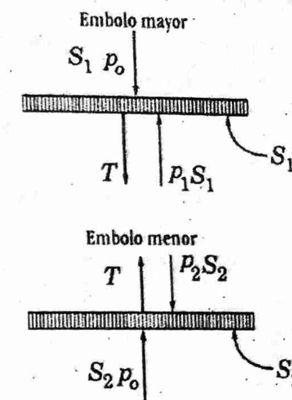
$$d\vec{F} = (1/2\,\rho\, 2ax)(bdx)\,\hat{J}$$

$$\vec{F} = \rho ab \int_0^L xdx\,\hat{J} = 1/2\,\rho abL^2\,\hat{J}$$

(40) Un recipiente dispuesto verticalmente según la figura, cuyas secciones transversales son S_1 y S_2, tiene dos émbolos sin peso. Estos émbolos están unidos entre sí por un alambre fino de longitud H. Hallar la fuerza de tensión del alambre si el espacio entre los émbolos está lleno de agua. Despréciese el rozamiento. Los extremos del recipiente están abiertos a la atmósfera.

Solución:





Como el sistema, está en equilibrio, para ambos émbolos se tiene:

Émbolo mayor: $\Sigma F = p_0 s_1 + T - p_1 s_1 = 0$

$p_0 s_1 + T = p_1 s_1$ .... (1)

Émbolo menor: $\Sigma F = p_2 s_2 - T - p_0 s_2 = 0$

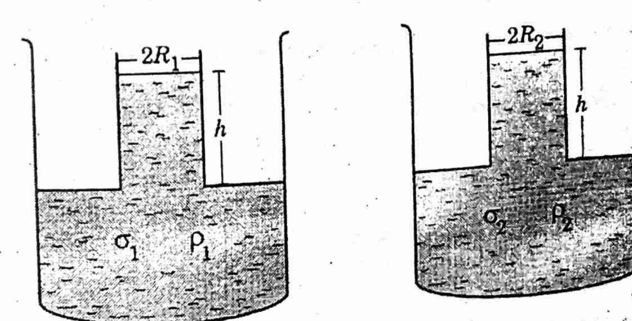
$p_2 s_2 = T + p_0 s_2$ .... (2)

donde $p_2 = p_1 + \rho g H$ .... (3)

De (3) en (2): $(p_1 + \rho g H)S_2 = T + p_0 S_2$ .... (4)

De (1) y (4): $T = \rho g H S_1\, S_2/(S_1 - S_2)$

(41) En que relación deben de estar los radios de dos tubos capilares para que introducidos en sendos líquidos de $\sigma_1 = 0.02\,N/m$ y $\rho_1 = 0.79\,g/cm^3$ y $\sigma_2 = 0.03\,N/m$, $\rho_2 = 0.80\,g/cm^3$, alcancen el líquido en ambas la misma altura.



Solución:

Sabemos por teoría (LEY DE JURIN); que la altura alcanzada por un líquido esta dado por $h = 2\sigma/\rho g R$ para cada líquido:

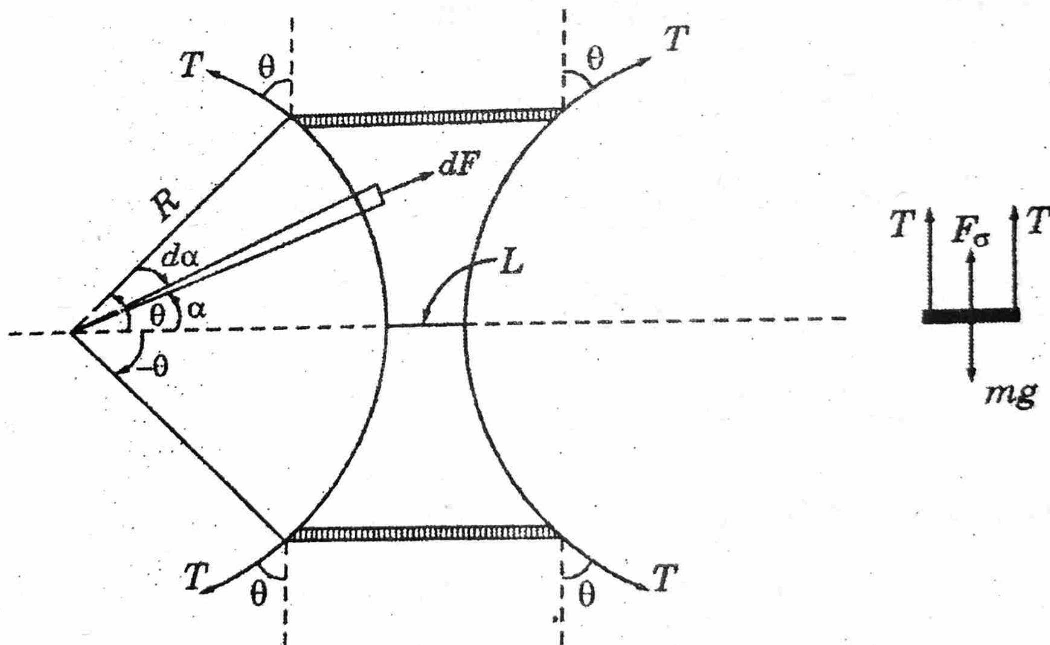
$$h_1 = 2\sigma_1/\rho_1 g R_1 \quad \text{y} \quad h_2 = 2\sigma_2/\rho_2 g R_2$$

según condición del problema: $h_1 = h_2$

$$\frac{2\sigma_1}{\rho_1 g R_1} = \frac{2\sigma_2}{\rho_2 g R_2} \quad , \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{\sigma_1 \rho_2}{\sigma_2 \rho_1} \quad , \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{0.02 \times 0.80}{0.03 \times 0.79} = 0.67$$

(42) Entre dos varillas iguales de 1g c/u unidas mediante hilos flexibles de peso despreciable, se extiende una película jabonosa. Sujetando la varilla superior y dejando colgando la inferior, se observa que la película jabonosa adopta la forma indicada en la figura, haciendo que los hilos laterales forman un arco de circunferencia de 5 cm. Hállese la tensión superficial del agua jabonosa y la tensión de los hilos, si $L = 1$ cm.

Solución:



Es el estrechamiento de la película jabonosa se cumple la condición de equilibrio:

$$\Sigma F = 2T + F_\sigma - mg = 0$$

$$2T + F_\sigma = mg$$

$$2T + \sigma(2L) = mg \text{ .... (1) (solución jabonosa)}$$

Para hallar σ es necesario conocer T:

Tomemos un diferencial de longitud del hilo y hallemos la fuerza F normal al hilo: $F = \sigma(2dl)$.

La componente en el eje X de DF es equilibrada con la componente de T, así :

$$2T\operatorname{sen}\theta = \int dF\cos\alpha$$

$$2T\operatorname{sen}\theta = \sigma\int 2dl\cos\alpha = 2\sigma\int_{-\theta}^{\theta} R\cos\alpha d\alpha \quad , \quad dl = Rd\theta$$

$$2T\operatorname{sen}\theta = 4\sigma R\operatorname{sen}\theta$$

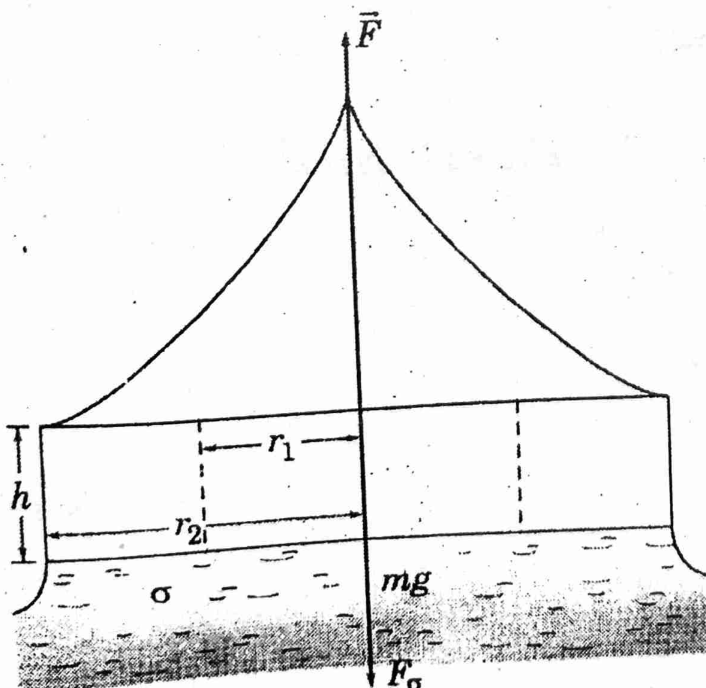
$$T = 2\sigma R \quad \text{.......................................} \quad (2)$$

De (2) en (1) : $2(2\sigma R) + \sigma(2L) = mg$

$$\sigma = \frac{mg}{4R+2L} = 44.5\ d/cm \quad \text{y} \quad T = 445 \text{ dinas}$$

43 (a) Qué fuerza hay que aplicarle a un aro horizontal de aluminio, que tiene una altura h = 10 mm., un diámetro interior 50 mm. y un diámetro exterior 52 mm., para desprenderlo de la superficie del agua. (b) Qué parte de la fuerza hallada corresponde a las fuerzas de la tensión superficial.

Solución:



a) Sea F la fuerza necesaria para levantar el aro.

Por condición de equilibrio:

$$\Sigma F = F - mg - F_\sigma = 0$$

$$F = mg + F\sigma$$

$$F = \rho g h\pi\,(r_2^2 - r_1^2) + 2\pi\sigma(r_1 + r_2)$$

donde:

$$\rho = 2.6\ g/cm^3 \quad , \quad \sigma = 0.073\ N/m$$

$$F = 64.2\times10^{-3}\ N$$

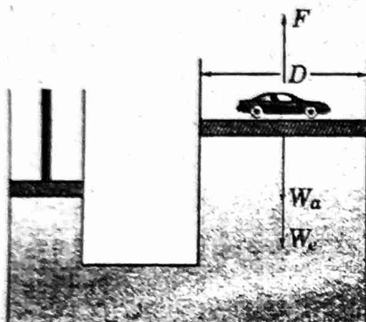
b) $F\sigma = 2\pi\sigma(r_1 + r_2) = 23.4\times10^{-3}\ N$

(44) Se lleva un auto que pesa 1600 kg f a la plataforma hidráulica de un taller de servicio; el diámetro del pistón del elevador mide 0.25 m. El peso de todo el elevador es de 800 kg f.

a) Calcule la presión que debe ejercer el líquido hidráulico sobre el pistón del elevador para levantar el autor a velocidad constante.

b) Determine la presión necesaria para dar al auto una aceleración hacia arriba de $0.72\ m/s^2$.

Solución:



Para levantar el sistema, se necesita una fuerza F, dirigida hacia arriba:

$$F - We - Wa = (m_e + m_a)a$$

a) En este caso, como υ es constante la aceleración es nula $a = 0$

$$F_1 - We - Wa = 0 \ , \ F_1 = We + Wa \quad \text{y} \quad F = F_1$$

donde We : peso del elevador = 800 Kg f

Wa : peso del auto = 1600 Kg f

$$P_1 = F_1 / \frac{\pi D^2}{4} = \frac{(We + Wa)4}{\pi D^2} \ , \ D = 0.25m \ , \ P_1 = 4.79 \times 10^5\ N/m^2$$

b) Como existe aceleración:

$$F_2 - We - Wa = (m_e + m_a)a \quad \text{y} \quad F = F_2$$

$$F_2 = (m_e + m_a)a + m_e g + m_a g$$

$$F_2 = (m_e + m_a)(a + g)$$

$$\rho_2 = F_2 / \frac{\pi D^2}{4} = 5.15 \times 10^5\ N/m_2$$

(45) A se vierte mercurio en un tubo en U de ramas abiertas hasta que la longitud total del mercurio sea h.

a) Si se hace descender el nivel del mercurio en una rama del tubo y se deja oscilar al líquido con pequeña amplitud, demuéstrese que, despreciando el rozamiento, el período T_1 está dado por: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{h}{2\pi}}$.

b) Se cierra ahora una rama del tubo en U de modo que la longitud de la columna de aire que quede encerrado sea L, y se hace oscilar de nuevo al mercurio. Suponiendo despreciable el rozamiento, que el aire es un gas perfecto y que los cambios de volumen adiabáticos, demuéstrese que el período T_2 es ahora:

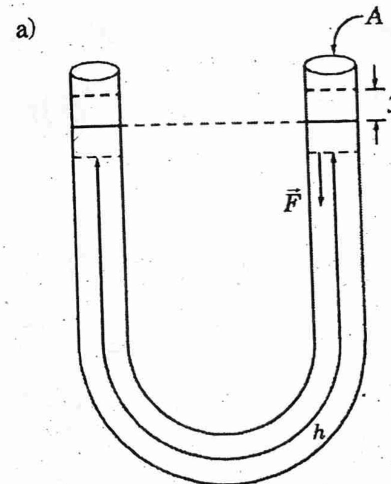
$$T_2 = 2\pi\sqrt{h/2g + \gamma h_0\, g/L}$$

siendo h_0 la altura de la columna barométrica.

c) Demuéstrese que: $\gamma = \frac{2L}{h_0}\left(\frac{T_1^2}{T_2^2} - 1\right)$

Solución:

a)



Un aumento en la columna de la derecha produce una diferencia de presiones:

$$\rho_m (2y) g$$

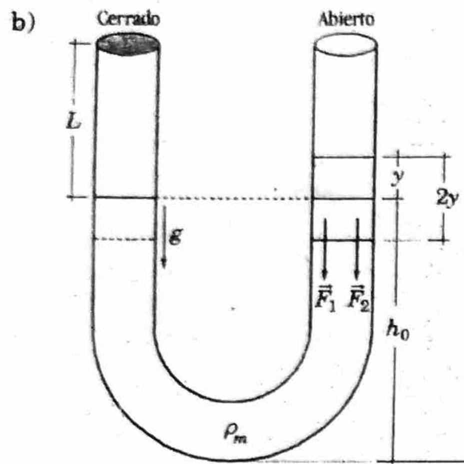
Sobre el mercurio se produce una fuerza recuperadora $F = -\rho_m (2y) gA$. El signo negativo, es porque la fuerza tiene sentido opuesto al desplazamiento y como $\rho_m \cdot Ah$, es la masa de la columna de Hg sobre la que actúa la fuerza.

$$F = m\frac{d^2y}{dt^2} = \rho_m (Ah)\frac{d^2y}{dt^2} = -\rho(2y)gA$$

de donde: $\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2g}{h}y$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{2g}{h}\right)y = 0 \ , \ T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{h}{2g}} \quad \text{...} \ (a)$$

b)



Inicialmente cuando existe aire en el espacio L, se tiene: $V = AL$ y $P = \rho_m h_0 g$. Cuando el nivel del mercurio sube y; en la rama abierta se produce un aumento del volumen $dV = yA$ en el aire de la rama cerrada y una disminución de presión dP, que causa una fuerza F_1 recuperadora sobre el mercurio: $F_1 = A\,dp$

Si el proceso es adiabático.

$$Pv\gamma = Cte \quad , \quad \gamma P V^{\gamma-1} dv + V^{\gamma} dP = 0$$

$$\gamma P y A + V\left(\frac{F_1}{A}\right) = 0 \quad ; \quad F_1 = -\left(\frac{\gamma P A^2}{V}\right) y \quad ; \quad F_1 = -\frac{\gamma \rho_m h_0 g A^2 y}{A L} = -\frac{\gamma \rho_m h_0 g A y}{L}$$

Sobre el mercurio actúa una diferencia de presión debido a la diferencia de niveles en el mercurio.

$P = \rho_m (2y) g$, que produce una fuerza recuperadora $F_2 = -\rho_m (2y) g A$.

Luego, la fuerza total sobre el mercurio es: $F = F_1 + F_2 = -\rho_m A\left(2g + \frac{\gamma h_0 g}{L}\right) y$

$$F = m\frac{d^2 y}{dt^2} = (\rho_m A h)\frac{d^2 y}{dt^2}$$

Luego: $\rho_m A h \frac{d^2 y}{dt^2} = -\rho_m A\left[2g + \frac{\gamma h_0 g}{L}\right] y \quad ; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{h}\left[2g + \frac{\gamma h_0 g}{L}\right] y = 0$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{h}{2g + \frac{\gamma h_0 g}{L}}} \quad \text{.................................} \quad (\beta)$$

De (α) y (β): $T_1^2 = (2\pi\sqrt{h})^2 \frac{1}{2g}$

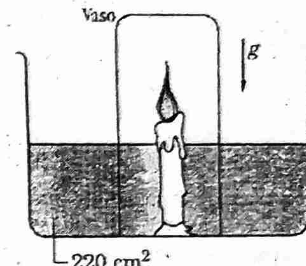
$$T_2^2 = (2\pi\sqrt{h})^2 \frac{1}{2g + \frac{\gamma h_0 g}{L}}$$

Dividiendo las expresiones anteriores: $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{2g + \frac{\gamma h_0 g}{L}}{2g} = 1 + \frac{\gamma h_0}{2L}$

$$\gamma = \frac{2L}{h_0}\left[\frac{T_1^2}{T_2^2} - 1\right]$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

01 En el siguiente experimento después de cubrir la vela con un vaso, cuya sección transversal es $20\ cm^2$, la vela se apaga y el agua en su interior asciende 10cm. ¿Cuál es la presión (en bar) del gas contenido en el vaso? $(P_{atm} = 1 bar\, ; g = 10 m/s^2)$

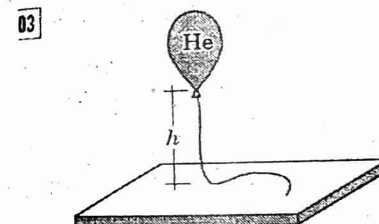


Rpta.: $P = 0{,}9$ bar

02 En un recipiente prismático que tiene una pared lateral rectangular hay una cantidad de líquido de peso P. Se arroja al recipiente un cuerpo de peso P_1, que flota en el líquido. Hallar en qué relación varía las presiones sobre la pared rectangular.

Rpta.: $P_f = P_i\left(1 + \frac{P}{P_1}\right)^2$

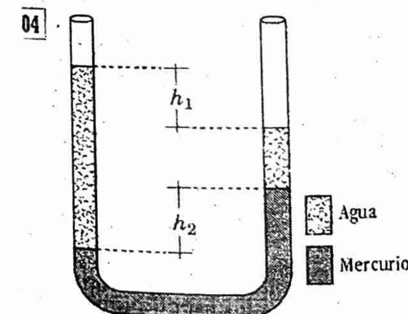
03



Un globo lleno de helio se amarra a una cuerda uniforme de 2.00 m de largo y 0.0500 kg de peso. El globo es esférico con un radio de 0,400 m. Cuando se suelta levanta una longitud h de cuerda y luego permanece en equilibrio, como en la figura P15.49. Determine el valor de h. La envolvente del globo tiene una masa de 0.250 kg.

Rpta.: $h = 1{,}91 m$

04



Un tubo en U de un área de sección transversal uniforme, abierto a la atmósfera, se llena parcialmente con mercurio. Después se vierte agua en ambos brazos. Si la configuración de equilibrio del tubo es como la mostrada en la figura P15.19, con $h_2 = 1.00$ cm, determine el valor de h_1.

Rpta.: $h_1 = 12{,}6$ cm

05 Un cuerpo homogéneo y compacto colocado en un líquido con peso específico γ_1 y pesa P_1 y colocado en un líquido con peso específico γ_2 pesa P_2. Hallar el peso específico γ del cuerpo.

Rpta.: $\gamma_c = (P_2\gamma_1 - P_1\gamma_2)/P_2 - P_1$

06 Supongan que el ascenso hidráulico de la figura del problema anterior, se utiliza para elevar el peso W a una distancia d_2:

a) A qué distancia d_1 se desplazará el otro pistón.

b) Qué cantidad de trabajo deberá proporcionar el agente que ejerce la fuerza F_1.

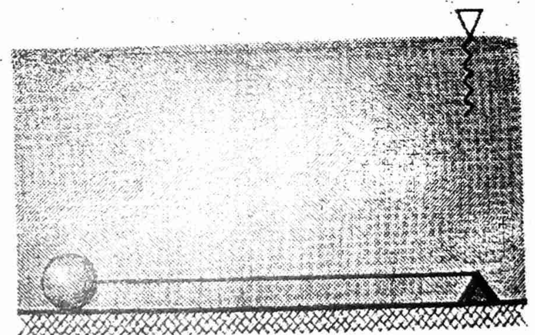
c) Compare su respuesta (b) con el cambio de energía potencial del peso.

Rpta.: a) $d_1 = d_2\, A_2/A_1$

b) $W_n = F_1 d_2\, A_2/A_1 = Wd_2$

c) Se debe al cambio de energía potencial Wd_2 de W.

07 La esfera de $1N$ es soltada en la posición mostrada. Determine la tensión en el hilo de masa despreciable cuando éste se ubique verticalmente. desprecie la velocidad del agua ($P_{agua} = 4P_{esfera}$, $g = 10m/s^2$)

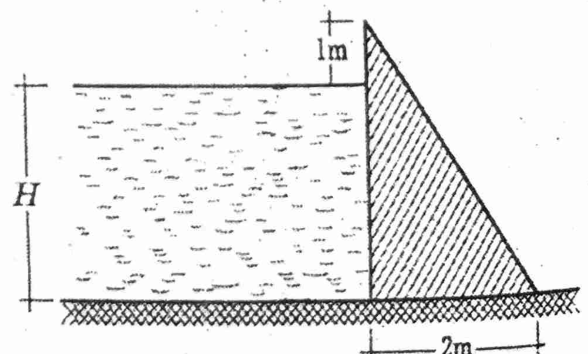


Rpta.: $T = 3N$

08 En la presa mostrada. ¿Cuál es el valor máximo de H, siempre que la resultante de las fuerzas, que ejerce el liquido y el peso de la presa, no pase del tercio medio de la base?

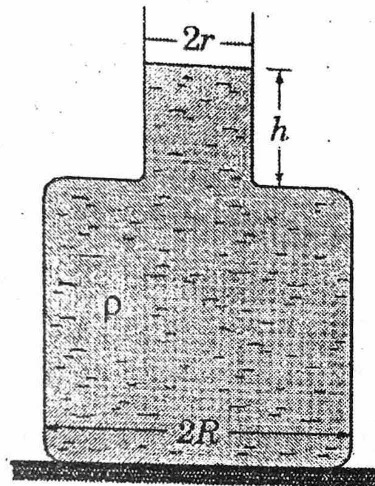
Peso de la presa = 2,800 kg/m^3

Rpta.: $H = 3,77m$

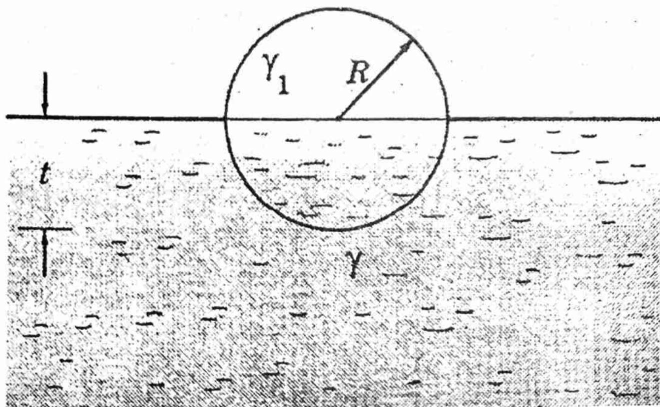


09 Un recipiente sin fondo, cuya forma y dimensiones están representadas en la figura, se encuentra en una mesa. Los bordes del recipiente están bien ajustados a la superficie de la mesa. El peso del recipiente es W. En el recipiente se vierte un líquido. Una vez que el nivel de éste alcance una altura h, el recipiente bajo la acción del líquido se elevará. Hallar la densidad del líquido vertido.

Rpta.: $\rho = W/gh\pi(R^2 - r^2)$



10 Calcular la inmersión de una esfera homogénea que en parte sobresale del líquido.



Rpta.: $t^3 - 3Rt^2 + 4R^3\frac{\gamma_1}{\gamma} = 0$

11 En una gota esférica de glicerina de 1mm de radio. Hállese (a) la sobrepresión debida a la tensión superficial (b) La fuerza total sobre toda la superficie de la gota por causa de la tensión superficial y (c) la energía potencial de la superficie.

Rpta.: a) $\Delta p = 128$ d/cm^2
b) $F = 161$ d
c) $Up = 8$ ergios

12 Que radio mínimo debe poseer un globo hinchado con H_2 para que sea capaz de elevar una masa de 2000 kg, si $\rho_{H_2} = 0.09\, Kg/m^3$ y $\sigma_{aire} = 1.293\, Kg/m^3$

Rpta.: $r = 7.8\, m$

13 Una bola de ping-pong tiene un diámetro de 3.80 cm. y una densidad promedio de 0.0840 g/cm^3. ¿Qué fuerza se requiere para mantenerla completamente sumergida bajo el agua?

Rpta.: $F = 0{,}258 N$

14 Un cubo de arista 10 cm. y densidad $0.9\, g/cm^3$, se deja libre en el fondo de un recipiente, que contiene agua y cuya profundidad es de 1 m. Hallar (a) Cuánto tiempo tarda el cubo en aparecer por la superficie y que longitud de arista sobresale al quedar en equilibrio (b) Cuál es el período de oscilaciones verticales que efectuará el tubo antes de quedar en reposo, use $g = 10\, m/S^2$.

Rpta.: a) $T = 13.4$ seg. $X = 10$ cm
b) $T = 0.59$ seg.

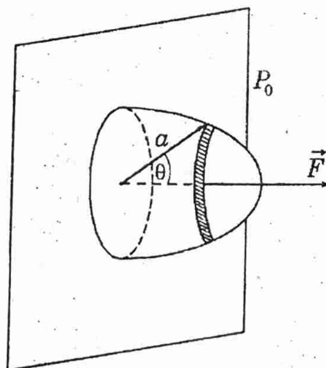
15 En la superficie se separación de dos líquidos con densidades ρ_1 y ρ_2 flota una arandela de densidad $\rho(\rho_1 < \rho < \rho_2)$. La Altura de la arandela es h. determine qué profundidad se sumergirá ésta en el segundo líquido.

Rpta.: $h' = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} h$

16 Un hemisferio evacuado de radio a se fija firmemente a una pared vertical como se muestra en la figura. Si P_0 es la presión atmosférica, demuestren que la fuerza horizontal mínima F que se requiere para retirar el hemisferio de la pared es:

$$F = \pi a^2 P_0$$

(considere la fuerza normal a la diferencial de superficie que se indica).



17 Se deja caer un cuerpo de densidad 0.8 desde un altura de 20 m de altura en el mar $\rho = 1.022$. Hallar (a) la profundidad que penetra en el agua y el tiempo que tarda en volver. No hay viscosidad $g = 10\, m/s^2$.

Rpta.: a) $l = 72$ m , $t = 7.2$ seg

18 Un densímetro se compone de una ampolla esférica y de una varilla cilíndrica de sección transversal 0,4 cm^2 el volumen total de la ampolla y de varilla es 13.2cc. Cuando se sumerge en el agua el densímetro flota con 8 cm de la varilla fuera de la superficie libre de agua. En alcohol queda 1cm de la varilla fuera del líquido. Calcule la densidad del alcohol.

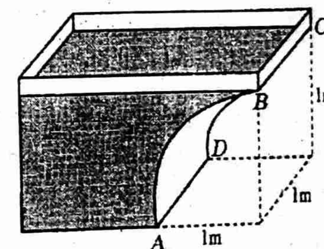
Rpta.: $\rho = 0{,}94\, g/cc$

19 Hállese la tensión superficial de un líquido en función de la densidad, sabiendo que ésta, el diámetro de un capilar y la altura que alcanza en él, están en progresión aritmética, siendo la razón 0.5 y que el diámetro es menor que la densidad y ésta que la altura.

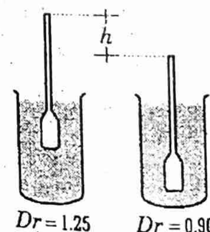
Rpta.: $\sigma = 245(\rho^3 - 0.25\rho)$

20 El recipiente que se indica está lleno de agua.

Determine la fuerza horizontal que le ejerce el agua a la superficie $ABCD$ (parte de un cilindro) $(g = 10\text{ m/s}^2)$.



Rpta.: $F = 4000 N$

21 

Un hidrógeno pesa 11gr. y el área de la sección recta de su vástago es 0.16 cm^2 cuál es la diferencia de alturas sumergidas en dos líquidos de densidades relativas 1.25 y 0.90 respectivamente.

Rpta.: $h = 21{,}39$ cm

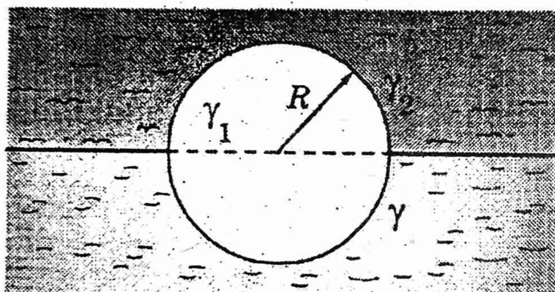
22 Una placa está sumergida verticalmente en un líquido, con uno de sus lados coincidiendo con la superficie libre de dicho líquido. ¿Cómo debe trazarse una recta, desde un vértice del lado superior de manera que divida el rectángulo en 2 áreas que soporten fuerzas resultantes iguales?

Rpta.: $x = \frac{a}{4}$

23 Con un cuentagotas se vierten 100 gotas de agua, que en total pesan 2.45 g. Igualmente se pesan otras 100 gotas de un líquido problema dando 1.08 g. Hállese la σ del líquido.

Rpta.: $\sigma = 32\ \text{d/cm}$

24 Una esfera de peso específico γ_1 flota entre dos líquidos de pesos específicos γ y γ_2 de modo que la línea de separación de los líquidos pasa por el centro de la esfera. ¿En qué relación están los tres pesos específicos?



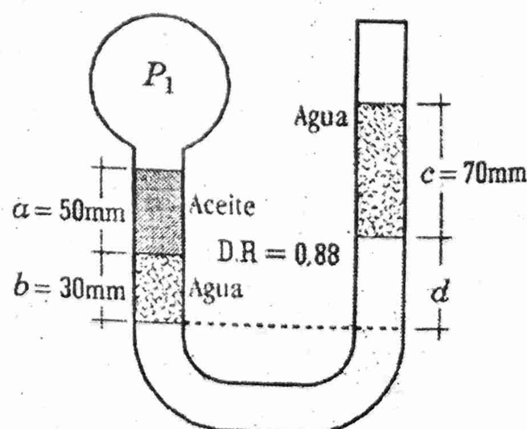
Rpta.: $\gamma_1 = \frac{1}{2}(\gamma + \gamma_2)$

25 Un litro de agua ha sido pulverizado en gotitas de 1 mm. de diámetro. Hállese la variación de la energía potencial que se ha producido por causa de la tensión superficial.

Rpta.: a) $\Delta Up = +44.2 \times 10^5$ ergios (aumento de energía potencial)

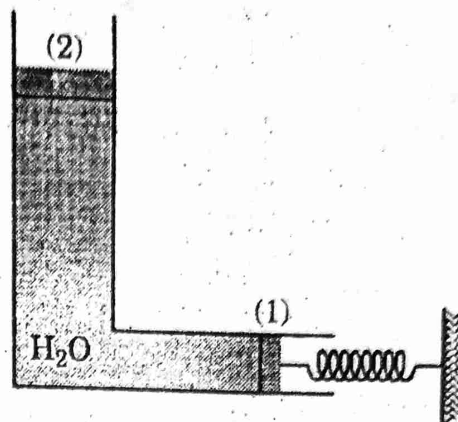
26 El momento que se muestra contiene 3 líquidos. Cuando $P_1 = 10 KPa$ (manométricas) determine la distancia de separación.

Rpta.: $d = 75,24$ mm



27 El sistema mostrado se encuentra en reposo. Determine el módulo de la fuerza vertical y hacia abajo que debemos aplicar en el émbolo liviano (2) para lograr que el resorte $k = 10\,N/m$ incremente su deformación en 1cm. ($A_2 = 10A_1 = 10\ cm^2$, $g = 10\ m/s^2$)

Rpta.: $F = 0{,}505N$

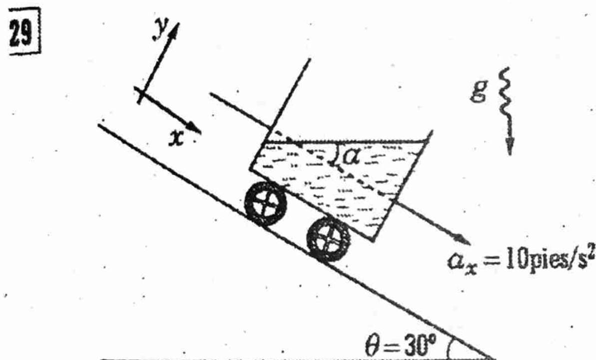




28 Hállese la potencia que es necesaria utilizar para inflar una pompa de jabón ($\sigma = 25$ d/cm), cuyo radio aumenta a razón de 1 mm/s , en el momento en que éste vale 2 cm.

Rpta.: $P = 251.2\ ergios/seg$

29



Un recipiente rectangular con agua está sujeto a una aceleración cte. hacia abajo en un plano inclinado como se ve en la figura. Determine la pendiente de la superficie libre de líquido. Empleando el sistema de coordenadas indicado.

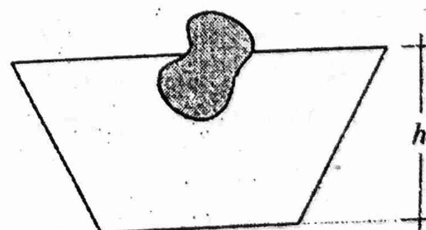
Rpta.: $\alpha = 12°\ 23'$

30 Un portaobjetos de vidrio, de dimensiones $5 \times 0.2 \times 2\ cm$ cuelga mediante un hilo de peso despreciable del platillo corto de una balanza hidrostática, estando sumergido en agua de una vasija, justamente sumergida la mitad de su superficie, primero por el lado más largo vertical y luego con este horizontal. Cuál es la diferencia de pesas que hay que colocar en el otro platillo de la balanza?

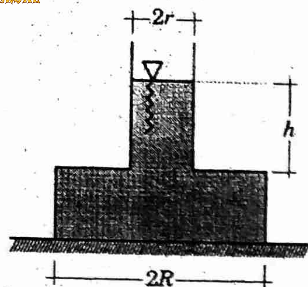
Rpta.: $\Delta P = 450$ dinas

31 En un vaso de agua flota un trozo de hielo, el nivel del agua en tal condición es h, posteriormente se derrite el hielo.

¿Qué pasa con el nivel del líquido?



Rpta.: $V = V'$

32 

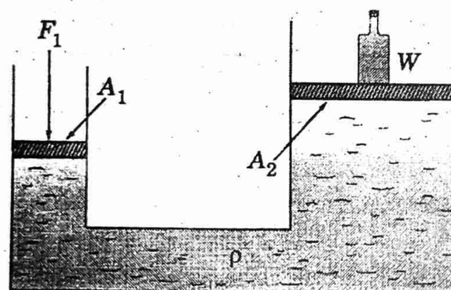
Un recipiente sin base y de paredes cilíndricas cuya fuerza de gravedad es P. se encuentra sobre la mesa. Los bordes del recipiente están bien ajustados a la superficie de la mesa.

En el recipiente se vierte un líquido y una vez que el nivel de éste alcanza una altura h el recipiente prácticamente pierde el contacto con el piso; determine la densidad del líquido.

Rpta.: $\rho = \dfrac{P}{gh\pi(R^2 - r^2)}$

33 Sea el ascensor hidráulico que se ilustra en la figura, donde un líquido incompresible se encuentra en un recipiente completamente cerrado, con excepción de dos pistones móviles de áreas respectivas A_1 y A_2.

a) Si se aplica una fuerza F_1, al pistón menor de área A_1, calculen mediante el principio de Pascal, el aumento de presión del líquido en todos sus puntos.
b) Demuestren que el peso W que puede soportarse en el segundo pistón mediante esta fuerza F_1 es $W = F_1 A_2/A_1$.



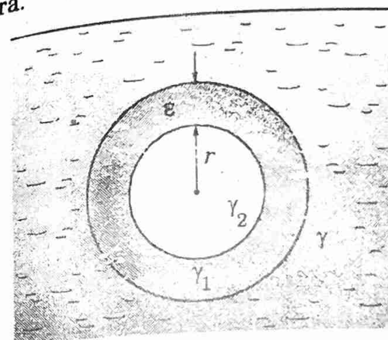
a) $\Delta P = F_1/A_1$ b) $W = F_1 A_2/A_1$

34 Un cilindro hueco de 1m de diámetro y 1.5m de altura pesa 400 kg.

a) ¿Cuántos kilogramos de plomo de peso específico 1100 kg/m^3 deben unirse al fondo por su parte exterior, para que el cilindro flote verticalmente con 1m del mismo sumergido en agua?
b) ¿Cuantos kilogramos se necesitarán si se colocan en el interior del cilindro?

Rpta.: a) $m = 785$ kg b) $m' = 385$ kg

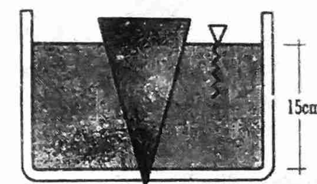
35 La esfera hueca de un flotador es de chapa y queremos que se sumerja estrictamente en el agua. Siendo ε el espesor de la chapa. Hallar el radio de la esfera.



Rpta.: $r = 3\varepsilon\left(\dfrac{\gamma_1}{\gamma - \gamma_2}\right)$

donde γ, γ_1 y γ_2 son los pesos específicos del agua, chapa y del aire.

36 Un orificio de 400 cm^2 de área situado en el fondo de un depósito que contiene agua, se cierra mediante un cono colocado con el vértice hacia abajo tal como es de 60 cm. y el área de su base es de 1 600 cm^3, ¿qué fuerza hidrostática resultante actúa sobre el cono?

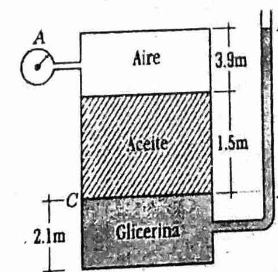


Rpta.: $F = 35N$

37 Un tubo capilar está sumergido en agua, con su extremo inferior a 10cm por debajo de la superficie de la misma. El agua se eleva en el tubo hasta una altura de 4cm. por encima del líquido, y el ángulo de contacto es cero. ¿Qué presión manométrica se requiere en el interior del tubo para formar una burbuja semiesférica en el extremo inferior?

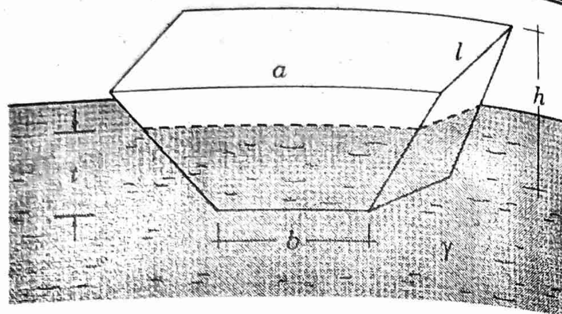
Rpta.: $P = 1372$ N/m^2

38 Con relación a la figura. ¿Qué presión manométrica de A hará que la glicerina suba hasta el nivel B? Los pesos específicos del aceite y de la glicerina son 830 y 1250 kg/m^3 respectivamente.



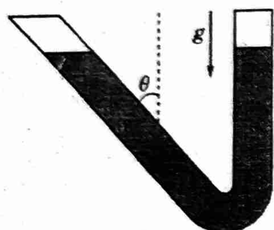
Rpta.: $\rho_A = 3515$ kg/m^2

39 Hallar la inmersión (t) de un prisma de peso P y dimensiones a, l, b y h, cuya sección lateral es un trapecio, según la figura.



Rpta.: $t = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - \dfrac{2(a-b)g}{hl\gamma}}}{(a-b)/h}$

40



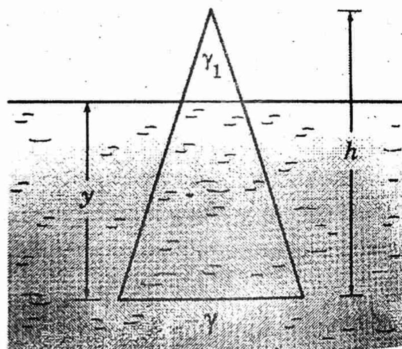
En el tubo mostrado se tiene 200g de mercurio que desarrolla pequeñas oscilaciones. Depreciando todo razonamiento determine el período de dichas oscilaciones.

$A_{\text{sección del tubo}} = 0{,}5\ \text{cm}^2$, $g = 10\ \text{m/s}^2$

$\rho_{Hg} = 13{,}6\ \text{g/cm}^3$, $\theta = 37°$

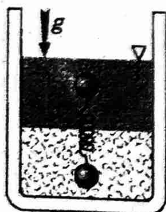
Rpta.: $T = 0{,}4\ \text{seg}$

41 Hallar la inmersión de un cono recto homogéneo de altura h y peso específico γ_1 en un líquido γ, tal como se indica en la figura.



Rpta.: $y = h\left[1 - \sqrt[3]{1 - \dfrac{\gamma_1}{\gamma}}\right]$

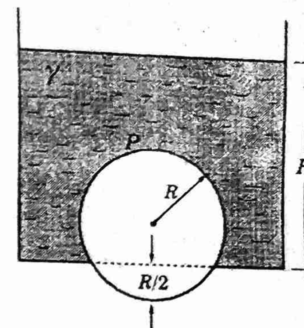
42



Dos esferas de 1,2 kg y 4,2 kg se encuentran en equilibrio sumergidas en aceite y agua según se indica. Halle el estiramiento del resorte si las esferas tienen igual volumen ($g = 10\ \text{m/s}^2$, $K = 500N/m$).

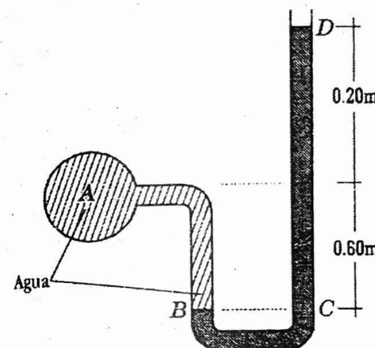
Rpta.: $x = 2{,}4\ \text{cm}$

43 El orificio circular de un depósito se cierra con una esfera de peso P y radio R. Hallar la fuerza necesaria para levantar dicha esfera. Si $H = 4R$.



Rpta.: $F = P + \frac{15}{8}\pi\gamma R^3$

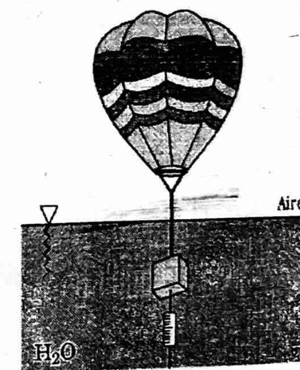
44



Determinar la presión manométrica en A en kg/cm^2 debida a la columna de mercurio ($Dr = 13.6$) en el manómetro en U mostrado en la figura.

Rpta.: $P_A = 1{,}28\ \text{kg/cm}^2$

45 Un globo de $5\ \text{m}^3$ y $10N$ flota en el aire y sujeta a un bloque de madera de $0{,}02\ \text{m}^3$, cuya densidad es $0{,}5\ \text{g/cm}^3$ por medio de una barra delgada de masa despreciable. Calcule cuánto indica el dinamómetro. ($\rho_{\text{aire}} = 1{,}2\ \text{kg/m}^3$)



Rpta.: $T = 45N$

46 En un día que la presión atmosférica es $0.95 \times 10^5\ \text{N/m}^2$.

a) ¿Cuál será la altura de la columna de mercurio en un tubo barométrico cuyo diámetro interior es 2 mm?

b) ¿Cuál sería la altura si no hubiese fenómenos de tensión superficial?

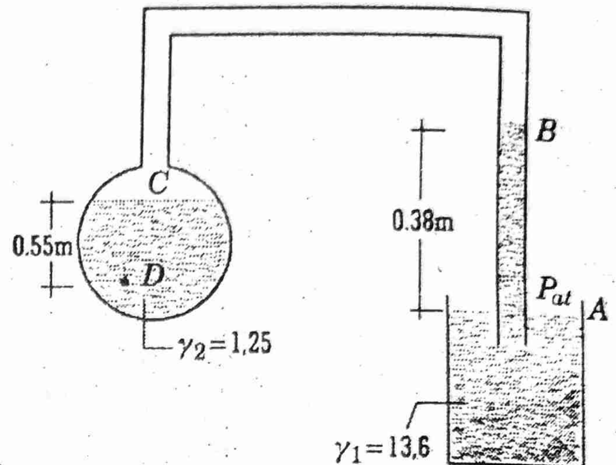
c) ¿Qué diámetro mínimo deberá tener un tubo barométrico para que la corrección por depresión capilar sea igual a 0.01cm de mercurio?

Ángulo de contacto: $\theta = 140°$; coeficiente de tensión superficial del mercurio: $\gamma = 0.465 N/m$; densidad de mercurio $\rho = 13.6 \times 10^3$ kg/m^3

Rpta.: a) $h = 70.7$ cm b) $h = 71{,}3$ cm c) $d = 10{,}7$ cm

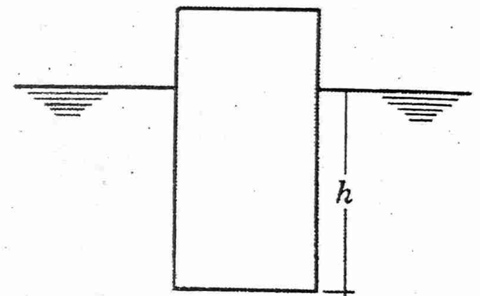
47 Un líquido de peso específico 1,25 gr/cm^3 llena parcialmente el reservorio esférico de la figura. ¿Cuál será la intensidad de la presión en un punto situado a 0.55m debajo de C (punto D)?

Rpta.: $P_D = 0{,}585$ kg/cm^2



48 Un corcho flota con una altura de inmersión media igual a h, y el área de la sección transversal del corcho en la superficie del agua es constante e igual a A.

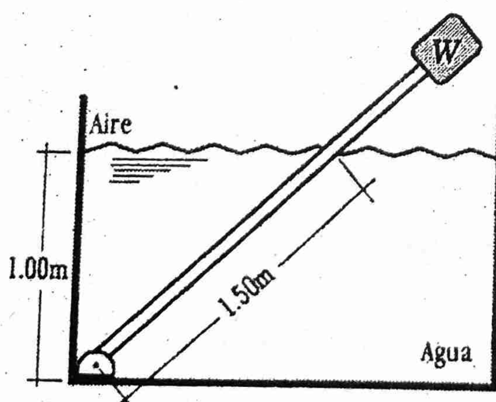
Se desplaza ligeramente hacia abajo de su posición de flotamiento y después se suelta.



El agua tiene un peso específico W. Determinar el período de oscilación.

Rpta.: $T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$

49



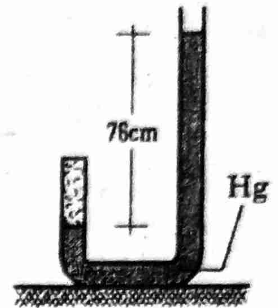
Una barra uniforme de 8kg y 2m de longitud cuya densidad relativa es 0.5, puede girar alrededor de un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos situado debajo del agua, como indica la figura.

a) ¿Qué peso W debe colocarse en el otro extremo de la barra, para que queden sumergidos 1.5m de éste.

b) Hállese la magnitud y sentido de la reacción ejercida por el eje sobre la barra.

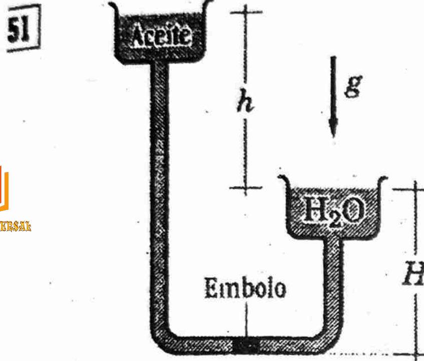
Rpta.: a) $W = 0{,}5$ kg b) $R = 3{,}5$ kg

50 La rama corta y cerrada de un tubo contiene 18cm de una columna de aire. ¿Qué longitud de mercurio adicional debemos hacer ingresar en la rama larga, si se desea reducir en $\frac{1}{3}$ el volumen de aire?



Rpta.: $h = 88$ cm

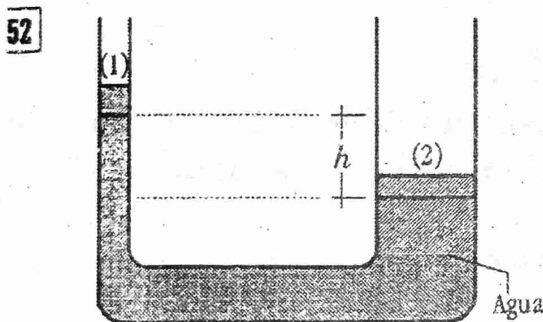
51



Dos recipientes conectados por un tubo de sección uniforme, contienen agua y aceite tal como se muestra. Si el émbolo liso está en equilibrio; determine $\frac{H}{h}$ ($\rho_{aceite} = 800\ kg/m^3$).

Rpta.: $\frac{H}{h} = 3$

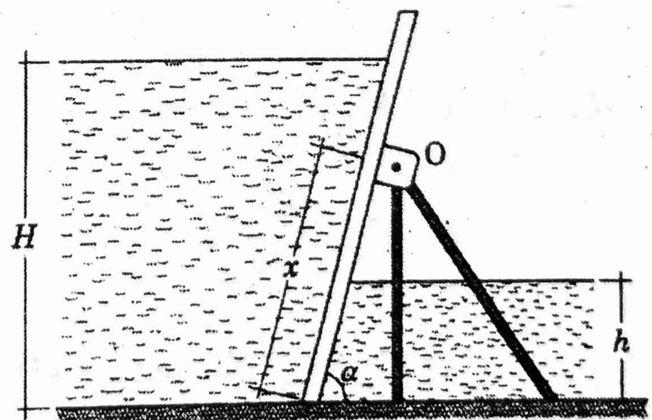
52



El sistema mostrado permanece en equilibrio; determine h sabiendo que si se ubica un bloque de 1kg sobre el émbolo izquierdo dicho émbolo se ubica a 12cm debajo del otro, pero, si se ubicara el bloque sobre el émbolo derecho se origina que éste émbolo se ubique 12cm debajo del otro ($m_1 = 2kg$; $m_2 = 3kg$).

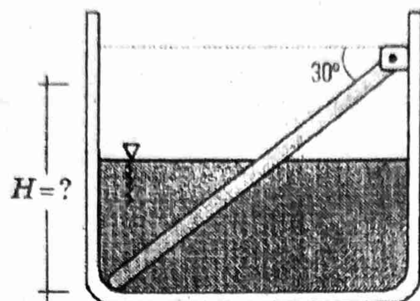
Rpta.: $h = 5$ cm

53 La prensa del sistema de Chanoide es un tablero inclinado que tiene posibilidad de girar alrededor de un eje articulado O. Hallar la posición de la articulación (x) en la cual la elevación del nivel superior de agua arriba de $H = 2m$ provocaría el hueco automático del tablero. El nivel del agua por la parte derecha del tablero es $h = 0.4m$. El ángulo $\alpha = 60°$.



Rpta.: $x = \dfrac{H^3 - h^3}{3\operatorname{sen}\alpha(H^2 - h^2)}$

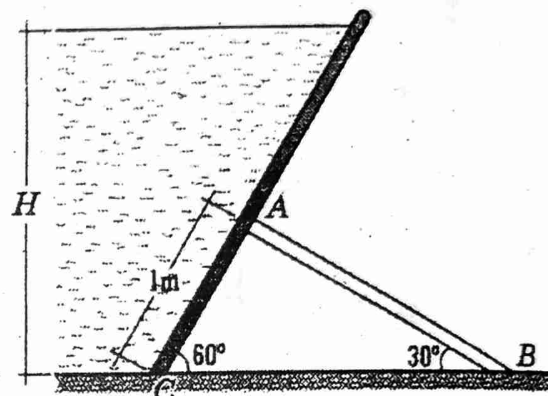
54



La barra de 10 m de longitud y 960 kg/m^3 de densidad se encuentra parcialmente sumergida en agua, encontrándose su extremo libre apoyado en el fondo del recipiente. Calcule la altura necesaria de agua para que la barra pierda contacto con el fondo del recipiente.

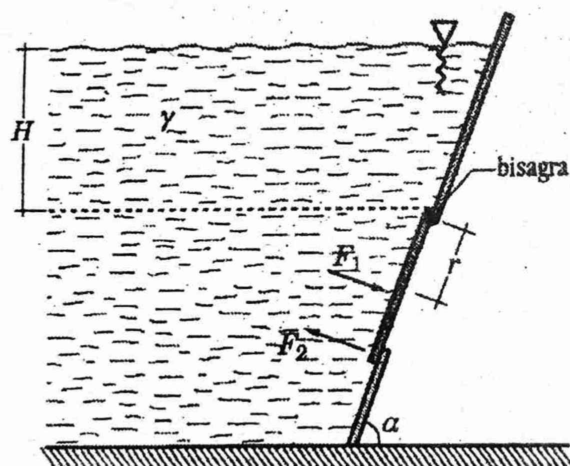
Rpta.: $H = 2m$

55 Se tiene la estructura de la figura. Hallar la profundidad de agua y la fuerza de comprensión que sufre el elemento AB, cuando la estructura está a punto de volcarse. (ancho $b = 2m$).



Rpta.: $H = 2{,}6m$

56



Encontrar:

a) La magnitud de la fuerza que ejerce el líquido sobre la compuerta circular.

b) El punto de aplicación de dicha fuerza.

c) La magnitud de la fuerza F_2, necesaria para levantar el tapón circular:

Rpta.: a) $F = \gamma(H + r\,\text{sen}\,\alpha)\pi r^2$

b) $$Y_p = \frac{4\left(\frac{H}{\text{sen}\,\alpha} + r\right)^2 + r^2}{4\left(\frac{H}{\text{sen}\,\alpha} + r\right)}$$

c) $$F_2 = \frac{\gamma \pi r}{8}[5r^2 \text{sen}\,\alpha + 4Hr]$$

CAPÍTULO V

HIDRODINÁMICA

Es el estudio de los fluidos en movimiento. Se estudiará la relación entre la presión y su velocidad. Si la γ cambia con la presión se dice que el fluido es compresible y lo estudia la aerodinámica. Si la ρ cambia muy poco con la presión en los líquidos, se dice que el fluido es incompresible, lo estudia la hidrodinámica.

LÍNEAS DE FLUJO O DE CORRIENTE

La trayectoria de una pequeña porción de agua va de *a* hacia *b* y *c*, se llama línea de flujo, figura 40.

a) Son líneas imaginarias, continuas.

b) Trazando una tangente a estas líneas, hallamos la dirección de la velocidad.

c) Regiones de alta densidad de líneas de corriente da lugar a regiones de gran velocidad y viceversa.

d) Las líneas de corriente no se cortan.

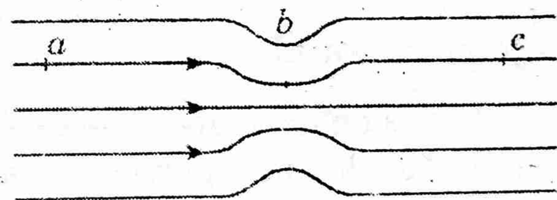


Fig. 40 *Variación de la temperatura con el tiempo*

TUBOS DE FLUJO O DE CORRIENTE

Un haz de líneas de flujo se llama tubo de flujo. Si la sección recta del tubo de corriente es suficientemente pequeña, la velocidad en el punto medio de una sección cualquiera puede considerarse como la velocidad media en dicha sección.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Tres principios fundamentales se aplican al flujo de fluidos:

a) El principio de conservación de la masa, que sirve para determinar la Ecuación de Continuidad.

b) El principio de conservación de la energía, a partir del cual se deduce la Ecuación de Bernoulli.

c) El principio de conservación de la cantidad de movimiento, a partir del cual se deducen ecuaciones para calcular las fuerzas dinámicas ejercidas por los fluidos en movimiento.

TIPOS DE FLUJO O RÉGIMEN

a) Régimen estable, permanente o estacionario

Cuando en un punto cualquiera, la velocidad de las sucesivas partículas que ocupan ese punto en los sucesivos instantes es la misma. Pero puede variar de un punto a otro, es decir, ser variable respecto de las coordenadas espaciales.

b) Flujo uniforme

Tiene lugar cuando el módulo, la dirección y el sentido de la velocidad no varían de un punto a otro del fluido.

c) Flujo rotacional

Los líquidos en depósitos que están girando constituyen un ejemplo en las que la velocidad de cada partícula varía en proporción directa a la distancia del centro de rotación.

d) Flujo laminar

Las partículas fluidas se mueven según trayectorias paralelas formando el conjunto de las láminas o planos paralelos. Los módulos de las velocidades de capas adyacentes nºo tienen el mismo valor.

e) Flujo turbulento

Cuando las partículas del fluido se mueven de forma desordenada en todas las direcciones.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

La masa de fluido (Δm_1) que cruza A_1 en (Δt) es: $\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$,

De igual forma para (Δm_2) que cruza A_2 en Δt es:

$$\Delta m_2 = \rho_2 \Delta V = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$$

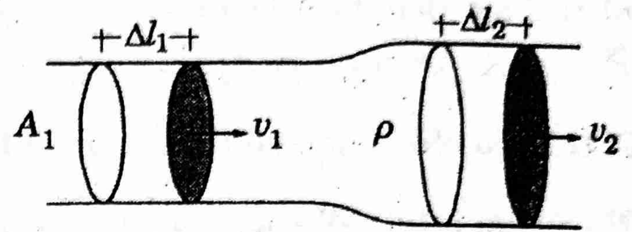


Fig. 41

El flujo de masa en A_1 es: $\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \rho_1 A_1 v_1$

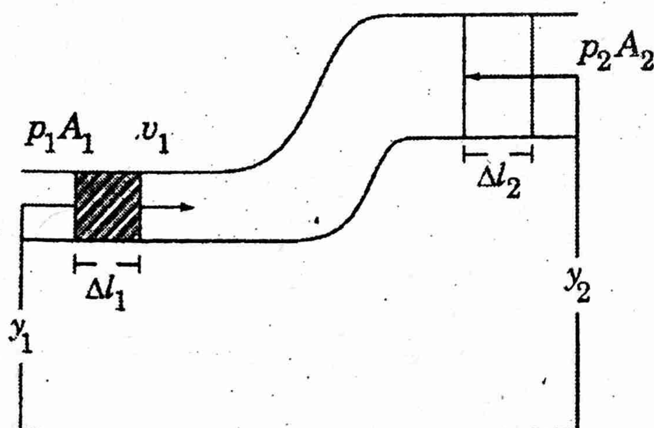
El flujo de masa en A_2 es: $\frac{\Delta m_2}{\Delta t} = \rho_2 A_2 v_2$

Como no existen fuentes (aumento de masa) o sumideros (pérdida de masa), se tiene: $\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} = \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2$

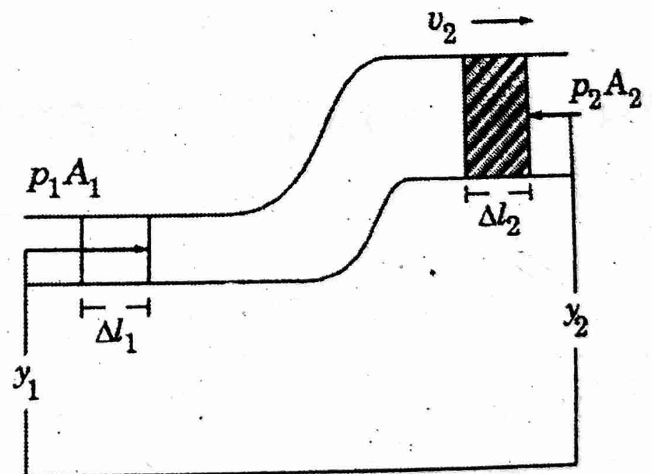
Como el mismo fluido es homogéneo: $\rho_1 = \rho_2$, $A_1 v_1 = A_2 v_2$

Donde el producto: $Av = Q$ se llama gasto, caudal, flujo de volumen o rapidez de flujo.

ECUACIÓN DE BERNOULLI



(a)



(b)

Fig. 42

Consideremos un fluido no viscoso, irrotacional, estable, incompresible, que se desplaza por un tubo de flujo.

Sea p_1, A_1, v_1 y Δl_1 elementos del sistema al inicio, figura (a), y p_2, A_2, v_2 y Δl_2 después del movimiento de la masa, figura (b).

El trabajo debido a la fuerza $F_1 = p_1 A_1$ es $w_1 = p_1 A_1 \Delta l_1$, y debido a la fuerza $F_2 = p_2 A_2$ es $w_2 = p_2 A_2 \Delta l_2$

El trabajo efectuado en contra de la fuerza de la gravedad: $w_3 = -mg(y_2 - y_1)$

El trabajo total: $W = w_1 + w_2 + w_3 = p_1 A_1 \Delta l_1 - p_2 A_2 \Delta l_2 - mg(y_2 - y_1)$

Como $m/\rho = A_1 \Delta l_1 = A_2 \Delta l_2$, reemplazando:

$$W = (p_1 - p_2)\frac{m}{\rho} - mg(y_2 - y_1) \quad \text{.......} \quad (\alpha)$$

El cambio de energía cinética del elemento de fluido es:

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \quad \text{.......} \quad (\beta)$$

Como el Teorema de Trabajo y Energía expresa: $W = \Delta K$, de α y β

$$(p_1 - p_2)\frac{m}{\rho} - mg(y_2 - y_1) = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2,$$ Ecuación de Bernoulli

donde $p + \rho g y$: presión estática, $\tfrac{1}{2}\rho v^2$: presión dinámica.

TEOREMA DE TORRICELLI

La sección $A_2 > A_1$ y

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

donde: $p_1 = p_2 = p_o$, $v_2 = 0$

(porque $A_2 >> A_1$)

$$v_1^2 = 2g(y_2 - y_1) = 2gh$$

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

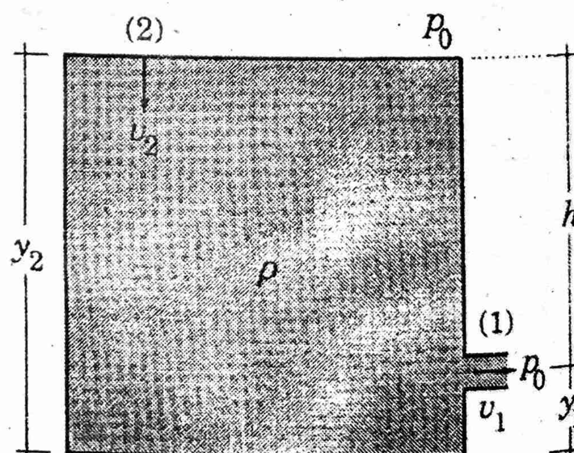


Fig. 43

TUBO DE VENTURI

Se usa para medir la velocidad de flujo de un líquido

De la Ecuación de Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

donde $y_1 = y_2 = 0$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \text{ .... } (\alpha)$$

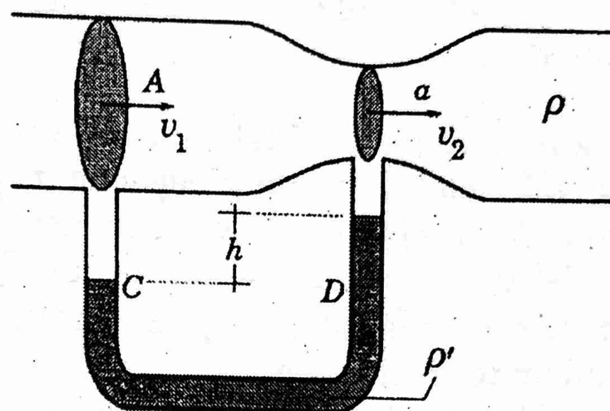


Fig. 44

De la ecuación de continuidad:

$$Av_1 = av_2 \text{ .... } (\beta)$$

Por estar el líquido ρ' en reposo:

$$P_C = P_D \;,\; p_1 + \rho g h = p_2 + \rho' g h \;,\; p_1 - p_2 = gh(\rho' - \rho) \text{ .... } (\gamma)$$

De (β), (γ) en (α) : $v_1 = a\left(\dfrac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A^2 - a^2)}\right)^{1/2}$

TUBO DE PITOT

Se usa para medir la velocidad de un gas

De la ecuación de Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$y_1 = y_2$; $v_2 \approx 0$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 \text{ .... } (\alpha)$$

Como el líquido ρ' está en reposo:

$p_1 + \rho' g h = p_2 + \rho g h$ y $\rho' > \rho$

$$p_1 + \rho' g h = p_2 \text{ .... } (\beta)$$

De (β) en (α): $v_1 = \sqrt{2\rho' g h/\rho}$

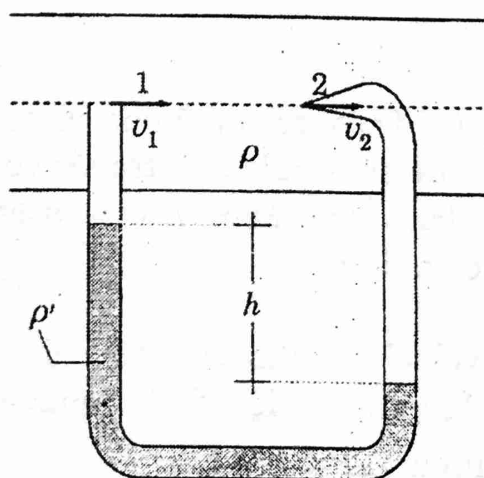


Fig. 45

FLUJO DE LOS FLUIDOS VISCOSOS

La viscosidad en los fluidos se debe a atracciones entre las moléculas del líquido y la de los sólidos que están en contacto con él. El efecto de la viscosidad es hacer más lento el flujo y producir resistencias al movimiento de objetos a través del fluido.

La fricción de un fluido aumenta conforme la velocidad aumenta y depende de las formas de los objetos en contacto con el fluido y del fluido mismo (su densidad). El coeficiente de viscosidad (η) aumenta con el aumento de temperatura para gases y en líquidos la relación es inversa con la temperatura.

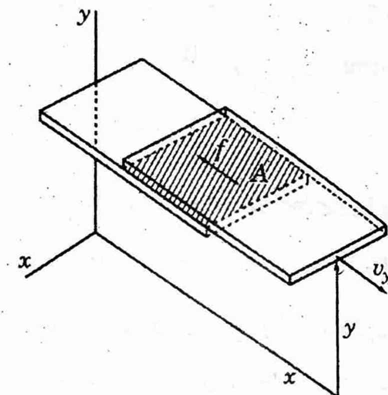


Fig. 46

La ley fundamental de la viscosidad es que el valor de la fuerza de viscosidad es proporcional al área y al gradiente de velocidad ($\partial v/\partial y$) que existe en el lugar donde está situada el área de contacto (A). ver figura 46.

$$f = \eta A\left(-\frac{\partial v}{\partial y}\right) \text{, en unidades:}$$

$$[\eta] = \frac{g}{cm - seg} = poise$$

Sea un flujo de un fluido viscoso, laminar que se desplaza a través de un tubo cilíndrico de diámetro D y la presión es función de x.

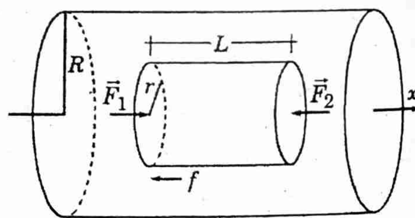


Fig. 47

La velocidad v es sólo función de r y se anula para $r = R = D/2$, como el flujo es laminar: $\Sigma F = 0$

$$F_1 - F_2 - f = p_1\pi r^2 - p_2\pi r^2 - \left(-2\pi r L\eta \frac{dv}{dr}\right) = 0$$

porque, para el cilindro de radio r y longitud L que se encuentra en equilibrio ya que la velocidad de cada capa es constante.

$$-\int_v^0 dv = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L}\int_r^{D/2} r\,dr$$

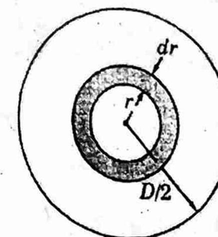


Fig. 48

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}\left(\frac{D^2}{4} - r^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$Vmáx = v\ l_{r=0} = \frac{\Delta PR^2}{4nL}$$

Hallemos el gasto que pasa a través de todo el tubo (sección lateral), figura 48.

$$Q = \mathring{V} = \int v\,dA = \int_0^{D/2} v(2\pi r\,dr) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

Reemplazando (α) en (β) e integrando: $\mathring{V} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta L}$, Ecuación de Poiseuille.

La velocidad media es: $v = Q/\pi R^2 = \Delta PR^2/8nL = \frac{1}{2} v\ máx$

NÚMERO DE REYNOLDS

Sirve para determinar si el fluido que se desplaza a través de un tubo es o no laminar. Se define:

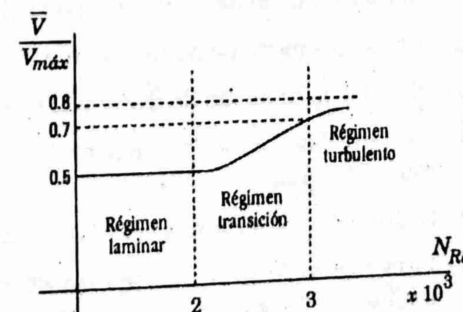


Fig. 49

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{v} D}{\eta}$$

$N_{Re} \leq 2000$ (R. laminar)

$N_{Re} \leq 3000$ (R. turbulento)

η: viscosidad dinámica

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$: viscosidad cinemática

LEY DE STOKES

Cuando un fluido viscoso se mueve alrededor de una esfera con régimen laminar o cuando una esfera se mueve dentro de un fluido viscoso en reposo, se ejerce una fuerza resistente sobre la esfera.

George Stokes dedujo una expresión:

$F_R = 6\pi\eta r v$

$\Sigma F = mg - E - F_R = ma$

Si la esfera parte del reposo $v = 0$ y $F_R = 0$

$a_0 = g - \frac{E}{m} = g(\rho - \rho_0)/\rho$

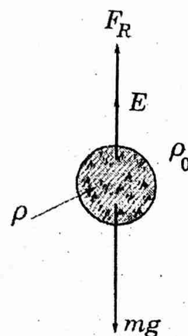


Fig. 49

Esta aceleración inicial origina que su velocidad aumenta y la fuerza de rozamiento también aumenta, hasta que la esfera alcanza una velocidad llamada velocidad límite (constante), su aceleración es nula.

$mg = E + F_R$, $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 g + 6\pi\eta r v_{lim}$

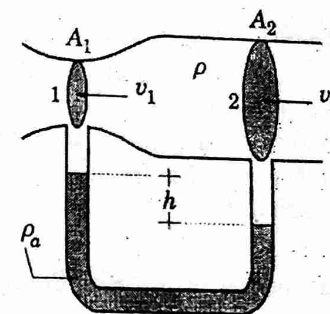
$v_{lim} = \frac{2}{9}\frac{r^2 g}{\eta}(\rho - \rho_0)$

PROCEDIMIENTO PARA APLICAR EL TEOREMA DE BERNOULLI

1) Buscar un nivel de referencia para el líquido en movimiento.
2) Ubicar los pares de puntos donde se aplicará la ecuación de Bernoulli.
3) Escribir la ecuación de Bernoulli con los subíndices de los pares de puntos.
4) Imponer las condiciones del problema en particular, en la ecuación de Bernoulli. (página 210)
5) Simplificar los términos comunes y los nulos.
6) Si es necesario usar la ecuación de continuidad para expresar una velocidad en función de la velocidad del otro punto. (página 209)
7) si es necesario conocer la diferencia de presiones, se puede usar la teoría del tubo en "U", si usa manómetro. (página 156)

PROBLEMAS RESUELTOS

01 A través del tubo de la figura adjunta, pasa una corriente de aire de 0.3 lt por seg. Las áreas de las secciones transversales son 3 cm^2 y 1 cm^2. Hallar la diferencia de niveles que tendrá el agua en el tubo en forma de U. La densidad del aire es de $1.2\ Kg/m^3$.



Solución:

Por definición de caudal $Q = A_1 \cdot v_1 = A_2 v_2$

$v_1 = Q/A_1 = 0.3\times10^{-3}/1\times10^{-4}\ m/s = 3\ m/s$

$v_2 = Q/A_2 = 0.1\times10^{-3}/1\times10^{-4}\ m/s = 1\ m/s$

Considerando los puntos 1 y 2 al mismo nivel, por la ecuación de Bernoulli :

$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g \times 0 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g \times 0$

$\frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = p_2 - p_1$ .... (1)

Como el agua está en reposo en ambos ramales:

$p_1 + \rho_a gh = p_2 + \rho gh$

$p_2 - p_1 = \rho_a gh - \rho gh = (\rho_a - \rho)gh$ .... (2) ; $\rho_a = 10^3\ Kg/m^3$

De (2) en (1) : $\frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = (\rho_a - \rho)gh$

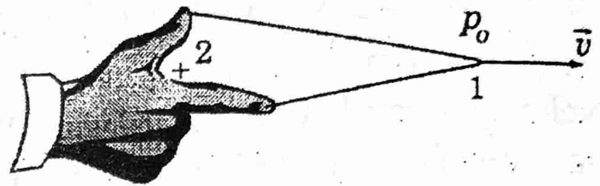
$h = \frac{\rho(v_1^2 - v_2^2)}{2(\rho_a - \rho)g}$. Reemplazando valores

$\rho = 1.2\ Kg/m^3$, $h = 0.5\ mm$

02 ¿Qué presión manométrica se crea en el compresor de un pulverizador, si el chorro de pintura sale de este último con una velocidad de 50 m/s? Tómese la densidad de la pintura como 0.8 g/cm^3.

Solución:

Sea la posición del pulverizador, tal como se indica y tomemos dos puntos. El punto (1) en la boca del pulverizador, y el (2) dentro del pulverizador y en el extremo opuesto.



Luego, por la Ecuación de Bernoulli: $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$

donde: $v_2 \approx 0$, $y_2 = y_1$, $p_1 = p_o$

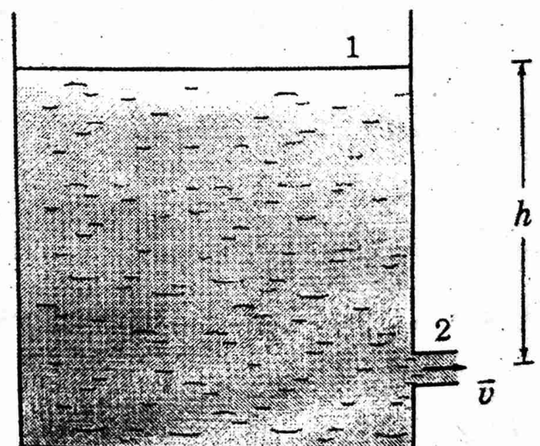
y $\quad v_1 = 50 \text{ m/s}$, $\rho = 0.8 \text{ g/cm}^3$

$$p_2 + 0 + 0 = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + 0 \ , \ p_2 - p_0 = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2$$

La presión manométrica en el compresor: $p_2 - p_0 = p_{2m}$

$$p_{2m} = \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = \tfrac{1}{8} \times 0.8 \times (50 \times 10^2)^2 = 10^7 \text{ dinas/cm}^2$$

03 ¿Cuál es el gasto a través de un orificio circular de 2 mm. de diámetro, localizado a 5 m por debajo de la superficie del líquido?



Solución:

El gasto está dado por $Q = a v$

Por el Teorema de Torricelli: $v = \sqrt{2gh}$

Luego:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh} = \frac{3.14(2 \times 10^{-3})^2}{4}\sqrt{2 \times 9.8 \times 5} = 3.14 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{seg}$$

(04) El depósito de la figura descarga agua a la atmósfera con un gasto Q. La tubería de descarga sufre reducción de su sección transversal de A_2 a A_1 ¿Cuál es el valor de h?

Solución:

Tomemos un punto 3, que está en la superficie libre del líquido y usamos la ecuación de Bernoulli, comparando los puntos 3 y 1:

$$p_1+\tfrac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g y_1=p_3+\tfrac{1}{2}\rho v_3^2+\rho g y_3$$

Donde:

$$p_3=p_1=p_0\ ,\ y_3=h\ ,\ y_1=0\ ,\ v_3\approx 0\,(A_3>A_1\ \text{y}\ A_2)$$

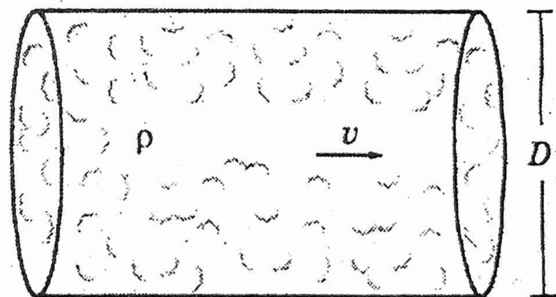
$$p_0+\tfrac{1}{2}\rho\times 0^2+\rho g h=p_0+\tfrac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g\times 0\ ,\ v_1^2=2gh \quad \text{.......... (1)}$$

Por la ecuación de continuidad:

$$Q=A_1v_1=A_2v_2\ ,\ v_1=Q/A_1 \quad \text{.......... (2)}$$

De (2) en (1): $(Q/A_1)^2=2gh\ ,\ h=\dfrac{Q^2}{2\,gA_1^2}$

(05) Hallar la velocidad con que fluye el anhídrido carbónico por un tubo, sabiendo que en media hora pasa por la sección transversal de dicho tubo 0.51 Kg de gas. La densidad de este gas es de $7.5\ \text{Kg/m}^3$, diámetro del tubo: 2 cm.



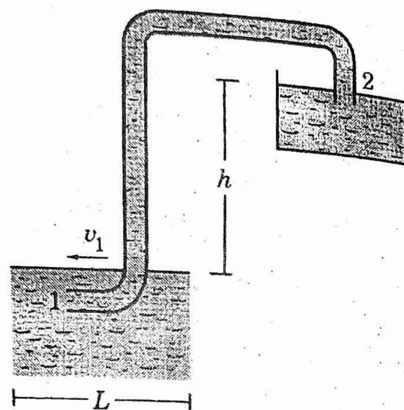
Solución:

Sabemos: $Q=\dfrac{V}{t}=vA\ ,\ V=\dfrac{m}{\rho}$

$$\frac{m}{\rho t}=vA\ ,\ v=\frac{m}{\rho A t}$$

Reemplazando valores: $v=0.12\ \text{m/s}$

06 Para evitar la necesidad de detener un tren para que sea abastecido de agua, a veces se utiliza el siguiente procedimiento: Entre los rieles se dispone de un canal con agua sobre el cual se deja caer un tubo, como se muestra en la figura. El agua asciende por el tubo e ingresa al dispositivo que está en el vagón. ¿Con qué velocidad debe moverse el tren para que el agua pueda levantarse a una altura de 3.5 m si en el intervalo de tiempo durante el cual el tren recorre una distancia de 1 Km. en el depósito ingresan 3 m³ de agua?. El diámetro del tubo es de 10 cm.



Solución:

Sabemos por la Ecuación de Bernoulli comparando el punto 1 y el 2:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g \times 0 = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h$$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h \quad \text{.........} \quad (1)$$

Hallando una relación entre v_1 y v_2: $L = v_1 t$

$$V = A(v_2 t)\text{, luego } v_2 = v_1 V/AL \quad \text{.........} \quad (2)$$

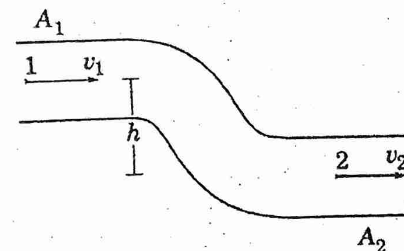
Reemplazando (2) en (1): $\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = \tfrac{1}{2}\rho\left(\frac{v_1 V}{Al}\right)^2 + \rho g h$

$$v_1 = \left[\frac{2gh}{1-(V/Al)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Reemplazando valores: $h = 3.5\text{ m}$, $V = 3\text{m}^3$, $L = 10^3\text{m}$, $d = 0.1\text{ m}$

$$v_1 = 8.96\text{ m/s} = 32\text{ Km/h}$$

07 En un cierto punto de un tubo la velocidad es de 60 cm/s y la presión manométrica 2.55 Kg/cm². Hallar la presión manométrica en un segundo punto del tubo situado a 15 m por debajo del primero si la sección transversal del segundo punto es la mitad que la del primero.



Solución:

De la Ecuación de Bernoulli:

$$p_{1m} + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_{2m} + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$p_{1m} + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = p_{2m} + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + 0$$

$$p_{2m} = p_{1m} + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 - \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h \quad \text{.........} \quad (1)$$

De la ecuación de continuidad: $A_2 v_2 = A_1 v_1$ y $A_2 = A_1/2$

$v_2 = 2v_1$ (1) , de (2) en (1):

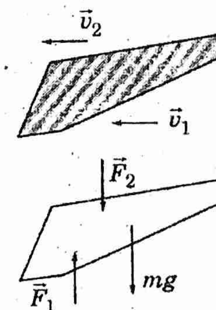
$$p_{1m} + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 - \tfrac{1}{2}\rho(2v_1)^2 + \rho g h = p_{2m}$$

$p_{2m} = p_{1m} + \rho g h - \tfrac{3}{2}\rho v_1^2$, reemplazando valores:

$$p_{1m} = 2.55\text{ Kg/cm}^2 \text{ , } v_1 = 60\text{ cm/s} \text{ , } h = 1500\text{ cm}$$

$$p_{2m} = 3.96\text{ dinas/cm}^2 = 4.04\text{ Kgf/cm}^2$$

08 Supongan que la velocidad del aire en la parte superior del ala de un avión es de 100 m/s y la de la parte inferior de 80 m/s. Supongan que la densidad del aire es de 1 Kg/m³. (a) ¿Cuál es la diferencia de presión sobre los dos lados del ala?. (b) Suponiendo que el avión tenga una masa de 2×10^3 Kg. ¿Cuál debe ser el área mínima del ala para que el avión vuele?



Solución:

a) Por la ecuación de Bernoulli:

$$p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g \times 0 = p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g \times 0$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \tfrac{1}{2}(100^2 - 80^2) = 1800\ N/m^2$$

b) Sabemos que: $\Delta p = \frac{\Delta f}{\Delta A} = \frac{mg}{\Delta A}$, $\Delta A = \frac{mg}{\Delta p}$

$$\Delta A = \frac{2\times 10^3 \times 9.8N}{1.8\times 10^3\ n/m^2} = 11\ m^2$$

(09) El aceite, $\rho = 800\ kg/m^3$, en un tubo es mantenido a una presión de 3 atm, por encima del agua de un tanque que lo circunda. Si el tubo de aceite tiene una fuga (área de la abertura de $2\,mm^2$), (a) ¿con qué rapidez escapará el aceite dentro del tanque?; (b) ¿Cuánto aceite escapará cada minuto?

Solución:

a) Según la Ecuación de Bernoulli: $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$

$p_1 = p_0$, $y_1 = y_2$, $v_1 = 0$, luego

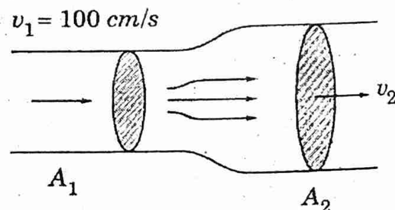
$v = \sqrt{2(p_o - p)/\rho}$, donde $p_0 - p = 3\text{atm} = 3\times 10^5\ N/m^2$ y $\rho = 800\ Kg/m^3$

$v = 866\ m/s$

b) Sabemos que $Q = \frac{V}{t} = vA$, $V = vAt = 866 \times 2\times 10^{-6} \times 60\,m^3$

$V = 0.10\ m^3$.

(10) Soldado al extremo de un tubo largo de agua (diámetro 25 cm.), está un tubo pequeño con diámetro de 2.5 cm. Si el agua fluye fuera del tubo pequeño con una rapidez de 100 cm/seg. (a) ¿Cuánta agua fluirá fuera cada segundo. (b) ¿Qué tan rápido se moverá el agua en el tubo mayor?. Suponga que ambos tubos están llenos.



Solución:

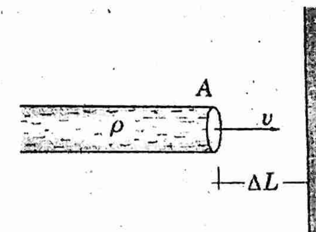
a) Sabemos que el caudal $Q = \frac{V}{t} = vA$

$V = vAt$, cada segundo sale el volumen equivalente de agua de 100 cm. de longitud y 2.5 cm. de diámetro, luego $V = \pi\frac{2.5^2}{4}\times 100 = 491\ cm^3$.

b) Para hallar v_2 , de la ecuación de continuidad:

$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad v_2 = v_1(A_1/A_2) = 100\times(2.5/25)^2 = 1\ cm/s$

(11) Un chorro de agua que sale por un tubo de diámetro de 1 cm, con velocidad de 1 m/s, choca contra una pared vertical. Hallar la fuerza que actúa sobre la pared, considerando que el tubo está dirigido perpendicularmente a la pared y el agua no se salpica.



Solución:

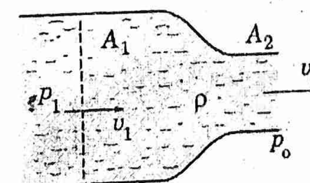
En un tiempo Δt , el líquido recorre una distancia $\Delta L = v\Delta t$, la variación de cantidad de movimiento $\Delta p = (\Delta m)v = F\Delta t$ .... (1)

$\Delta m = \rho\Delta V = \rho A\Delta L = \rho A v\Delta t = \frac{\pi d^2}{4}\rho v\Delta t$ .... (2)

De (1) y (2): $\frac{\pi d^2}{4}\rho v\Delta t v = F\Delta t$, $F = \rho\pi d^2 v^2/4$

Reemplazando valores: $F = 0.8\,N$

(12) De una tobera de sección A_1 sale una corriente de líquido ($\rho = 0.87$ g/cc) bajo la acción de una presión p_1, actuando fuera la presión atmosférica. ¿Cuál es la velocidad de salida v del chorro de líquido? $\Delta p = 10\ atm$ y $A_1 >> A_2$.



Solución:

De la Ecuación de Bernoulli:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

donde: $p_2 = p_0$, $y_1 = y_2 = 0$, $\Delta p = p_1 - p_0$

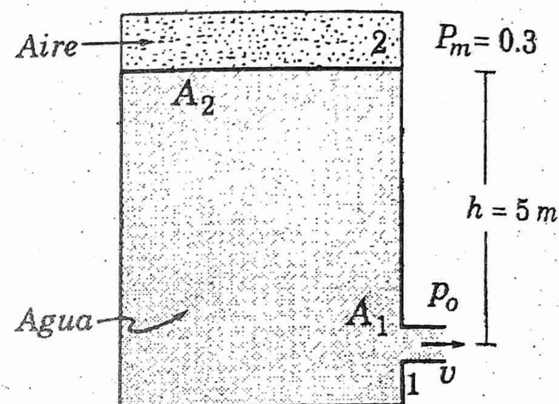
$$A_1 >> A_2 \quad \text{y} \quad v_2 >> v_1$$

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_1 = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) \doteq p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2(p_1 - p_0)/\rho} = \sqrt{2\Delta p/\rho} = 47.5 \text{ m/s}$$

(13) El agua que se encuentra en un depósito cerrado, está sometido a una presión manométrica de 0.3 Kg/cm² ejercida por aire comprimido, introducido en la parte superior del depósito. En la pared lateral del mismo hay un pequeño orificio situado a 5 m por debajo del nivel del agua. Hallar la velocidad con la cual sale el agua por este orificio. La sección superior es mucho mayor que el orificio.



Solución:

Tomemos los puntos (1) y (2), y la Ecuación de Bernoulli.

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

donde: $y_1 = 0$, $y_2 = h$, $p_1 = p_o$

Como: $A_2 > A_1$, $v_1 > v_2$, $v_1^2 >> v_2^2$

$$p_o + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + 0 \doteq p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h$$

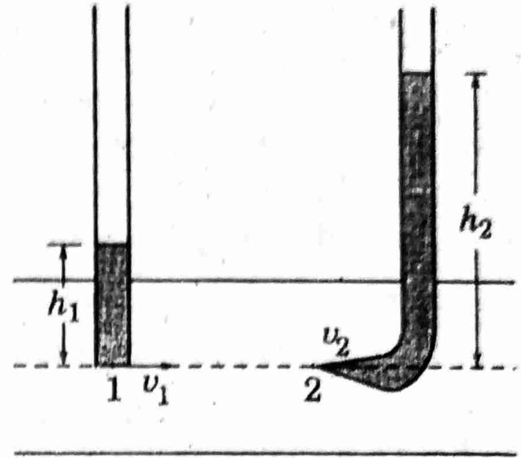
$$\tfrac{1}{2}\rho\,(v_1^2 - v_2^2) = (p_2 - p_0) + \rho g h \quad \text{y} \quad p_2 - p_0 = p_{2m}$$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_{2m} + \rho g h$$

$$v_1 = \sqrt{(2p_{2m}/\rho) + 2gh}$$

Reemplazando valores: $v_1 = \sqrt{2 \times 0.3 \times 10^4 \times 9.8/10^3 + 2 \times 9.8 \times 5} = 12.5 \text{ m/seg}$

(14) Un tubo de Pitot se emplea para medir la velocidad del agua en el centro de una tubería. La altura de presión de estancamiento es de 5.58 m y la altura de presión estática es de 4.65 m ¿Cuál es la velocidad?



Solución:

Se toma los puntos (1) y (2) y la ecuación de Bernoulli.

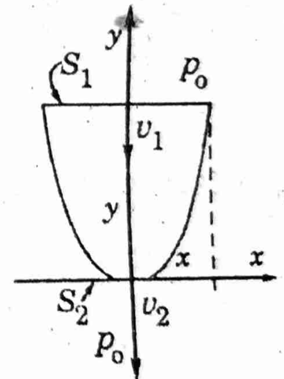
$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$y_1 = y_2 = 0 \ , \ v_2 \approx 0 \ , \ p_2 - p_1 = \rho g(h_2 - h_1)$$

$$v_1 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 0.93} = 4.26 \text{ m/s}$$

(15) Los relojes de agua de Grecia antigua representan un recipiente con un orificio pequeño O. El tiempo se marca por el nivel de agua en el recipiente. ¿Qué forma debe tener el recipiente para que la escala del tiempo sea uniforme?





Solución:

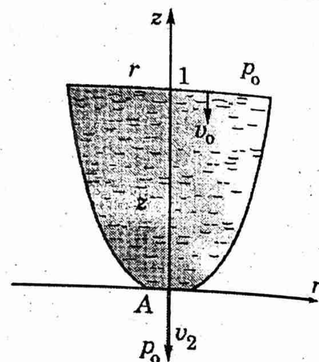
Se tiene $S_1 > S_2$, de la ecuación de Torricelli:

$v_2 = \sqrt{2gy}$

Ecuación de continuidad: $S_1 v_1 = S_2 v_2$

$\pi x^2 v_1 = S_2\sqrt{2gy}$, despejando y, $y\frac{v_1}{S_2} =$ constante, se tiene $y = \frac{\pi^2 v_1^2}{2gS_2^2}x^4$

(16) Un recipiente con simetría de revolución deja salir el líquido por una pequeña abertura en la parte inferior. (a) ¿Cuál debe ser la forma de la curva generatriz para que diferencias iguales de la altura de la superficie libre correspondan a intervalos de tiempos iguales (se prescinde de la contracción de la vena)? Si $A = 1\ \text{mm}^2$, $v_o = dz/dt = 0.1\ \text{mm/s}$. (b) ¿Qué radio máximo presenta el reloj si debe funcionar durante una hora?



Solución:

a) De la ecuación de Bernoulli: $$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

$$p_1 = p_2 = p_0 \ , \ z_2 = 0 \ , \ v_1 = v_0$$

Luego: $\frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g z = \frac{1}{2}\rho v_2^2$

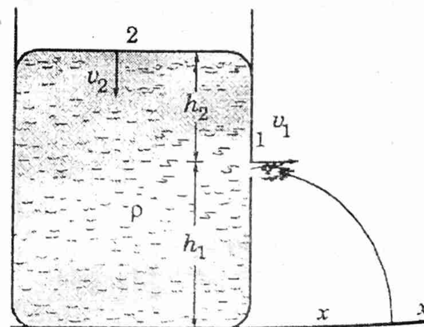
De la ecuación de continuidad: $\pi r^2 v_0 = A v_2$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g z = \tfrac{1}{2}\rho\left(\frac{\pi r^2 v_0}{A}\right)^2 \quad ; \quad z = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{\pi^2 r^4}{A^2} - 1\right)$$

b) En este caso: $dz = v_0 dt$ $\quad z = \int_0^{3600} v_0 dt = v_0 t \big/_0^{3600} = 0.1 \times 3600 = 360\ \text{mm}$

$$z = 36\,\text{cm}$$

(17) Sobre una mesa hay una vasija con agua. En la pared lateral de esta vasija hay un orificio pequeño situado a la distancia h_1 del fondo de la vasija y a la distancia h_2 del nivel del agua. Este nivel se mantiene constante. ¿A qué distancia del orificio (en dirección horizontal) caerá sobre la mesa el chorro de agua? Resolver este problema para los casos: (1) $h_1 = 25$ cm y $h_2 = 16$ cm y (2) $h_1 = 16$ cm y $h_2 = 25$ cm



Solución:

Usando la Ecuación de Bernoulli: $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$

donde: $p_1 = p_2 = p_0 \ , \ y_1 = 0 \ , \ y_2 = h_2$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad \text{.......... (1)}$$

De la ecuación de continuidad: $A_2 v_2 = A_1 v_1 \ , \ v_2 = v_1 A_1/A_2$

Reemplazando en (1): $\frac{1}{2}\rho(v_1 A_1/A_2)^2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \rho g h_2$

$$v_1 = [2gh_2/(1-(A_1/A_2)^2)]^{1/2}$$

Si: $A_2 > A_1 \quad v_1 = \sqrt{2 g h_2}$

En cinemática, se tiene el movimiento de proyectil en dos dimensiones:

$$x = v_1 t \ , \ h_1 = \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$x = \sqrt{2gh_2}\,\sqrt{2h_1/g} = \sqrt{4h_1h_2} \ , \ x = 2\sqrt{h_1 h_2}$$

Si $h_1 = 25$ cm y $h_2 = 16$ cm , $x = 40$ cm

Si $h_1 = 16$ cm y $h_2 = 25$ cm , $x = 40$ cm

(18) En el venturímetro mostrado en la figura, la lectura del manómetro diferencial de Hg es 25 cm. Hallar el caudal de agua a través del venturímetro si se desprecia las pérdidas entre A y B.

Solución:

De la ecuación de Bernoulli: $p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B = p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A \ , \ h_A = 0$.

Y por la ecuación de continuidad:

$$A_B v_B = A_A v_A$$

$$v_A = \frac{A_A}{A_B} v_A = \frac{\pi \times 20^2}{\pi \times 10^2} v_A \ , \ v_B = 4 v_A$$

$$p_B + \tfrac{1}{2}\rho(4v_A)^2 + \rho g h_B = p_A + \tfrac{1}{2}\rho v_A^2$$

$$\tfrac{17}{2}\rho v_A^2 = (p_A - p_B) - \rho g h_B \quad \text{.......... (1)}$$

Sea y la distancia dada: $P_M = P_R$

$$p_A + \rho g y + \rho g h_1 = p_B + \rho g(h_B + y) + \rho_{Hg} g h_1$$

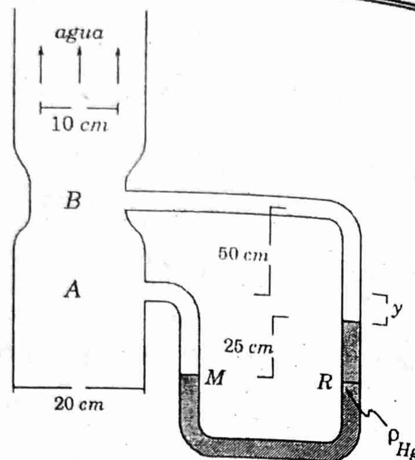
$$p_A - p_B = \rho g(h_B - h_1) + \rho_{Hg} g h_1 \quad \text{........} \quad (2)$$

donde: $h_B = 50$ cm , $h_1 = 25$ cm .

Reemplazando (2) en (1):

$$\tfrac{17}{2}\rho v_A^2 = \rho g(h_B - h_1) + \rho_{Hg}\, g h_1 - \rho g\, h_B$$

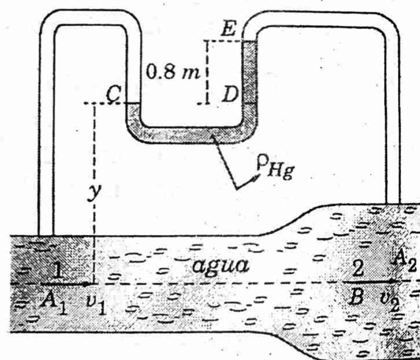
$$v_A = \sqrt{2(\rho_{Hg} - \rho)\, g\, h_1 / 17\rho} = 1.9 \text{ m/s}$$



y el caudal $\quad Q = \dfrac{\pi d_A^2}{4} v_A$

$$Q = \frac{3.14 \times 0.2^2}{4} \times 1.9 \text{ m}^3/\text{seg} = 0.06 \text{ m}^3/\text{seg}$$

(19) Un manómetro diferencial está unido a dos secciones rectas A y B, de una tubería horizontal por la que circula agua. La lectura en el manómetro de Hg es de 0.80 m, siendo el nivel más cerca a A el más bajo. Hallar el caudal, si las secciones $A_1 = 4$ cm^2 y $A_2 = 2$ cm^2.



Solución:

Considerando los puntos (1) y (2):

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$y_1 = y_2 = 0$$

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \text{..........} \quad (1)$$

De la ecuación de continuidad: $A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$2A_2 v_1 = A_2 v_2 \quad , \quad v_2 = 2v_1 \quad \text{..........} \quad (2)$$

$$p_1 = P_C + \rho g y \ , \ P_C = P_D \ , \ P_E + \rho_{Hg} g\, 0.8 = P_D \ , \ P_2 = P_E + \rho g(0.8 + y)$$

Luego: $p_1 - p_2 + (\rho_{Hg} - \rho) g\, 0.8$ .... (3)

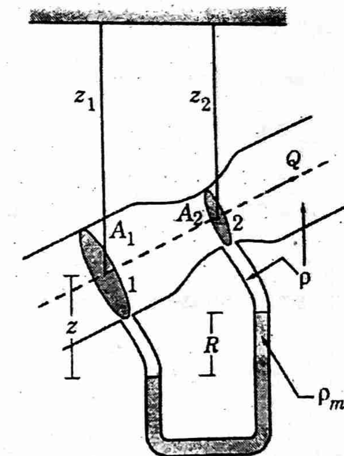
De (3) y (2) en (1): $\quad (\rho_{Hg} - \rho) g\, 0.8 + \tfrac{1}{2}\rho (v_1)^2 = \tfrac{1}{2}\rho (2v_1)^2$

$$v_1 = \left[\frac{1.69\, g}{3\rho}(\rho_{Hg} - \rho)\right]^{1/2} = 8.11 \text{ m/s}$$

El caudal será: $\quad Q = A_1 v_1 = \dfrac{\pi d_1^2}{4} v_1$

$$Q = 32.5 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{seg}$$

(20) En el venturímetro que se indica en la figura, hallar el caudal en función de las cantidades que se indican.



Solución:

Sea z la distancia que se muestra en la figura. De la ecuación de Bernoulli:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g \times 0 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(z_1 - z_2) \ \ldots \ (1)$$

De la ecuación de continuidad:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \ , \ v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \quad \text{..........} \quad (2)$$

Para determinar la diferencia de presiones, usamos el manómetro diferencial:

$$p_1 + \rho g(z + R) = p_2 + \rho g z + \rho_m g R + \rho g(z_1 - z_2)$$

$$p_1 - p_2 = (\rho_m - \rho) g R + \rho g(z_1 - z_2) \quad \text{..........} \quad (3)$$

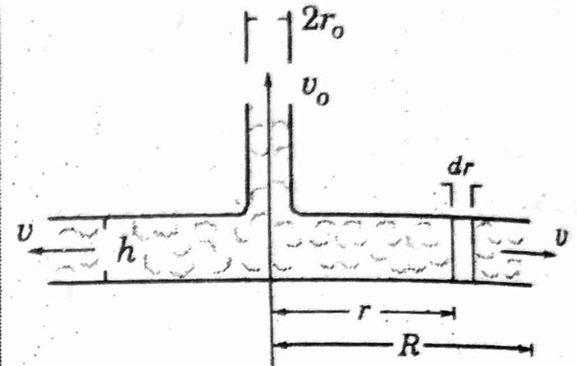
De (3), (2) en (1): $\quad p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 - \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g(z_1 - z_2)$

$$(\rho_m - \rho)\, g R + \rho g(z_1 - z_2) = \tfrac{1}{2}\rho \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 v_1^2 - \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g(z_1 - z_2)$$

Simplificando: $$v_1 = \left[\frac{2Rg\,A_2^2(\rho_m - \rho)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

El gasto será: $$Q = A_1 v_1 = A_1 A_2 \left[\frac{2\,Rg(\rho_m - \rho)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

21) De un tubo cilíndrico de radio r_0 sale aire con una velocidad v_0 entre dos placas circulares paralelas (radio R) de forma radial. La compresibilidad del aire puede despreciarse. ¿Cuánto vale la fuerza atractiva entre las placas si están a una pequeña distancia h?



Solución:

De la Ecuación de Bernoulli:

$$p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g \times 0 = p_r + \tfrac{1}{2}\rho v_{(r)}^2 + \rho g \times 0$$

$$\Delta p = p_0 - p_r = \tfrac{1}{2}\rho v_{(r)}^2 - \tfrac{1}{2}\rho v^2 \qquad (1)$$

De la ecuación de continuidad: $\pi r_0^2 v_0 = 2\pi r h v_{(r)}$

$$v_{(r)} = v_0 r_0^2 / 2hr \qquad (2)$$

También para el extremo del disco: $\pi r_0^2 v_0 = 2\pi R h v$

$$v = r_0^2\, v_0 / 2Rh \qquad (3)$$

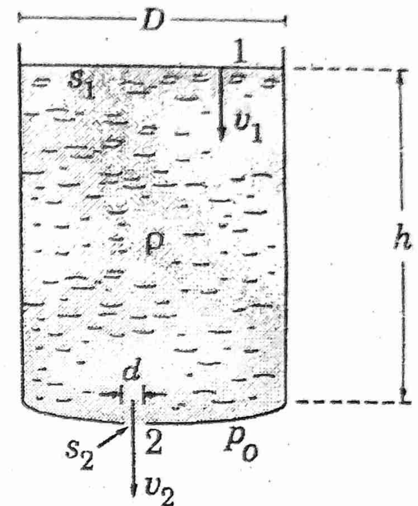
De (2) y (3) en (1): $$\Delta p = \tfrac{1}{2}\rho(v_0\, r_0^2/2hr)^2 - \tfrac{1}{2}\rho(r_0^2\, v_0/2Rh)^2$$

$$\Delta p = \frac{\rho v_0^2 r_0^4}{8h^2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right)$$

Luego, la fuerza pedida: $$F = \int_{r_0}^{R} \Delta p\, dA = \int_{r_0}^{R} \Delta p\,(2\pi r dr)$$

$$F = 2\pi \frac{\rho v_0^2 r_0^4}{8h^2} \int_{r_0}^{R} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right) r\, dr = \pi \frac{\rho v_0^2 r_0^4}{8h^2} \left[2Ln\left(\frac{R}{r_0}\right) - 1 + \frac{r_0^2}{R^2} \right]$$

(22) Un recipiente cilíndrico tiene en su fondo un orificio circular de diámetro $d = 1$ cm . El diámetro del recipiente es $D = 0.5$ cm . Hallar la velocidad v con la que baja el nivel de agua en este recipiente en función de la altura h de dicho nivel, si $h = 0.2$ m .



Solución:

Comparando los puntos 1 y 2, y de la ecuación de Bernoulli:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$p_1 = p_2 = p_0 \ , \ y_1 = h \ , \ y_2 = 0$$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \text{.................................} \quad (1)$$

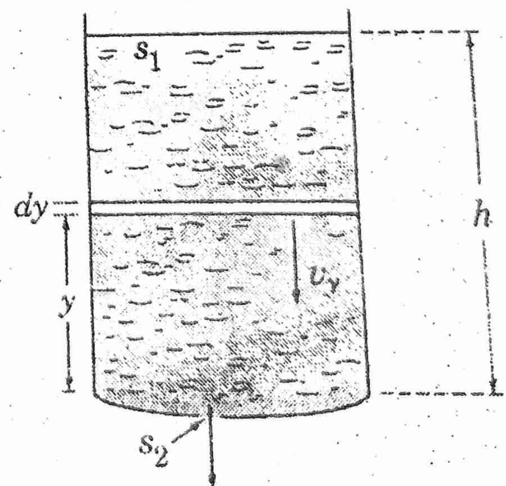
De la ecuación de continuidad: $s_1 v_1 = s_2 v_2$

$$v_2 = s_1\, v_1 / s_2 \quad \text{.................................} \quad (2)$$

De (2) en (1) y despejando v_1 : $\quad v_1 = \dfrac{s_2\sqrt{2gh}}{(s_1^2 - s_2^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{d^2\sqrt{2gh}}{(D^4 - d^4)^{\frac{1}{2}}}$

Reemplazando valores: $v_1 = 8 \times 10^{-4}$ m/s

(23) Un depósito cilíndrico de altura $h = 1$ m, está lleno de agua hasta los bordes. (a) ¿Cuánto tiempo tardará en salir toda el agua a través de un orificio situado en el fondo del depósito? El área de la sección transversal del orificio es 400 veces menor que el de la sección transversal del depósito.



Solución:

La figura es análoga al problema anterior con datos:

Se ha deducido anteriormente: $v_1 = \dfrac{s_2\sqrt{2gh}}{(s_1^2 - s_2^2)^{\frac{1}{2}}}$

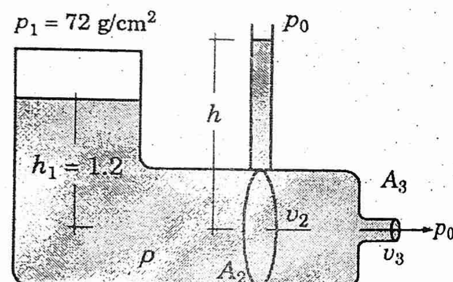
Ahora en un dt el agua baja una distancia dy :

$$v_y = -\frac{dy}{dt} = \frac{s_2\sqrt{2gy}}{(s_1^2 - s_2^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad -\int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{2gy}} = \frac{s_2}{(s_1^2 - s_2^2)^{\frac{1}{2}}}\int_0^t dt$$

Integrando: $t = \dfrac{2\sqrt{h}\,(s_1^2 - s_2^2)^{\frac{1}{2}}}{s_2\sqrt{2g}}$

Reemplazando valores: $t = 180$ *seg*

(24) Agua de mar ($\rho = 1.083\ \text{g/cm}^3$) alcanza en un depósito muy grande de sección y de altura de 1.2 m. El depósito contiene aire comprimido a la presión manométrica de $72\ \text{g/cm}^2$. El tubo horizontal de desagüe tiene secciones transversales máximas y mínimas de 18 y 9 cm^2 respectivamente.



a) ¿Qué cantidad de agua sale por segundo. b) ¿Hasta qué altura h llega el agua en el tubo abierto?. c) Si se perfora ahora el depósito en la parte superior, anulándose la presión manométrica, ¿Cuál será la altura h?

Solución:

a) Comparemos el punto (1) y (2): $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g \times 0$

Ahora, comparemos el punto (2) y (3): $p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + 0$

Luego: $p_2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2$, reemplazando en la primera expresión:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_3^2 - \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_1 = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho\left(v_3^2 - v_1^2\right) - \rho g h_1$$

Como: $A_1 > A_3$, $v_3 > v_1$

$$p_1 = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_3^2 - \rho g h_1$$

$$v_3 = \sqrt{2(p_1 - p_0 + \rho g h_1)/\rho}$$

donde $p_1 - p_0 = p_{1m} = 72\ \text{g/cm}^2$, $h_1 = 1.2\ \text{m}$, $\rho = 1\ \text{g/cm}^3$

$v_3 = 603.02\ \text{cm/seg}$. Luego: $Q = A_3 v_3 = 5.4\ lt$

b) Cuando se aplicó la Ecuación de Bernoulli a los puntos (2) y (3), se obtuvo:

$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_3^2$, de donde:

$p_2 - p_0 = \frac{1}{2}\rho v_3^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2$ .... (1)

Pero , $p_o + \rho g h = p_2$ y $A_3 v_3 = A_2 v_2$

Reemplazando en (1): $\rho g h = \frac{1}{2}\rho v_3^2 - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_3}{A_2}\right)^2 v_3^2$; $h = \dfrac{v_3^2[1 - (A_3/A_2)^2]}{2g}$

Donde: $v_3 = 603\ \text{cm/s}$, $A_2 = 18\ \text{cm}^2$, $A_3 = 9\ \text{cm}^2$, $h = 1.39\ \text{m}$

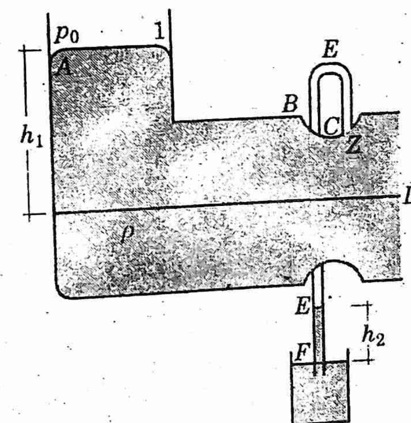
c) Hallemos primeros v_3 : $v_3 = \sqrt{2gh} = 484.97\ \text{cm/seg}$

También se ha deducido anteriormente: $h = \dfrac{v_3^2[1 - (A_3/A_2)^2]}{2g}$

$$h = \frac{v_3^2[1 - (1/2)^2]}{2g} = \frac{3v_3^2}{8g} = \frac{3 \times 484.97^2}{8 \times 980}\ \text{cm}$$

$$h = 89.9\ \text{cm}$$

(25) Dos depósitos abiertos muy grandes A y F (ver figura) contienen el mismo líquido. Un tubo horizontal BCD, que tiene un estrechamiento en C, descarga agua del fondo del depósito A, y un tubo vertical E se abre en C en el estrechamiento y se introduce en el líquido del depósito F. Supóngase que el régimen es currentilíneo y que no hay viscosidad. Si la sección transversal en C es la mitad que en D, y si D se encuentra a una distancia h, por debajo del nivel del líquido en A. ¿Qué altura h_2 alcanzará el líquido en el tubo E?



Solución:

Comparemos los puntos 1 y 3.

Según la Ecuación de Bernoulli: $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g h_3$

donde: $p_1 = p_3 = p_0$, $h_3 = 0$, $v_1 = 0$

Reemplazando y simplificando: $\rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_3^2 \quad v_3^2 = 2gh_1$ .... (a)

De la ecuación de continuidad: $A_2 v_2 = A_3 v_3$

Como: $A_3 = 2A_2$, $v_2 = 2v_3$ .... (b)

Comparando los puntos 2 y 3:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho_3^2 + \rho g h_3$$

Donde: $p_3 = p_0$, $h_2 = h_3 = 0$

$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_3^2$ .... (c)

De (b) en (c): $p_2 + \frac{1}{2}\rho(2v_3)^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_3^2$

$p_2 - p_0 = -\frac{3}{2}\rho v_3^2$ .... (d)

De (a) en (d): $p_2 - p_o = -\frac{3}{2}\rho 2gh_1$ .... (e)

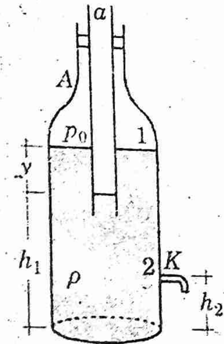
Comparando los puntos E y F: $P_E + \rho g h_2 = P_F = p_0$

Según el enunciado del problema: $p_2 = P_E$

Luego: $p_2 + \rho g h_2 = p_0$, $p_2 - p_0 = -\rho g h_2$

Reemplazando en (e): $-\rho g h_2 = -\frac{3}{2}\rho 2gh_1$, $h_2 = 3h_1$

(26) Un recipiente A (frasco de Mariotte), cuyo interior se mantiene en comunicación con la atmósfera a través del tubo de vidrio a que atraviesa el tapón enmasillado que cierra su gollete, está lleno de agua. El grifo K se encuentra a la distancia $h_2 = 2$ cm del fondo del recipiente. Hallar la velocidad con que saldrá el agua por el grifo K en los casos en que la distancia entre el extremo inferior del tubo a y el fondo del recipiente, sea: (a) $h_1 = 2$ cm , (b) $h_1 = 7.5$ cm y (c) $h_1 = 10$ cm



Solución:

De la Ecuación de Bernoulli: $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$

donde: $p_1 + \rho g y = p_0$, $y_1 = y + h_1 - h_2$, $y_2 = 0$

$p_2 = p_0$ y $v_1 \approx 0$ (baja lentamente la presión en la superficie del líquido encerrado está por debajo de la presión atmosférica).

Luego : $(p_0 - \rho g y) + \frac{1}{2}\rho \times 0^2 + \rho g(y + h_1 - h_2) = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g \times 0$

Simplificando: $v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$

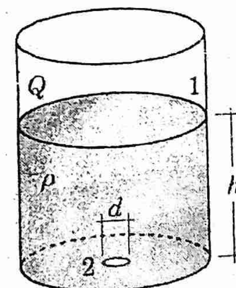
Reemplazando valores, para $h_2 = 2$cm

a) Para $h_1 = 2$ cm $v_2 = 0$ m/s

b) Para $h_1 = 7{,}5$ cm , $v_2 = 1.04$ m/s

c) Para $h_1 = 10$ cm , $v_2 = 1.25$ m/s

(27) En un recipiente se echa agua a razón de 0.2 litros/seg. ¿Qué diámetro d deberá tener el orificio que hay en el fondo del recipiente para que el agua se mantenga en él a un nivel constante $h = 8.3$ cm ?



Solución:

Sabemos que: $Q = Av = \frac{\pi d^2}{4} v_2$

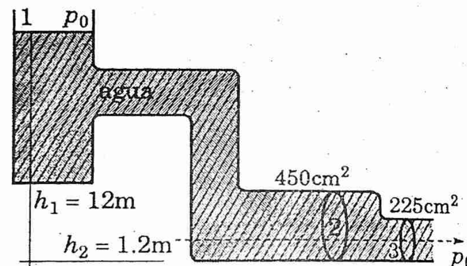
Si la sección del recipiente en la región (1) es muchísimo mayor que el orificio en el fondo, por Torricelli: $v_2 = \sqrt{2gh}$

$$Q = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh} \quad , \quad d = \left[\frac{4Q}{\pi(2gh)^{1/2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

donde $\quad Q = 0.2\ \ell/\text{seg} = 2\times 10^{-4}\ \text{m}^3/\text{seg} \quad$ y $\quad h = (8.3)10^{-2}\,\text{m}$

$$d = 1.41\times 10^{-2}\,\text{m}$$

(28) El agua sale continuamente del depósito representado en la figura. La altura del punto (1) es 12 m, la de los puntos (2) y (3) es 1.2 m. La sección transversal en el punto (2) es 450 cm^2 y en el punto (3) es 225 cm^2. El área del depósito es muy grande comparada con las secciones del tubo. (a) Hállese la presión manométrica en el punto (2) y (b) el gasto en litros por segundo.



Solución:

Comparemos los puntos (1) y (2): $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$

donde: $\quad p_1 = p_0 \quad , \quad y_1 = h_1 = 12\,\text{m}$

$\quad y_2 = h_2 = 1.2\,m \quad , \quad v_1 = 0$ reemplazando:

$$p_0 + \rho g h_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$p_2 = p_0 + \rho g(h_1 - h_2) - \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Comparemos los puntos (1) y (3): $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g h_3$

donde: $p_1 = p_0 + v_1 \approx 0 \quad , \quad h_1 = 12\,\text{m}$

$p_3 = p_0 \quad , \quad h_2 = h_3 = 1.2\,m\,.$ Luego:

$$\tfrac{1}{2}\rho v_3^2 = \rho g(h_1 - h_3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

De la ecuación de continuidad: $A_2 v_2 = A_3 v_3 \ , \ v_2^2 = (A_3/A_2)^2 v_3^2 \quad \ldots\ldots (3)$

De (3) en (1): $\quad p_0 + \rho g(h_1 - h_2) - \frac{1}{2}\rho\,[v_3^2 (A_3/A_2)^2] = p_2$

Usando (3) y reemplazando en la última expresión, v_3

$$p_2 = p_0 + \rho g(h_1 - h_2) - \rho g(h_1 - h_3)(A_3/A_2)^2 \quad \text{y} \quad h_2 = h_3$$

$$p_2 = p_0 + \rho g(h_1 - h_2)[1 - (A_3/A_2)^2]$$

La presión manométrica en 2 será:

$$p_{2m} = p_2 - p_0 = \rho g(h_1 - h_2)[1 - (A_3/A_2)^2]$$

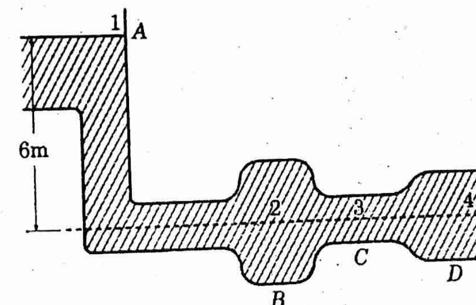
$$p_{2m} = 793{,}800\ \text{dinas/cm}^2$$

b) El caudal $Q = A_3 v_3 = A_3\sqrt{2g(h_1 - h_3)}$, donde:

$A_3 = 225\ \text{cm}^2 \quad h_1 = 12\ \text{m} \quad h_3 = 1.2\ \text{m}$

$Q = 327.35\times 10^3\ \text{cm}^3/\text{seg} \quad Q = 327\ \text{lt/seg}$

(29) El agua de un depósito muy extremo A, desciende y se mueve a lo largo de BCD, cuyo eje es horizontal. Si las secciones son: en B, 8 dm^2, en C, 3 dm^2, en D, 4 dm^2. Hallar la presión en C y la velocidad en B. (El área en A es muy grande con B, C y D).



Solución:

Comparamos (1) y (4): $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_4 + \frac{1}{2}\rho v_4^2 + \rho g y_4$

donde: $\quad p_1 = p_2 = p_0 = 1.013\times 10^5\ \text{N/m}^2$

$v_1^2 << v_4^2 \quad y_4 = 0 \quad y_1 = 6$ m

$v_4 = \sqrt{2gy} = 10.8$ m/s

Ahora hallemos v_3, para después determinar p_3.

Por la ecuación de continuidad: $A_3 v_3 = A_4 v_4$

$v_3 = A_4 v_4 / A_3 = 14.4$ m/seg

Compararemos (3) y (4): $p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 + \rho g y_3 = p_4 + \frac{1}{2}\rho v_4^2 + \rho g y_4$

donde: $y_3 = y_4 = 0 \quad , \quad p_4 = p_0$

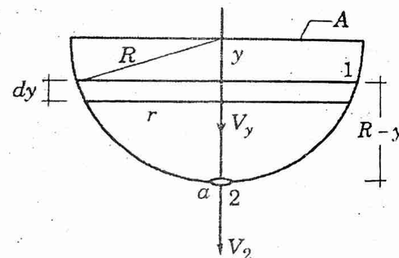
$p_3 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_4^2 - \frac{1}{2}\rho v_3^2$

Reemplazando valores: $p_3 = 0.553 \times 10^5$ N/m^2

Para hallar la velocidad en (2), de la ecuación de continuidad: $A_2 v_2 = A_3 v_3$

$v_2 = A_3 v_3 / A_2$ y $v_2 = 5.4$ m/seg

(30) Se tiene un recipiente semi-esférico abierto de paredes delgadas de radio $R = 1.6$ m, completamente lleno de un cierto líquido. Si en el fondo del recipiente se practica un agujero de $r = 1$ mm., determinar aproximadamente el tiempo que tarda en vaciarse el recipiente.



Solución:

Comparando los puntos (1) y (2): $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(R-y) = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g\ (0)$

donde: $p_1 = p_2 = p_0 \quad , \quad V_1 = V_y$

$\frac{1}{2}V_y^2 + g(R-y) = \frac{1}{2}\rho V_2^2$ .... (α)

De la ecuación de continuidad: $\rho\pi r^2 V_y = \rho a V_2 \quad , \quad V_2 = \pi r^2 V_y / a$ .... (β)

Reemplazando (β) en (α): $\frac{1}{2}\rho V_y^2 + \rho \cdot g(R-y) = \frac{1}{2}\rho\,(\pi r^2 V_y / a)^2$

$$V_y = \sqrt{\frac{2g(R-y)}{\frac{\pi^2 r^4}{a^2}}} = \sqrt{\frac{2ga^2(R-y)}{\pi^2(R^2-y^2)^2}}$$

simplificando: $\frac{dy}{dt} = \frac{a}{\pi}\sqrt{2g}\,\frac{(R-y)^{1/2}}{(R^2-y^2)}$

$$\frac{(R^2-y^2)}{(R-y)^{1/2}}\,dy = \frac{a\sqrt{2g}}{\pi}\,dt$$

Integrando:

$$R^2\int_0^R \frac{dy}{\sqrt{R-y}} - \int_0^R \frac{y^2}{\sqrt{R-y}}\,dy = \frac{a\sqrt{2g}}{\pi}\int_0^t dt$$

$$R^2(2R^{1/2}) - \frac{2}{15}(8R^2)(\sqrt{R}) = \frac{a\sqrt{2g}}{\pi}\cdot t$$

Luego: $t = \frac{14\pi R^{5/2}}{15a\sqrt{2g}}$, donde

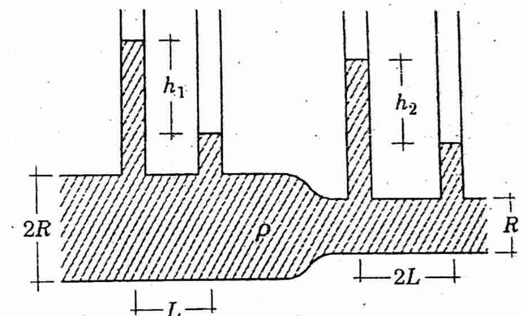
$R = 1.6\,m \quad , \quad a = \pi r^2 \quad , \quad r = 10^{-3}$ m

$g = 9.8$ m/seg^2

$t \cong 680{,}400$ seg

$t \cong 189\ h$

(31) Por el tubo mostrado en la figura circula de izquierda a derecha, un líquido viscoso en régimen laminar. Hallar la relación h_2/h_1.



Solución:

De la ecuación de Poiseville $\overset{\circ}{V} = \pi R^4\ \Delta p / 8\eta L$, aplicando para cada sección y longitud:

$\overset{\circ}{V}_1 = \pi(2R)^4\ \Delta p_1 / 8\eta L$, pero : $\Delta p_1 = \rho g h_1$

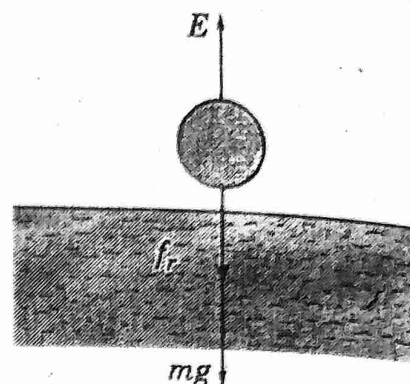
$\overset{\circ}{V}_1 = \pi(2R)^4\ \rho g h_1 / 8\eta L$

$\overset{\circ}{V}_2 = \pi R^4\ \Delta p_2 / 8\,\eta(2L)$, pero : $\Delta p_2 = \rho g h_2$

$\overset{\circ}{V}_2 = \pi R^4\ \rho g h_2 / 16\,\eta L$

Como el caudal es el mismo, $\overset{\circ}{V}_1 = \overset{\circ}{V}_2$, se obtiene $h_2/h_1 = 32$

(32) Una bola emerge con velocidad constante de un líquido cuya densidad es 5 veces mayor que la del material que está hecha la bola. ¿Cuántas veces mayor es la fuerza de rozamiento que actúa sobre la bola que emerge, que el propio peso de esta?



Solución:

Como el cuerpo se mueve con velocidad constante, entonces: $\Sigma F = 0$

$$E - f_r - mg = 0 \;\; , \;\; f_r = E - mg$$

$$f_r = \rho_L V_c g - \rho_c V_c g = (\rho_L - \rho_c) V_c g$$

El subíndice L se refiere al líquido $(\rho_L = 5\rho c)$

El subíndice C se refiere a la bola. Luego: $f_r = (5\rho_c - \rho_c)V_c g = 4\rho_c V_c g = 4mg$

(33) ¿Cuál será la velocidad máxima que puede alcanzar una gota de lluvia de diámetro 0.3 mm. si la viscosidad dinámica del aire es 1.2×10^{-4} $g/cm - seg$.

Solución:

Sabemos por teoría que la velocidad límite está dada por la expresión:

$v_1 = \frac{2r^2 g}{9\eta}(\rho - \rho_0)$, donde: $r = 15 \times 10^{-5}$ m , $\rho = 10^3$ Kg/m^3 (agua)

$\rho_0 = 1.32$ Kg/m^3 (aire) , $\eta = 1.2 \times 10^{-4}$ g/cm-seg

Reemplazando valores: $v_1 = 4.1$ m/seg

(34) Una bolita de acero de 1 mm. de diámetro cae con una velocidad constante de 0.185 cm/seg en un gran recipiente lleno de aceite de ricino. Hallar la viscosidad dinámica del aceite de ricino.

Solución:

Por teoría sabemos que la velocidad constante se alcanza a partir de la velocidad límite, es decir: v_l = velocidad constante, luego:

$\eta = 2r^2 g(\rho - \rho_0)/9\,v_l$, donde $r = 5\times10^{-2}$ cm . $v_l = 0.185$ cm/seg

$\rho_0 = 0.9\ \text{g/cm}^3$ (aceite) , $\rho = 7.7\ \text{g/cm}^3$ (acero)

$\eta = 20$ g/cm – seg

(35) Una bola de corcho de 5 mm. de diámetro emerge en un recipiente lleno de aceite de ricino. ¿A qué serán iguales las viscosidades dinámica y cinemática del aceite de ricino en las condiciones del experimento si la bola emerge con la velocidad constante de 3.5 cm/seg?

Solución:

También en este caso v_l = velocidad constante = 3.5 cm/seg

$\eta = 2r^2 g(\rho - \rho_0)/9\,v_l$, donde $r = 0.5$ cm , $\rho = 0.9\ \text{g/cm}^3$, $\rho_0 = 0.2\ \text{g/cm}^3$ (corcho), reemplazando $\eta = 10.9$ g/cm – seg .

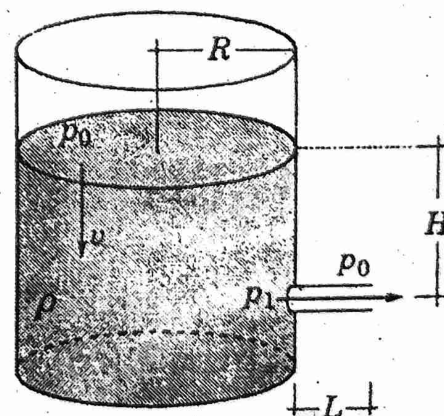
La viscosidad cinemática se define: $\nu = \dfrac{\eta}{\rho}$

$$\nu = 12\ \text{cm}^2/\text{seg}$$

(36) Un recipiente cilíndrico de radio $R = 2$ cm., tiene en su pared lateral un orificio en el cual va montado horizontalmente un tubo capilar de radio interior $r = 1$ mm y longitud $L = 2$ cm . Este recipiente contiene aceite de ricino cuya viscosidad dinámica $\eta = 12$ g/cm – seg . Hallar la variación de la velocidad, con que desciende el nivel del aceite en el recipiente en función de la altura h de este nivel sobre el tubo capilar. Hallar el valor numérico de esta velocidad cuando $h = 26$ cm .

Solución:

Sabemos por la ecuación de Poiseville, el caudal está dado: $Q = \pi \Delta p\, a^4 / 8\eta L$, para un tubo de radio a, longitud L y que presenta una diferencia de presiones entre sus extremos para un líquido viscoso η .



El caudal que baja en la parte superior del cilindro de radio R, con una velocidad v está dado por:

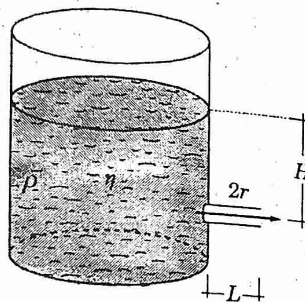
$Q = v\pi R^2$

Luego, como los caudales son los mismos:

$Q = v\pi R^2 = \pi\Delta a^4/8\eta L$, donde $p_1 = p_0 + \rho gH$, $p_2 = p_0$ y $\Delta p = p_1 - p_2 = \rho gH$

$v\pi R^2 = \pi\rho gHa^4/8\eta L$; $v = 2.98\times10^{-5}$ m/s. Reemplazando valores $V = \frac{\rho gHa^4}{8nLR^2}$

(37) En la pared lateral de un recipiente va montado horizontalmente un tubo capilar de radio interior $r = 1$ mm y longitud $L = 1.5$ cm. El recipiente contiene glicerina cuya viscosidad dinámica del experimento es $\eta = 1\,N - \text{seg/m}^2$. El nivel de la glicerina se mantiene constante a una altura $H = 0.18$ m sobre el tubo capilar. ¿Cuánto tiempo será necesario para que por el tubo capilar salgan 5 cm^3 de glicerina?



Solución:

Sabemos por la ecuación de Poiseville, el gasto: $Q = \frac{V}{t} = \pi\Delta p\, a^4/8\eta L$

Como en el problema anterior, el líquido baja debido a una diferencia de presión

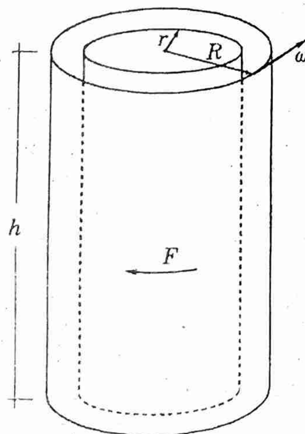
$\Delta p = \rho gH$, $\frac{V}{t} = \pi\Delta p\, a^4/8\eta L$

$t = \frac{8\eta LV}{\pi\rho gHa^4}$, donde $\eta = 1N - \text{seg/m}^2$, $L = 1.5\times10^{-2}$

$V = 5\times10^{-6}\text{m}^3$, $\rho = 1200\text{ Kg/m}^3$, $H = 18\text{m}$, $a = 10^{-3}\text{m}$

Se obtiene: $t = 90$ seg

(38) El espacio que hay entre dos cilindros coaxiales está lleno de gas. Los radios de los cilindros son respectivamente $r = 5$ cm y $R = 5.2$ cm. La altura del cilindro interior es h = 25 cm. El cilindro exterior gira a la velocidad correspondiente ω = 360 RPM. Para Evitar que el cilindro interior se mueva hay que aplicarle una fuerza tangencial $F = 1.38\times10^{-3}\,N$. Considerando en primera aproximación este caso como si se tratara de superficies planas, hallar el coeficiente de viscosidad del gas que hay entre los cilindros partiendo de los datos de este experimento.



Solución:

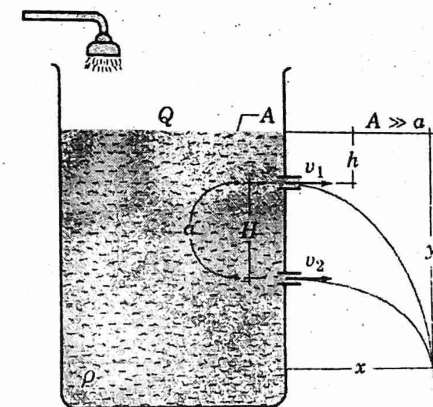
Podemos usar la expresión, definida en la teoría: $f = \eta A\frac{\Delta v}{\Delta r}$

donde: $A = 2\pi rh$, $\Delta r = R - r$, $\Delta v = \omega R - 0r = \omega R = 2\pi\nu R$

Entonces: $\eta = \frac{f\Delta r}{A\Delta v} = \frac{f(R-r)}{(2\pi rh)(2\pi\nu R)}$

$\eta = \frac{f(R-r)}{4\pi^2 rRh\nu}$. Reemplazando valores en el mismo sistema de unidades MKS, se obtiene: $\eta = 1.8\times10^{-5}\text{ N} - \text{seg/m}^2$.

(39) En la pared de un recipiente grande con agua se perforan dos orificios, uno encima de otro, de área 0.1 cm^2 cada uno. La distancia entre los orificios es 30 cm. En el recipiente se vierte un caudal de $100\text{ cm}^3/\text{s}$. Hallar el punto de intersección de los chorros de agua que salen de los orificios.



Solución:

Como $A \gg a$, usando el Teorema de Torricelli:

$\upsilon_1 = \sqrt{2gh}$, $\upsilon_2 = \sqrt{2g(h+H)}$ .... (1)

Usando las ecuaciones de la cinemática:

$x = \upsilon_1 t_1 = \upsilon_2 t_2$ .... (2)

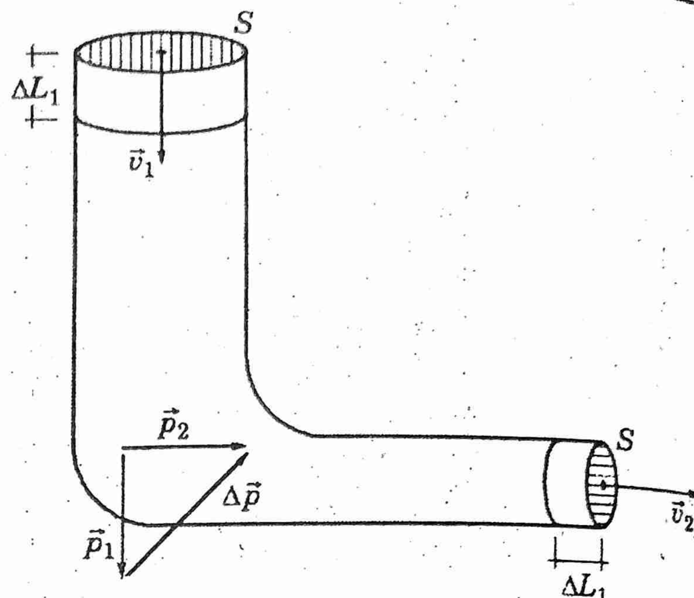
$y - h = \frac{1}{2}gt_1^2$, $y - h - H = \frac{1}{2}gt_2^2$ .... (3)

El caudal Q es igual al caudal que sale por los orificios:

$Q = a\upsilon_1 + a\upsilon_2$ .... (4)

De (1), (2), (3) y (4), se halla: $x = 254.12$ cm. , $y = 255.88$ cm.

(40) En un tubo doblado en ángulo recto de sección transversal S, pasa el gas con velocidad v. La densidad del gas es ρ. Con qué fuerza el gas actúa sobre el tubo? Prescindir de la composición del gas y del rozamiento.



Solución:

El problema lo resolveremos por variación de cantidad de movimiento y usando la segunda ley de Newton: $\overline{F} = \frac{\Delta \overline{P}}{\Delta t}$

Hallemos la variación de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo, para la sección vertical.

$$\vec{v}_1 = v(-\hat{j}) \qquad \frac{\overline{p}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_1 \overline{v}_1}{\Delta t} = \frac{\rho S \Delta L_1 \overline{v}_1}{\Delta t} = \frac{v \rho S \Delta t \overline{v}_1}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_2 = v\hat{i} \qquad \frac{\overline{p}_1}{\Delta t} = \frac{\rho S v \Delta t v}{\Delta t}(-\hat{J}) = \rho S v^2(-\hat{J})$$

Para la sección horizontal: $\frac{\overline{p}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2 \overline{v}_2}{\Delta t} = \frac{\rho S \Delta L_2 \overline{v}_2}{\Delta t} = \frac{\rho S v \Delta t \overline{v}_2}{\Delta t}$

$$\frac{\overline{p}_2}{\Delta t} = \frac{\overline{p}_2 - \overline{p}_1}{\Delta t} = \hat{i} = \rho S v^2(\hat{i})$$

Luego la variación de cantidad de movimiento por unidad de tiempo es:

$$\frac{\Delta \overline{p}}{\Delta t} = \frac{\overline{p}_2 - \overline{p}_1}{\Delta t} = \rho S v^2(\hat{i} + \hat{J})$$

La fuerza del tubo sobre el gas es: $\overline{F} = \frac{\Delta \overline{p}}{\Delta t} = \rho v^2 S(\hat{i} + \hat{J})$

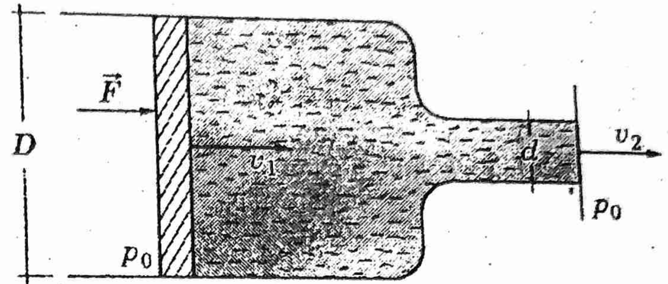
Luego la fuerza del gas sobre el tubo es: $\overline{F} = \rho v^2 S(-\hat{i} - \hat{J})$

(41) Un cilindro de diámetro D está lleno de agua y colocado horizontalmente como se indica en la figura. ¿Con qué velocidad se desplazará el embolo si sobre

él actúa una fuerza F y del orificio que hay en la pared posterior sale un chorro de diámetro d. No considere el rozamiento y la fuerza de la gravedad.

Solución:

De la ecuación de Bernoulli:



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

donde: $p_1 = p_0 + (F/S)$, $p_2 = p_0$

$$h_1 = h_2 = 0$$

$$p_0 + \frac{F}{S} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + 0 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0$$

$$\frac{F}{S} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De la ecuación de continuidad: $A_1 v_1 = A_2 v_2$, $\frac{\pi D^2}{4} v_1 = \frac{\pi d^2}{4} v_2$

$$v_2 = (D/d)^2 v_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

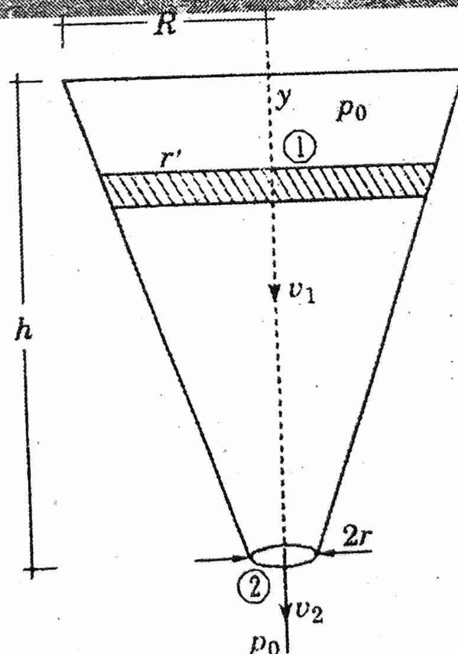
De (2) en (1): $\frac{F}{S} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho[(D/d)^2 v_1]^2$

$$v_1 = \frac{2d}{D}\left[\frac{2F}{\rho\pi(D^4 - d^4)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(42) Se tiene un recipiente de forma troncocónica el cual está lleno de agua hasta una altura h, si en el fondo abrimos un agujero de radio r. Hallar el tiempo vaciado.

Solución:

Tomando los puntos 1 y 2



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 =$$

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$p_1 = p_2 = po$$

$$y_1 = h - y$$

$$y_2 = 0$$

$\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g(h-y) = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$ .... (1)

De la ecuación de continuidad: $\pi r'^2\upsilon_1 = \pi r^2\upsilon_2$

$$\upsilon_2 = \frac{r'^2}{r^2}\upsilon_1 \quad \text{..............................} \quad (2)$$

De (2) en (1): $\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g(h-y) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{r'^2\upsilon_1}{r^2}\right)^2$

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g(h-y) = \frac{1}{2}\rho\frac{r'^4\upsilon_1^2}{r^4}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2g(h-y)}{\left(\frac{r'^4}{r^4}-1\right)}} \quad \text{..............................} \quad (3)$$

Pero en el gráfico se tiene la relación: $\frac{R}{h} = \frac{r'}{h-y}$ .... (4)

De (4) en (3):

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2g(h-y)}{\frac{\frac{R}{h}(h-y)^4}{r^4}-1}} = \upsilon_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\sqrt{2g}\,dt = \frac{R^2}{h^2r^2}\sqrt{\frac{(h-y)^4-1}{(h-y)}}\,dy$$

$$dt \cong \frac{R^2}{\sqrt{2g}\,h^2r^2}\sqrt{\frac{(h-y)^4}{(h-y)}}\,dy$$

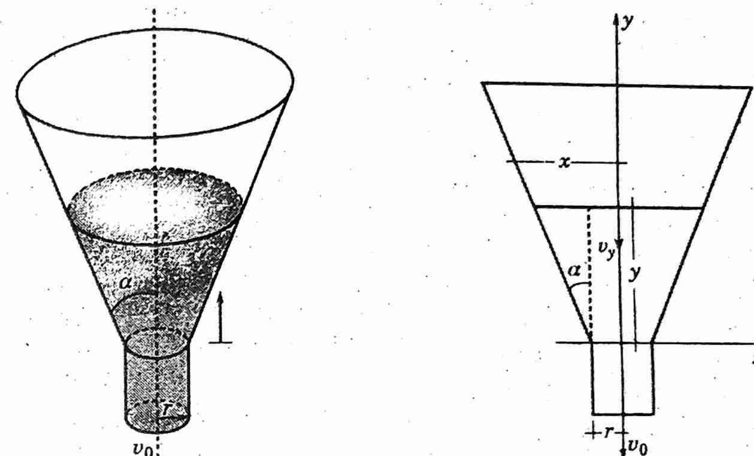
$$dt \cong \frac{R^2}{h^2r^2\sqrt{2g}}\sqrt{(h-y)^3}\,dy$$

$$\int_0^t dt = \frac{-R^2}{h^2r^2\sqrt{2g}}\int_0^h (h-y)^{3/2}(-dy)$$

$$t = \frac{R^2}{5r^2}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

(43) Sea en la figura, agua de una densidad ρ y que sale del fondo de un embudo en forma de cono truncado de semiángulo α. Suponiendo que el agua salga a una velocidad υ_o por una abertura de radio r al fondo. Hallar la velocidad del fluido υ (y) a un altura y por encima de la base del embudo.

Solución:



Por la ecuación de continuidad: $\pi x^2\upsilon_y = \pi r^2\upsilon_0$ .... (1)

En el triángulo de la figura: $tg\,\alpha = \frac{x-r}{y}$, $x = y\,tg\,\alpha + r$

Reemplazando x en (1): $\pi(r + y\,tg\alpha)^2\upsilon_y = \pi r^2\upsilon_0$

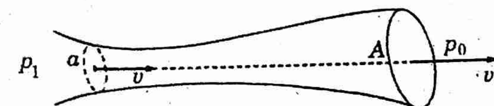
$$\upsilon = r^2\upsilon_0/(r + y\,tg\,\alpha)^2$$

(44) Si la presión P en algún punto de un fluido en movimiento se hace muy pequeña, observamos la aparición de burbujas, que se asocia a la liberación de gases disueltos. Este fenómeno se conoce como cavitación, demuestren que, si sale agua de una tubería horizontal de área A a una velocidad υ_o, entonces la cavitación se producirá si corriente arriba hay un estrangulamiento de área dada por:

$$a = A/[1 + 2p_0/\rho\upsilon_0^2]^{1/2}$$

Solución:

Sea el gráfico del problema:



Usando la ecuación de Bernoulli para los dos puntos:

$$p_1 + 1/2\,\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + 1/2\,\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$p_1 = p \;,\; p_2 = p_0 \;,\; y_1 = y_2$$

$$v_1 = v \;\; \text{y} \;\; v_2 = v_0$$

$$p + 1/2\,\rho v^2 = p_0 + 1/2\,\rho v_0^2$$

Para que se produzca la cavitación: $p_0 \gg p$

$$1/2\,\rho v^2 = p_0 + 1/2\,\rho v_0^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

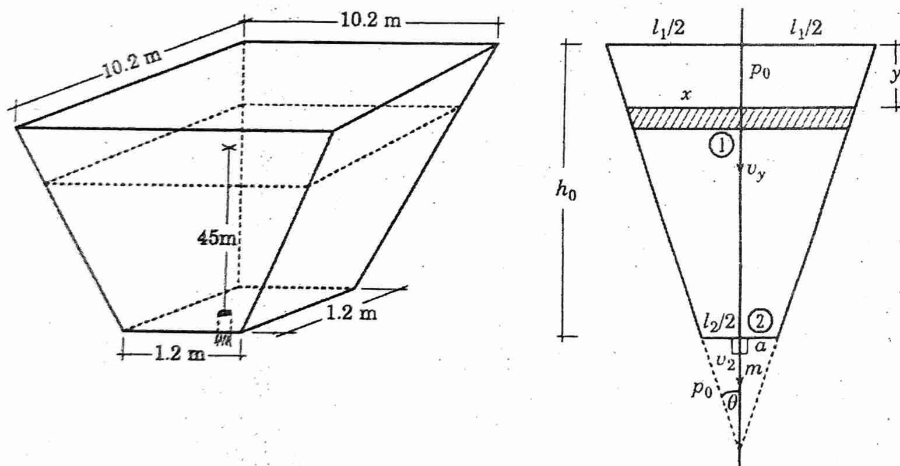
De la ecuación de continuidad: $av = Av_0 \;,\; v = A/a\, v_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$

De (2) en (1): $\frac{1}{2}\rho\left(\frac{Av_0}{a}\right)^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2$

$$a = A/[1 + 2\,p_0/\rho\, v_0{}^2]^{1/2}$$

(45) Un tanque de forma piramidal de 4.5 m de profundidad, construido como se muestra en la figura, inicialmente está lleno de agua. En el fondo del mismo se abre un orificio de 30 cm^2 de área, dejando que escurra el agua por él. Cuánto tiempo debe transcurrir para que se vacíe completamente el tanque?

Solución:



Usando la ecuación de Bernoulli para los dos puntos:

$$p_1 + 1/2\,\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + 1/2\,\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$p_1 = p_2 = p_0 \;,\; v_1 = v_y \;,\; y_1 = h_0 - y \;,\; y_2 = 0$$

$$p_0 + 1/2\,\rho v_y^2 + \rho g(h_0 - y) = p_0 + 1/2\,\rho v_2^2 + \rho g(0)$$

$$1/2\,\rho v_y^2 + \rho g(h_0 - y) = 1/2\,\rho v_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De la ecuación de continuidad:

$$(2x)^2 v_Y = a v_2 \;,\; v_2 = (4x^2/a)\,v_y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De (2) en (1): $1/2\,\rho v_y^2 + \rho g(h_0 - y) = 1/2\,\rho\left[\left(\frac{4x^2}{a}\right)v_y\right]^2$

$$v_y = \sqrt{\frac{2g(h_0 - y)}{\left[\frac{16x^4}{a^2} - 1\right]}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Por relaciones: $\operatorname{tg}\theta = \underset{(a)}{\frac{l_1/2}{h_0 + m}} = \underset{(b)}{\frac{x}{h_0 - y + m}} = \underset{(c)}{\frac{l_2/2}{m}}$

Luego: $m = l_2\, h_0/(l_1 - l_2)$ [De (a) y (c)]

$$\frac{l_1/2}{h_o + \frac{l_2\,h_0}{l_1 - l_2}} = \frac{x}{h_0 + \frac{l_2\,h_0}{l_1 - l_2} - y} \quad \text{[De (a) y (b)]}$$

$$y = \frac{h_0(l_1 - 2x)}{l_1 - l_2}$$

o $$x = \frac{l_1\,h_0 - y(l_1 - l_2)}{2h_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

De (4) en (3):

$$Vy = \sqrt{\frac{2g(h_0 - y)}{\frac{16}{a^2}\left[\frac{h_0\,l_1 - y(l_1 - l_2)}{2h_0}\right]^4 - 1}}$$

por aproximación:

$$Vy \cong \sqrt{\frac{2g(h_0 - y)}{\frac{16}{a^2}\left[\frac{h_0\,l_1 - y(l_1 - l_2)}{2h_0}\right]^4}}$$

$$Vy \cong a\,h_0^2\sqrt{2g}\,\frac{\sqrt{(h_0 - y)}}{[h_0\,l_1 - y(l_1 - l_2)]^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{B\sqrt{(h_o-y)}}{[h_0l_1-y(l_1-l_2)]^2} \quad ; \quad B=ah_0^2\sqrt{2g}$$

$$\frac{[h_0l_1-y(l_1-l_2)]^2\,dy}{\sqrt{(h_0-y)}}=B\,dt$$

haciendo cambio de variable: $\mu=h_0-y$; $y=h_0-\mu$; $dy=-d\mu$

$$\int_h^0\left[\frac{h_0^2l_1^2-2h_0l_1(l_2-l_1)(h_0-u)+(l_2-l_1)^2(h_0-u)^2}{\mu^{1/2}}\right](-d\mu)=\int_0^t B\,dt$$

Los límites de integración: $t=0$, $y=0$, $\mu=h_0$

$t=t$, $y=h_0$, $\mu=0$

Integrando y valorando:

$$h_0^{5/2}\left[\frac{6}{15}l_1^2+\frac{8}{15}l_1l_2+\frac{16}{15}l_2^2\right]=ah_0^2\sqrt{2g}t$$

$$t=\frac{2}{15}\sqrt{\frac{h_0}{2g}}\frac{(3l_1^2+4l_1l_2+8l_2^2)}{a}$$

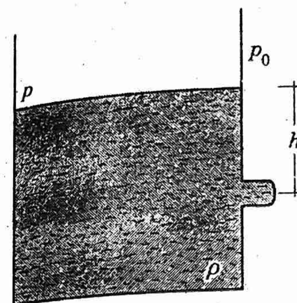
donde: $h_0=4.5\,\text{m}$, $l_1=10.2\,\text{m}$

$l_2=1.2\,\text{m}$, $a=30\times10^{-4}\,\text{m}^2$, $g=9.8\,\text{m/s}^2$

$t=7923.96$ seg

$t=2.20\,h$

PROBLEMAS PROPUESTOS

01 

Un tanque cerrado q contiene un líquido de densidad ρ, tiene un agujero en uno de sus lados a una distancia y_1 del fondo. El agujero se abre a la atmósfera, y de diámetro es muy pequeño comparado con el tanque.

El aire sobre el líquido se mantiene a una presión P. Determinar la rapidez a la cual el líquido sale por el agujero, cuando el nivel del mismo esta a una distancia h arriba del agujero.

Rpta.: $V=\sqrt{\frac{2(p-p_0)}{\rho}+2gh}$

02 Cada segundo $5\,525m^3$ de agua fluyen sobre los 670m de ancho del risco de la porción de las cataratas del Niágara.

El agua llega aproximadamente 2m de fondo cuando alcanza el risco. ¿Cuál es su rapidez?

Rpta.: $V=4$ m/s

03 Si la manguera del problema anterior tiene una estrangulación atrás de la abertura correspondiente a un radio de 1 cm. Hallar (a) la velocidad del fluido en el punto de estrangulación. (b) La presión del fluido en la estrangulación, en relación a la de la atmósfera P_0, suponiendo que la manguera esté en posición horizontal.

Rpta.: a) $0.16\;m/s$ b) $P_0=4.4\;N/m^2$

04 Un depósito de 1.22 m de diámetro contiene aceite de oliva ($DR=0.75$) y en el fondo de este perfora un agujero de 7.5 cm de diámetro. ¿Cuánto tiempo tardará en bajar el nivel del aceite de 1.83 m a 1.22 por encima del nivel del agujero?

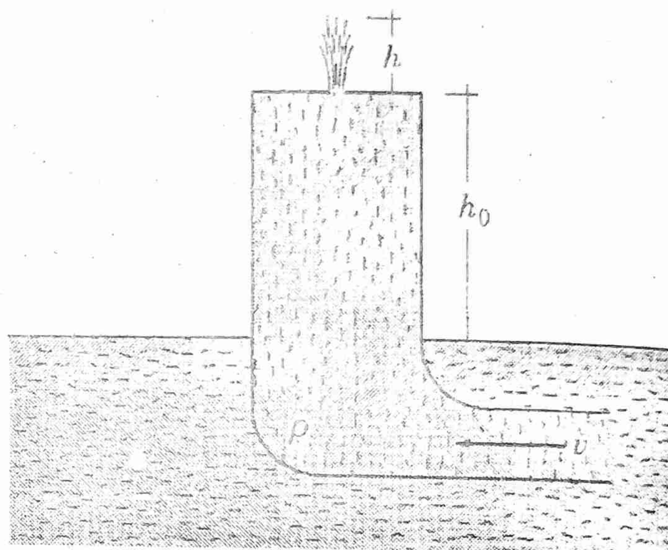
Rpta.: $t=29{,}65$ seg

05 Un tanque cerrado lleno de agua tiene una presión manométrica de $0.8\ kg/cm^2$, 2 m por debajo de la tapa del tanque.

Si se hace un agujero en la tapa del tanque, sale un chorro verticalmente hacia arriba. ¿Qué altura alcanzara por encima de la tapa del tanque?

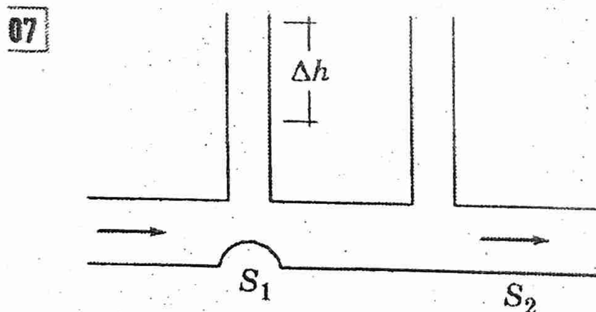
Rpta.: $h = 6\,m$

06 En un torrente de agua se sumergió un tubo doblado, según se indica en la figura. La velocidad de la corriente con respecto al tubo 2 m/s. La parte superior del tubo se encuentra a 10 cm. sobre el nivel del agua del torrente y tiene un pequeño agujero. ¿A qué altura h subirá el chorro de agua que sale por el agujero?.



Rpta.: $h = 10\ m$

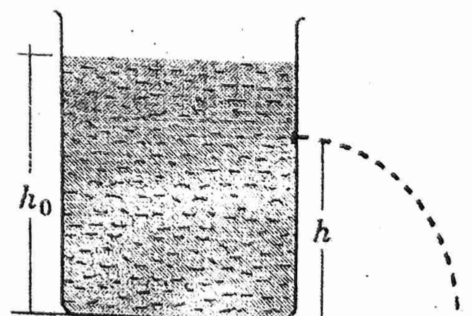
07



En los lugares donde las secciones de un tubo de sección variable son iguales a S_1 y S_2 se instalan dos tubos manométricos. Por el tubo fluye agua. Calcular el volumen de agua que pasa por segundo a través de la sección del tubo, si la diferencia de niveles en los tubos manométricos es igual a Δh.

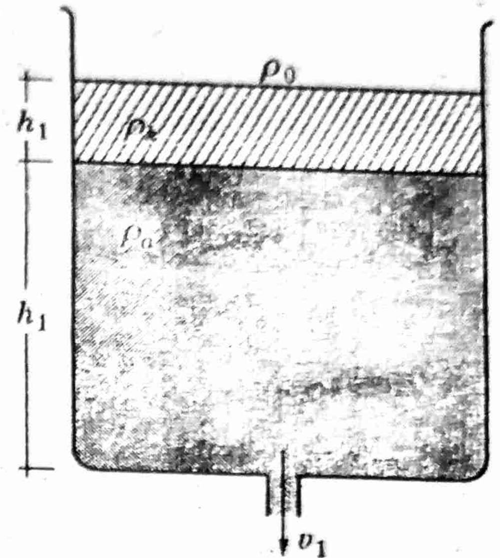
Rpta.: $Q = S_1 S_2 \sqrt{2g\Delta h/(S_2^2 - S_1^2)}$

08 Un gran tanque de almacenamiento se llena hasta una altura h_0. El tanque se perfora a una altura h medida desde el fondo del tanque. Determine una expresión para determinar que tan lejos del tanque aterriza la corriente de salida.



Rpta.: $d = 2\sqrt{h(h_0 - h)}$

09 Un recipiente ancho que tiene un pequeño orificio en el fondo se llena de agua y kerosene. Despreciando la viscosidad. Hallar a qué velocidad sale el agua del recipiente, si el grosor de la capa de agua 50 cm. y el de la capa de kerosene 25 cm.

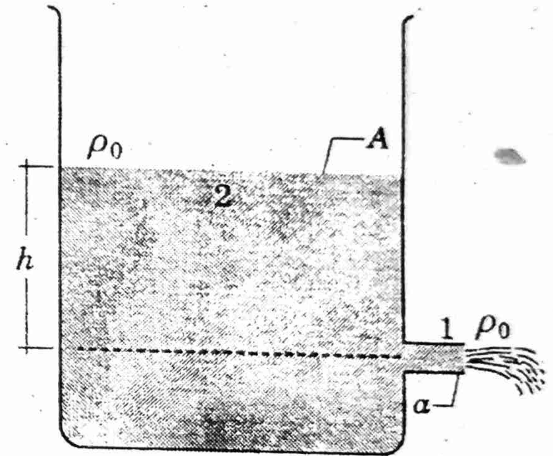


Rpta.: $V_1 = 3.7$ m/s

10 En la figura dada, si la altura h del agua en el depósito es de 1,5 m y el área A de la pequeña abertura al fondo, por la que sale el agua, tiene un valor $A = 10\ cm^2$.

a) Hallar la velocidad υ_0 con la que fluye el agua de la abertura.

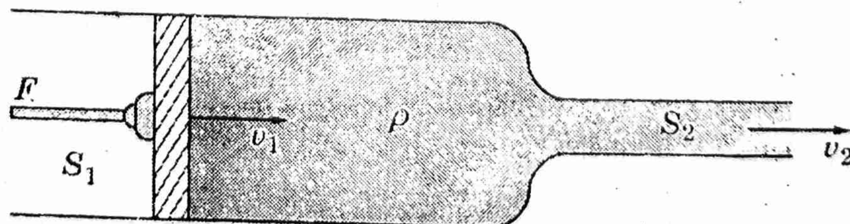
b) El caudal.



Rpta.: a) $\upsilon_0 = 5.4$ m/s

b) $Q = 5.4 \times 10^{-3}\ m^3/s$

11 Una bomba consta de un cilindro, situado horizontalmente, con un pistón de área S_1 y un orificio de salida de área S_2 que se encuentra cerca del eje del cilindro. Halla la velocidad de la salida del chorro de la bomba si bajo la acción de la fuerza F, el pistón se desplaza con una velocidad constante. La densidad del líquido es ρ .



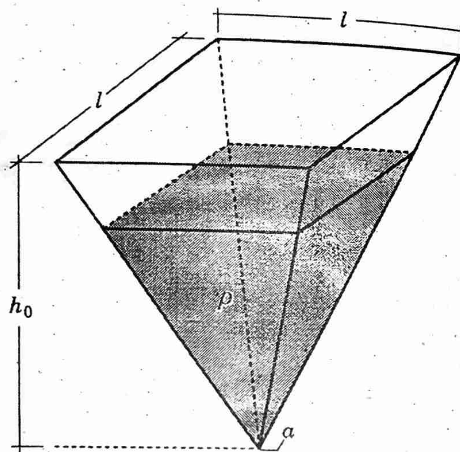
Rpta.: $\upsilon_2 = S_1\sqrt{2F/S_1\rho(S_1^2 - S_2^2)}$

12. El suministro de agua de un edificio se alimenta a través de una tubería principal de 6.00 cm. de diámetro. Un grifo de 2.00 cm. de diámetro localizado 2.00 m arriba de la tubería principal llena un recipiente de 25.0 litros en 30.0 s.a. ¿Cuál es la presión manométrica en la tubería principal de 6cm? (suponga que el grifo es la única "fuga" en el edificio.)

Rpta.: a) $V = 2{,}65n/s$

b) $P = 2{,}31 \times 10^4\, Pa$

13. Se tiene un tanque, que tiene la forma que se indica en la figura, está inicialmente lleno de agua a una altura de h_0. En el fondo del mismo hay un orificio de "a" de área, por el que circula el agua. Cuánto tiempo tarda en vaciarse el tanque?



Rpta.: $t = 2l^2\sqrt{h_0/2g}/5a$

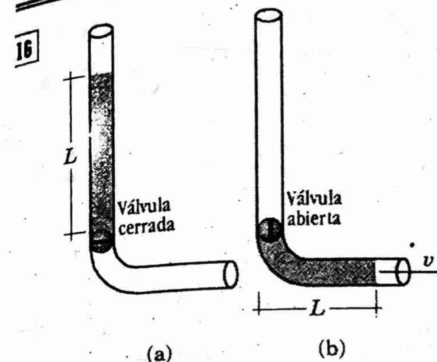
14. Un tanque tiene la forma de un cono circular recto con el vértice hacia arriba. Hallar el tiempo necesario para vaciar el tanque de líquido cuando este sale por un orificio desde su base. Si h altura del cono, R radio de la base y A área del orificio.

Rpta.: $t = \frac{16R^2}{15A}\sqrt{\frac{h}{2g}}$

15. En 1983, en Estados Unidos se empezó a acuñar la moneda de centavo de zinc revestida de cobre en lugar de cobre puro. Si la masa del antiguo centavo es de 3.083g, en tanto que la del nuevo centavo es de 2.517g, calcule el porcentaje de zinc (por volumen) en el nuevo centavo. La densidad del cobre es de 8.960 g/cm^3 y la del zinc es de 7.133 g/cm^3. Las monedas nueva y antigua tienen el mismo volumen.

Rpta.: 90.04%

16. Un fluido no viscoso e incompresible al principio está en reposo en la parte vertical de la tubería mostrada en la figura donde $L = 2.00m$. Cuando la válvula se abre el fluido circula por la sección horizontal de la tubería. ¿Cuál es la rapidez del fluido cuando está por completo en la sección horizontal, como en la figura?. Suponga que el área de la sección transversal de todo el tubo es constante.

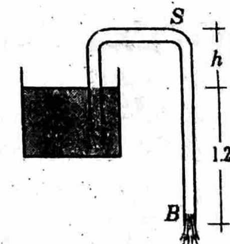


Rpta.: $V = 4{,}43$ m/s

17. Supongan, en la figura del problema anterior, el área de corte transversal del cilindro es A, el área de la pequeña abertura al fondo del depósito es a, y la altura h del líquido sobre la pequeña abertura en cualquier instante t. Demuestren que el índice dh/dt al que cae el nivel del agua es:

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{2gh}\,\frac{a}{A}$$

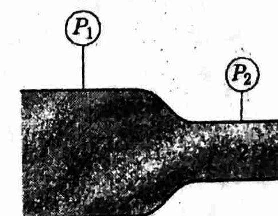
18. Con referencia a la figura, la presión absoluta en el interior de la tubería en S no debe ser inferior a 0,24 kg/cm^2.



¿Hasta qué altura sobre la superficie libre A, del agua puede elevarse?

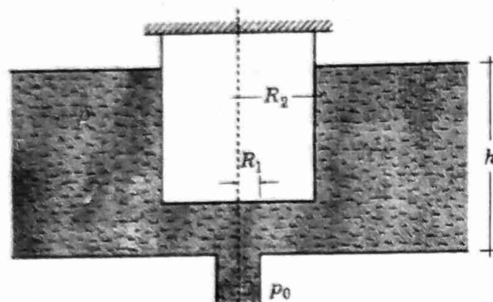
Rpta.: $h = 6{,}73m$

19. Un tubo estrecho ilustrado en la figura conocido como tubo de Venturi, puede utilizarse para medir la rapidez de flujo en un fluido incomprensible. Determinar la rapidez de flujo en el punto 2 si se conoce la diferencia de presión $P_1 - P_2$



Rpta.: $V_2 = A_1\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$

20 Encima de un agujero circular de radio R_1, practicado en el fondo horizontal de un recipiente ancho que contiene un líquido ideal, se pone un cilindro circular cerrado de radio $R_2 > R_1$. El huelgo entre el cilindro y el fondo del recipiente es muy pequeño, la densidad del líquido ρ. Hallar, en función de la distancia r hasta el eje del agujero y el cilindro, la presión estática del agua en el huelgo, si el nivel del líquido en la vasija es igual a h.



Rpta.: $p = p_0 + \rho g h\left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right)$ donde $R_1 < r < R_2$

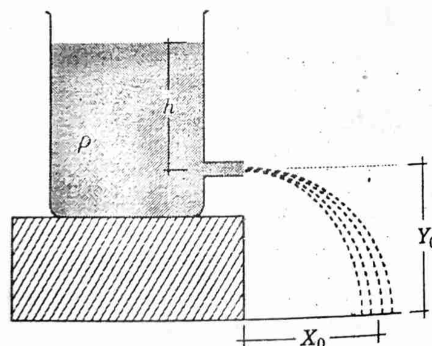
21 Haciendo uso del resultado anterior, demuestren que el tiempo t que requiere el nivel del agua en el tanque para caer de la altura h_1 a la altura h_2 es:

$$t = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{A}{a}\left[\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right]$$

22 En la figura dada, se tiene un barril de agua de lluvia sobre una plataforma de altura Y_0. Si se perfora un pequeño orificio en el fondo del barril, se descubre que la corriente resultante de agua choca contra el suelo a una distancia X_0 del recipiente.

a) Demuestren que la velocidad V_0 del agua al salir por el orificio es:
$$v_o = [g X_0^2/2Y_0]^{1/2}$$

b) Calcular la altura h del nivel de agua en el barril por encima de la pequeña abertura en el fondo.



Rpta.: b) $h = X_0^2/4Y_0$

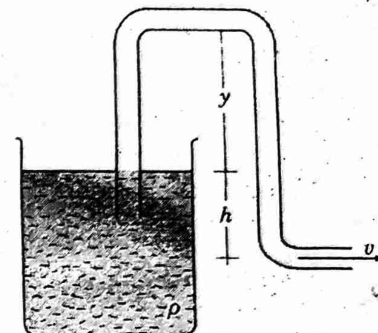
23 ¿Cuál es la velocidad de fluido v que se asocia al flujo de agua que sale de una manguera de radio 1.1 cm. a razón de 50 cm^3/s

Rpta.: $v = 0.13\ m/s$

24 En la figura se muestra un sifón con el que se extrae agua de una tanque. El sifón tiene un diámetro uniforme. considere flujo estable sin fricción.

a) Si la distancia $h = 1.00m$, encuentre la rapidez del flujo de salida en el extremo del sifón.

b) ¿Cuál es el límite de la altura en la parte superior del sifón sobre la superficie del agua?. (Para tener un flujo continuo de líquido la presión no debe descender por debajo de la presión de vapor del líquido)

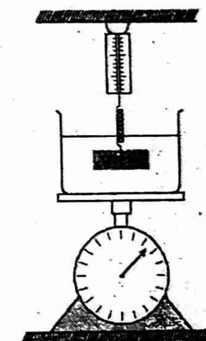


Rpta.: a) 4,43 m/s b) El sifón no puede ser más alto que 10,3m.

25 En el eje de un gasoducto con el área de la sección interna igual a S se instala un tubo de Pitot. Despreciando la viscosidad, hallar el volumen del gas que pasa por segundo a través de la sección del tubo, si la diferencia de niveles en el manómetro de líquido es igual a h, y las densidades del líquido y del gas son ρ_0 y ρ respectivamente.

Rpta.: $Q = S\sqrt{2g\,\Delta h\,\rho_0/\rho}$

26 Un vaso de laboratorio de 1.00 g que contiene 2.00 kg de aceite (densidad = 916.0 kg/m^3) descansa sobre una balanza de resorte y se sumerge por completo en el aceite, como se muestra en la figura. Determine las lecturas de equilibrio de estas balanzas.

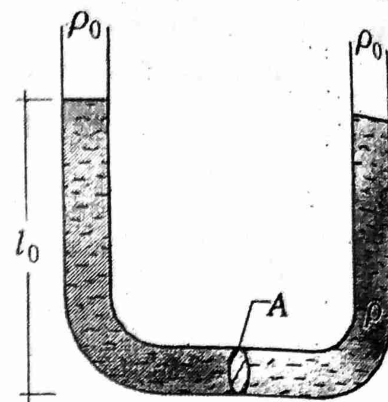


Rpta.: Escala superior 17,3N
Escala inferior 31,7N

27 En una conducción llena de agua en reposo reina una presión de $p_1 = 3.5\ atm$ que se ejerce sobre las paredes. ¿Cómo variará ésta posición si el agua empieza a circular con la velocidad 0.9 m/s.?

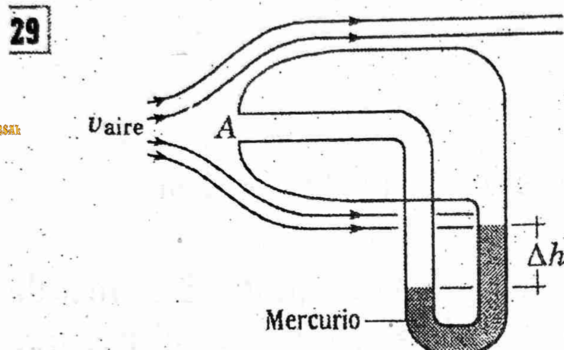
Rpta.: $p_1 - p = 0.0046\ atm$

28 Supongan que, como resultado de una corriente horizontal de aire que sopla sobre la parte superior de uno de los brazos de tubo U de la figura, el nivel de mercurio en este brazo se eleve 1 cm. ¿Cuál es la velocidad de la corriente de aire. Densidad del aire 1.3 kg/m^3.



Rpta.: $\upsilon = 64\ m/s$

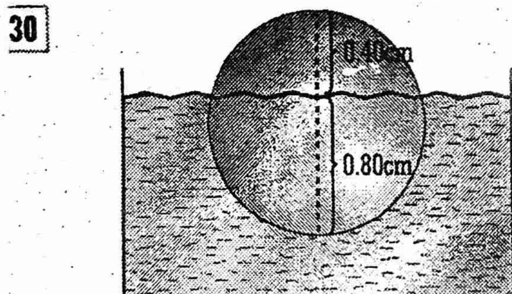
29



Con un tubo de Pitot se puede determinar la velocidad del flujo de aire al medir la diferencia entre a presión total y la presión estática. Si el fluido en el tubo es mercurio, cuya densidad es $\rho_{H_8} = 13\,600\ \text{kg/m}^3$, y si $\Delta h = 5.00\ \text{cm}$, encuentre la rapidez del flujo de aire (Suponga que el aire está estancado en el punto *A*, y considere $\rho_{aire} = 1.25\text{kg/m}^3$)

Rpta.: $V = 103\ \text{m/s}$

30



Una boya de madera tiene un diámetro de 1.20 cm. Flota en agua con 0.400 cm. de su diámetro arriba del nivel del agua. Determine la densidad de la boya.

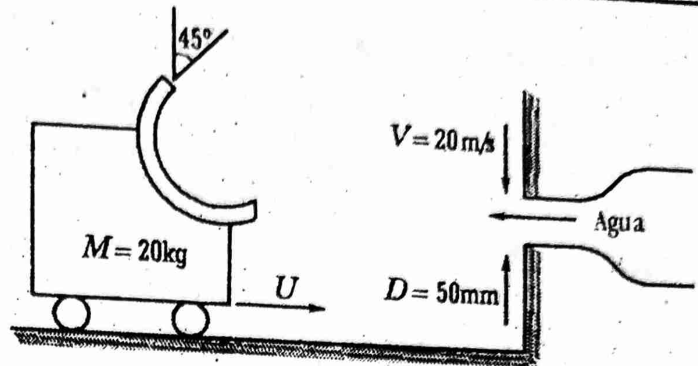
Rpta.: $\rho = 709\ \text{kg/m}^3$

31 a) Una manguera de agua de 2.00 cm de diámetro se usa para llenar una cubeta de 20.0 litros. Si le toma 1.00min llenar la cubeta. ¿Cuál es la rapidez υ a la cual se mueve el agua a través de la manguera? (Nota: $1L = 1\,000\ \text{cm}^3$)

b) Si la manguera tiene una boquilla de 1.00cm de diámetro encuentre la rapidez del agua en la boquilla.

Rpta.: a) $V = 1{,}06\ \text{m/s}$ b) $4{,}24\ \text{m/s}$

32 Un arreglo de un alabe curvo y un carrito se mueve horizontalmente hacia un chorro de agua en las condiciones indicadas. La masa del arreglo es $M = 20$ kg y su velocidad inicial es de $U_0 = 5.75$ m/s. Despreciando la resistencia del aire y el razonamiento, halle el tiempo y la distancia necesaria para que el arreglo se detenga.



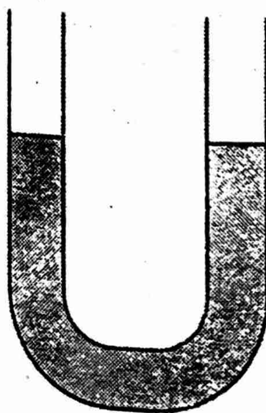
Rpta.: $t = 0{,}0663$ seg ; $x = 0{,}1767$ m

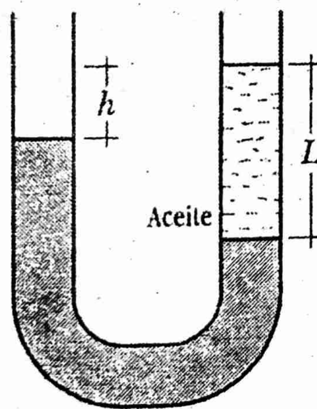
33 Un tubo en forma de U que está abierto en sus dos extremos se llena parcialmente de agua. Después se vierte aceite con una densidad de $750\ \text{kg/m}^3$ en el brazo derecho y forma una columna que alcanza una altura $L = 5{,}00$ cm.

a) Determine la diferencia h en las alturas de las superficies de los dos líquidos.

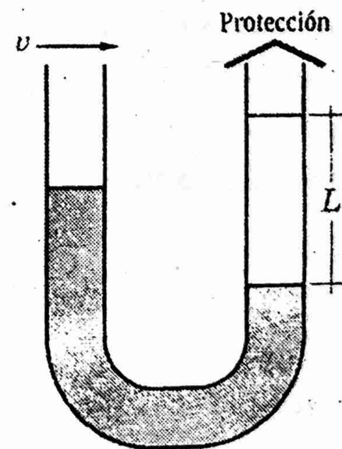
b) El brazo derecho está protegido de cualquier movimiento de aire mientras se sopla aire a través de la parte superior del brazo izquierdo hasta que las superficies de los dos líquidos están en la misma altura.

c) Determinar la rapidez del aire que se sopla a través del brazo izquierdo (considerar la densidad del aire $\rho = 1{,}29\ \text{kg/m}^3$).


(a)



(b)



(c)

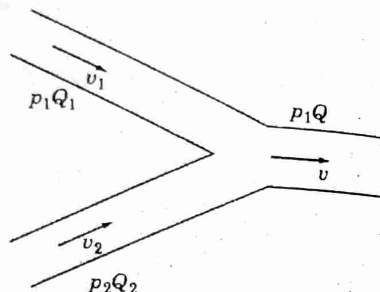
Rpta.:

a) 1,25 cm.
b) 13,8 m/s

34 Por una manguera contra incendios de 6.35cm de diámetro fluye agua a una relación de $0.012\ m^3/s$. La manguera termina en una boquilla con diámetro interior de 2.20 cm. ¿Cuál es rapidez con la cual el agua sale de la boquilla?

Rpta.: $V = 31{,}6\ m/s$

35 En un plano horizontal, dos tuberías desembocan en una tercera de igual diámetro d. Conocidos los gastos Q_1, Q_2 y las presiones p_1, p_2. Hallar la presión p en el tubo de salida. No se tendrá en cuenta la resistencia.



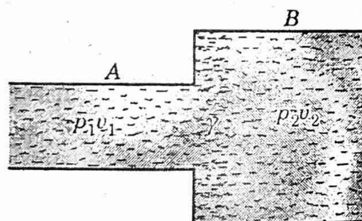
Rpta.: $p = \left(\frac{p_1 + p_2}{2}\right) - \frac{4\gamma}{\pi^2 d^4 g}[Q_q^2 + 4Q_1Q_2 + Q_2^2]$

36 a) ¿Cuál es la presión en la ojiva de un torpedo que se mueve en agua salada $(W = 1025\ kg/m^3)$ a 30 m/seg y a una profundidad de $9m$?

b) Si la presión en un punto lateral C del torpedo, y a la misma profundidad que la ojiva, es de $0.70\ kg/cm^2$ (manométrica) ¿Cuál es la velocidad relativa en ese punto?

Rpta.: a) $p = 5{,}63\ kg/cm^2$ b) $V = 30{,}7\ m/seg$

37 En un tubo horizontal que presenta un ensanchamiento brusco, circula el líquido con las velocidades respectivas v_1, v_2. Hallar la diferencia de presión en los puntos A y B, prescindiendo del rozamiento.



Rpta.: $p_2 - p_1 = \frac{\gamma v_2}{g}(v_1 - v_2)$

38 Referido al problema anterior:

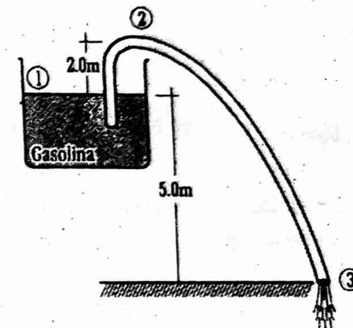
a) ¿Cuál es la fuerza vertical ejercida sobre el suelo por el chorro?
b) ¿Cuánto vale la fuerza horizontal ejercida sobre el depósito?

Rpta.: a) $F = 9{,}15\ kg$ b) $F = 54{,}5\ kg$

39 Un avión tiene una masa de $1.60\times10^4\ kg$ y cada ala tiene un área de $40.0\,m^2$. Durante un vuelo horizontal la presión sobre la superficie inferior del ala es de $7.00\times10^4\ Pa$. Determine la presión sobre la superficie superior del ala.

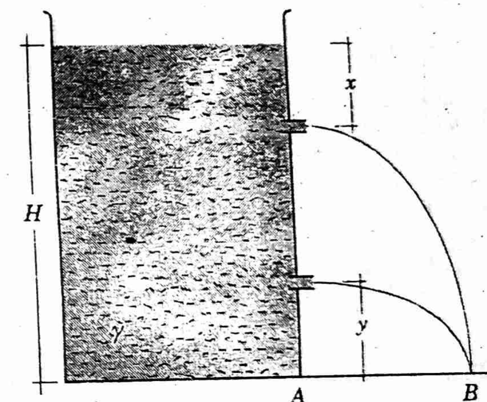
Rpta.: $P = 68{,}0\,kPa$

40 Se descarga gasolina $(DR = 0.71)$ desde un depósito mediante una manguera de 50 mm. de diámetro. Determine el caudal de descarga del combustible a través de la manguera y la presión de la gasolina en el punto 2



Rpta.: $Q = 0{,}0194\ m^3/s$

41 En la pared vertical de un depósito hay dos pequeños orificios: el uno está a la distancia X de la superficie del líquido, y el otro, a la altura Y sobre el fondo. Los chorros de líquido que salen se encuentran en el suelo (B) en el mismo punto. ¿En qué relación están X e Y?

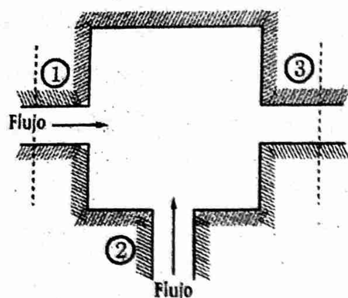


Rpta.: $X = Y$

42 Un tubo de vidrio horizontal consta de tres partes A, B y C cada una de sección constante. El agua que fluye por el tubo, descarga en la atmosfera por el extremo abierto de C. Cada una de las partes A y B tienen un pequeño orificio en la pared, observándose que sale agua por el correspondiente a A, mientras que por el orificio practicado en B salen burbujas de aire con el agua. ¿Qué parte del tubo tienen mayor diámetro y en cuál del ellas es mínimo?

Rpta.: La parte A tiene mayor diámetro.
La parte B tiene menor diámetro.

43 En el flujo incomprensible que pasa por el dispositivo mostrado las velocidades pueden considerarse uniformes sobre las secciones de entrada y salida. Si el fluido que corre es agua, obtenga una expresión para el flujo masivo (kg/seg) en la sección (3). Se conocen las siguientes condiciones:

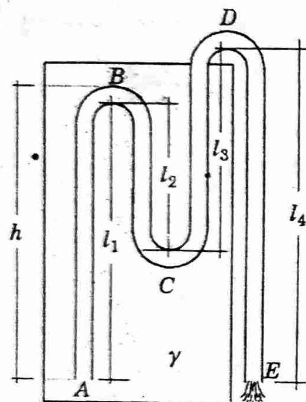


$A_1 = 0.2m^2$, $A_2 = 0.15m^2$

$V_1 = 5m/s$, $V_2 = 10 + 5\cos(4\pi t) m/s$

Rpta.: $m_3 = (2\,500 + 750\cos 4\pi t)$

44 El sifón automático de Neugebahuer tiene 3 codos B, C, D. el codo B está sumergido en el líquido. Hallar la velocidad en los puntos B, C, D y E.



Rpta.:

$$\upsilon_B^2 = 2g(h - l_1)$$

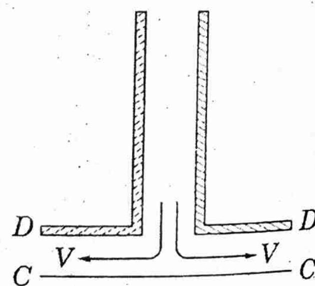
$$\upsilon_C^2 = \upsilon_B^2 + \frac{g\, l_2^2}{l_1 + l_2}$$

$$\upsilon_D^2 = \upsilon_B^2 + g\frac{(l_2^2 + 2l_2 l_3 - l_3^2)}{l_1 + l_2 + l_3}$$

$$\upsilon_E^2 = \upsilon_B^2 + \tfrac{g}{l}[(l - l_1)^2 - 2l_3(l_3 + 2l_4)]$$

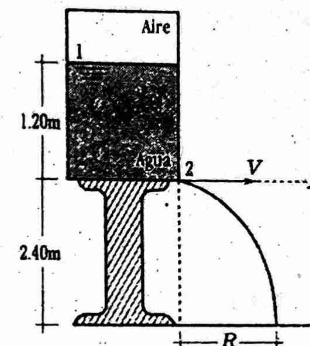
$$l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$$

45 Un tubo hueco tiene un disco DD fijo a su extremo. Cuando se sopla aire por el tubo, el disco atrae la tarjeta CC. Sea A al área de la tarjeta y sea υ la velocidad media del aire entre CC y DD. Calcúlese la fuerza resultante ascendente sobre CC. No se tome en cuenta el peso de la tarjeta ρ = densidad del aire.



Rpta.: $F = \rho\frac{A\upsilon^2}{2}$

46 Dentro de un depósito cerrado de paredes verticales, el agua alcanza una altura de 1.20m. Sobre la superficie del agua hay aire a una presión manométrica de $8.4\ kg/cm^2$. El depósito descansa sobre una plataforma situada a $2.40m$ por encima del suelo. En una de las paredes laterales y justamente encima del fondo se practica un orificio de $32cm^2$. Supóngase que permanecen constantes el nivel del agua y la presión dentro del depósito.
¿Dónde golpea al suelo, el chorro de agua que sale del orificio?



Rpta.: $R = 28{,}6m$

47 La altura de agua en un depósito cerrado de gran sección es de $4.8m$. Un tubo horizontal parte del fondo del depósito disminuyendo su sección desde $450\ cm^2$ a $225\ cm^2$ en la forma indicada en la figura.

Este tubo tiene tres prolongaciones verticales A, B y C abiertas a la atmosférica. La presión ,manométrica del aire comprimido contenido en el depósito es de $0.28\ kg/cm^2$.

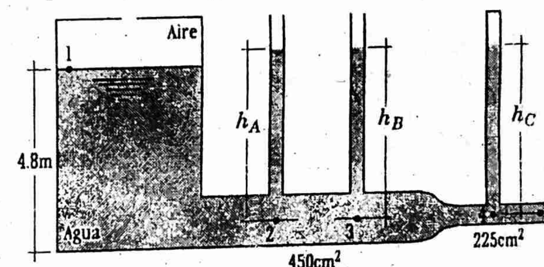
Si el tubo está abierto en el punto 5. ¿qué altura alcanza el agua en cada uno de los vasos A, B y C? Supóngase que la altura del agua en el depósito y la presión del aire por encima de la superficie de aquella se conservan constantes.

Rpta.:

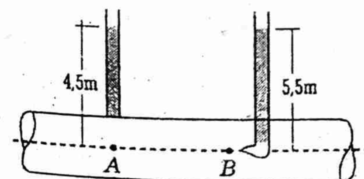
$h_A = 5{,}7m$

$h_B = 5{,}7m$

$h_C = 0m$

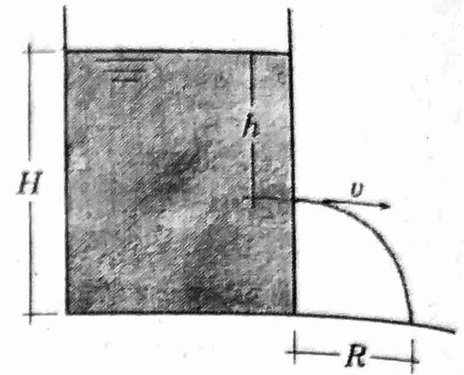


48 Un tubo de Pitot se emplea para medir la velocidad del agua en el centro de una tubería.
La altura de presión de estancamiento es 5.50m y la altura de presión estática en la tubería es 4,50m. ¿Cuál es la velocidad?



Rpta.: $V = 4{,}43\ m/s$

49 La superficie libre del agua se encuentra a una altura H sobre el nivel del suelo. ¿A qué profundidad habrá que hacer un pequeño agujero para que el chorro de agua horizontal que sale, llegue al suelo a la máxima distancia posible de la base del tanque?



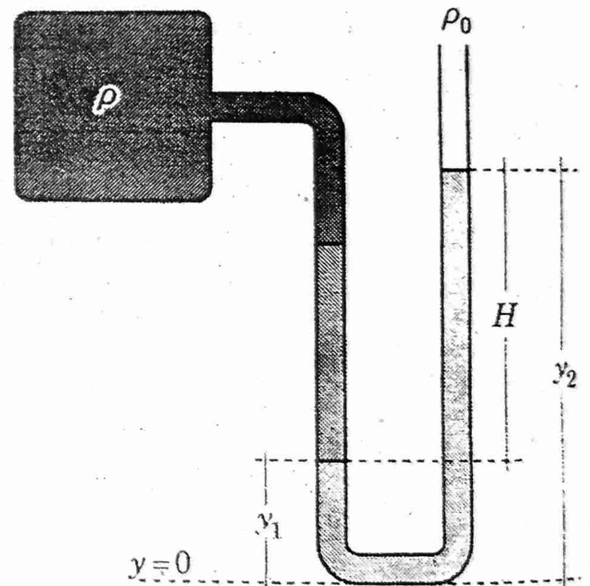
¿Cuál es esta máxima distancia?

Rpta.: $R = H$

50 Un tubo en U se sección transversal uniforme igual a 1,5 cm^2, contiene inicialmente 50,0 cm^3 de mercurio (con densidad 13,6 g/cm^3). A un brazo del tubo se le agrega un volumen igual de líquido desconocido, y se observa que el desnivel del mercurio en los brazos es ahora de 2,75 cm. Determine la densidad del líquido desconocido.

Rpta.: $\rho = 1{,}123 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

51 El líquido del manómetro de tubo abierto de la figura es mercurio, e $y_1 = 3\text{ cm}$, $y_2 = 8\text{ cm}$. La presión atmosférica es de 570 milibares.



a) ¿Cuál es la presión absoluta en el fondo del tubo en U?

b) ¿Cuál es la presión absoluta en el tubo abierto una profundidad de 5 cm por debajo de la superficie libre?

c) ¿Cuál es la presión absoluta del gas en el depósito?

d) ¿Cuál es la presión manométrica del gas en centímetros de mercurio?

e) ¿Cuál es la presión manométrica del gas en centímetros de agua?

Rpta.:
a) $1{,}077 \times 105$ Pa
b) $1{,}037 \times 105$ Pa
c) $1{,}037 \times 105$ Pa
d) 5 cm de Hg.
e) 58 cm de agua.

CAPÍTULO VI

TEMPERATURA Y DILATACIÓN

La temperatura de un cuerpo es una medida de su estado relativo de calor o frío. Una porción del Universo, a ser estudiada llamaremos *sistema*, y lo que rodea a esta será el *medio ambiente externo*.

Cuando se estudia el sistema con un criterio macroscópico, que involucra el calor, presión, volumen, temperatura, energía interna y entropía, es la base de la Termodinámica. Y con un enfoque microscópico del sistema que comprende el estudio de cantidades que describen los átomos y moléculas, es decir sus velocidades, masas, energías, cantidad de movimiento angular, forman la base de la **Mecánica Estadística**.

LEY CERO DE LA TERMODINÁMICA

Si A y B son dos objetos, que se hallan en equilibrio térmico con un tercer objeto C (el termómetro), entonces A y B se encuentran en equilibrio térmico entre sí.

Definición de estado de un sistema

Un estado de un sistema de masa y composición constante, se define por un par de coordenadas independientes (y,x).

Para conocer el estado de equilibrio en un sistema es necesario conocer el medio ambiente que lo rodea y la naturaleza de la pared que lo separa.

Pared adiabática

Cuando un estado (y,x) de un sistema A, puede coexistir en equilibrio con un estado (y',x') del sistema B, para cualquiera de los valores de las cuatro magnitudes. Ejemplo: planchas de asbesto, madera, etc.

Pared diatérmica

Cuando un estado (y,x) de un sistema A, puede coexistir en equilibrio con un estado (y',x') del sistema B, para cualquiera de los valores de las cuatro magnitudes. Ejemplo: planchas de asbesto, madera, etc.

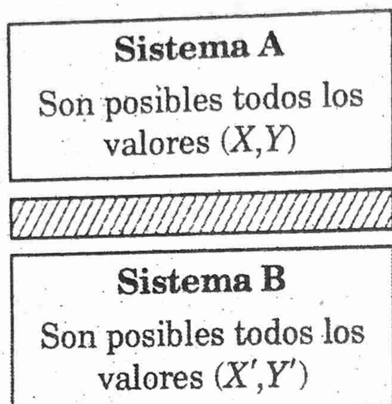


Fig. 51 *Pared adiabática*

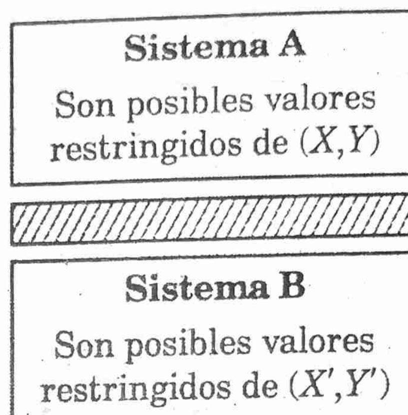


Fig. 52 *Pared diatérmica*

Cuando dos sistemas que están separados por esta pared, los valores de (y,x) e (y',x') varían hasta que se obtenga un estado de equilibrio del sistema en conjunto. Ejemplo : planchas metálicas. Ver figuras 51 y 52.

Equilibrio térmico

Es el estado alcanzado por dos o más sistemas y caracterizado por valores particulares de las coordenadas de los sistemas después de haber estado en comunicación entre si a través de una pared diatérmica.

CONCEPTO DE TEMPERATURA

Consideramos un sistema A en el estado (y_1,x_1) en equilibrio térmico con un sistema B en el estado (y_1',x_1').

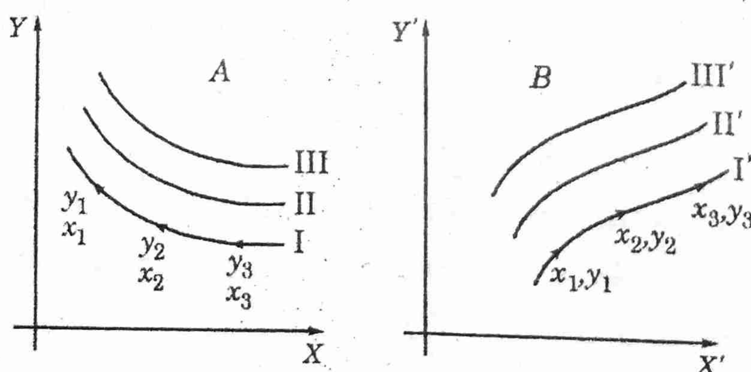


Fig. 53 *Isotérmas de dos sistemas distintos*

La experiencia demuestra que existen un conjunto de estados y_1,x_1 ; y_2,x_2 ; y_3,x_3 ; ...

Cada uno de ellos está en equilibrio térmico con el estado y_1' , x_1' del sistema B y según el principio cero, están en equilibrio térmico entre sí.

Luego, todos estos estados se sitúan en un diagrama Y, X y que están sobre una curva tal como ℓ, de la figura 53 que llamaremos isoterma.

- **Isoterma**

Es el lugar de todos los puntos que representan estados en los cuales un sistema está en equilibrio térmico con un estado de otro sistema.

De igual forma un conjunto de estados $y'_1, x'_1; y'_2, x'_2; y'_3, x'_3; \ldots$ del sistema B se hallan en equilibrio térmico con un estado (y_1, x_1) del sistema A y por lo tanto en equilibrio térmico entre sí. Del principio cero se deduce que todos los estados de la isoterma l del sistema A se encuentran en equilibrio térmico con todos los estados sobre la isoterma l' del sistema B.

- **Definición de temperatura**

La temperatura de un sistema es una propiedad que determina si un sistema se encuentra o no en equilibrio térmico con otros sistemas.

- **Medición de la temperatura**

Para medir la temperatura haremos uso de algunas propiedades físicas mensurables, para ello escogeremos una sustancia termométrica y una propiedad termométrica especial de esa sustancia, tal como se indica en la figura 54.

SUSTANCIA TERMOMÉTRICA	PROPIEDAD TERMOMÉTRICA
Gas mantenido a volumen constante	Presión
Gas mantenido a presión constante	Volumen
Resistencia eléctrica (presión y tensión constante.	Resistencia eléctrica
Por termoeléctrico (a presión y tensión constante).	Fuerza electromotriz
Columna liquida en un capilar de vidrio.	Longitud

Fig. 54 *Sustancias y propiedades termométricas.*

Una vez escogida la propiedad termométrica x de la sustancia termométrica, se establece la función lineal con la temperatura, así:

$$T(x) = ax \text{ , donde } a : \text{constante}$$

Para hallar la constante a, debemos calibrar el termómetro y para ello fijamos un *punto fijo normal*, para el cual todos los termómetros deben marcar el mismo valor para la temperatura.

Este punto es aquel donde el hielo, el agua líquida y el vapor de agua, coexisten en equilibrio y se llama punto triple del agua, figura 55.

La presión de vapor de agua en el punto triple es de 4.58 mm de Hg y la temperatura es 273.16°K.

Luego comparando dos puntos, siendo uno de ellos el punto triple del agua, se tiene:

$$\frac{T(x)}{T(x_{tr})} = \frac{ax}{ax_{tr}} \; , \; T(x_{tr}) = 273.16°K$$

(para todos los termómetros)

Luego: $T(x) = 273.16°K \frac{x}{x_{tr}}$

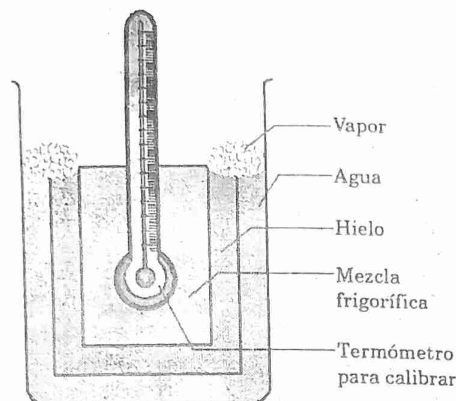


Fig. 55 *Punto triple del agua.*

Para la calibración de termómetros a temperaturas elevadas (pirómetros), se emplean otros puntos fijos, así el punto de ebullición del azufre (444.6°C), punto de fusión de la Ag (960.8°C), punto de fusión del oro (1063°C) , y punto de fusión del tungsteno (3370°C).

Ahora es necesario definir una escala de temperaturas que sean independiente de las propiedades de cualquier sustancia en particular.

Se construye escalas de temperatura, usando dos puntos de referencia y son: el punto de fusión del hielo y el punto de ebullición del agua y el cero absoluto.

Se tienen las escalas Celsius (°C), Farenheit (°F), Kelvin (°K), Rankine (°Ra) y Reamur (°Re). Estableciendo las equivalencias se tiene:

Fig. 56 *Escalas de temperatura.*

$$\frac{x°C}{100} = \frac{y°F - 32}{180} = \frac{z°Re}{80}$$

$°K = °C + 273$ (Escala centígrada absoluta)

$°Ra = °F + 460$ (Escala Fahrenheit absoluta)

Dilatación por temperatura

Casi todos los cuerpos sólidos se dilatan por calor, excepto algunos que se contraen y otros cuyos volumen aumenta entre ciertas temperaturas y se reduce en otras. Los cambios de tamaño que se producen, no considera cambios de estado.

Se usa un modelo cristalino, cuyos átomos están sostenidos entre sí, en un ordenamiento regular mediante fuerzas de origen eléctrico.

La fuerza entre los átomos, se simula como la que existe en un conjunto de resortes que unen los átomos.

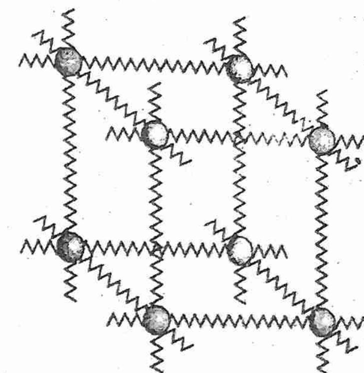


Fig. 57 *Modelo de sólido cristalino.*

Estos resortes son muy rígidos y hay 10^{22} resortes/cm^3 aproximadamente, la amplitud de vibración es del orden de 10^{-9} cm y la frecuencia de 10^{13} seg^{-1}.

El cambio debido a la temperatura, aumenta con la distancia media entre los átomos, y cualquier cambio de las dimensiones lineales del sólido, se llama dilatación lineal, figura 58.

Si ΔT es pequeño y L_0 está a t_0, se tiene: $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$

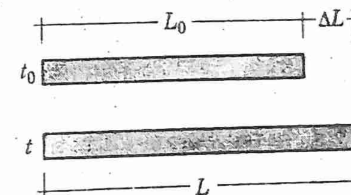


Fig. 58 *Dilatación lineal.*

donde: $\Delta T = t - t_0$ y $\Delta L = L - L_0$

$$L = L_0 + \alpha \, L_0 \, \Delta T \quad , \quad L = L_0(1 + \alpha \Delta T)$$

donde α : coeficiente de dilatación lineal y se define así: $\alpha = \left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)/\Delta T$

Para la dilatación superficial : $A = A_0(1 + 2\alpha \Delta T)$

Para la dilatación volumétrica : $V = V_0(1 + 3\alpha \Delta T)$

DILATACIÓN DE LÍQUIDOS

Sea un tubo cilíndrico uniforme de vidrio que está lleno de un líquido hasta la altura h_0 a T_0, como se muestra en la figura 59, y luego se eleva la temperatura hasta T. ¿Cuál es la altura de la columna del líquido?. Esta es la pregunta que se va a responder.

Se conoce: α_V : coeficiente de dilatación lineal del vidrio.

β_l : coeficiente de dilatación volumétrica del líquido.

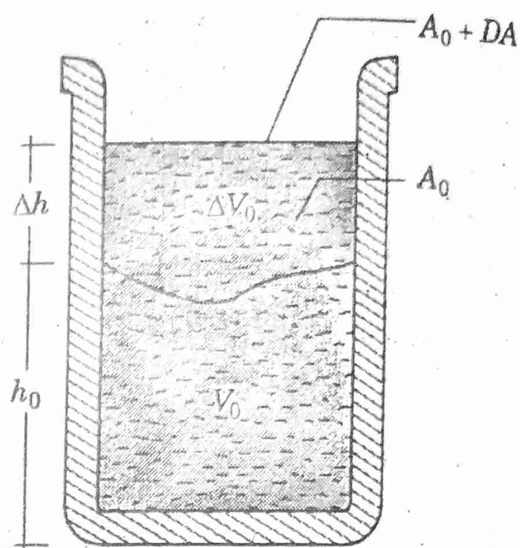


Fig. 59 *Dilatación de líquidos.*

El volumen total del líquido a la temperatura T:

$$V_0 + \Delta V = (h_0 + \Delta h)(A_0 + \Delta A) = h_0 A_0 + A_0 \Delta h + h_0 \Delta A + \Delta A \Delta h$$

donde: $V_0 = h_0 A_0$ y $\Delta A \Delta h = 0$, $\Delta V = A_0 \Delta h + h_0 \Delta A$

$$\Delta h = (\Delta V - h_0 \Delta A)/A_0 \quad \text{.......} \quad (1)$$

Para el líquido $\Delta V = \beta_l V_0 \Delta T$ .... (2)

y ΔA es el aumento en el área transversal de la columna del líquido debido a la dilatación del hueco en el tubo de vidrio que la contiene:

$$\Delta A = (2\alpha_V) A_0 \Delta T \quad \text{.......} \quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1); se obtiene: $\Delta h = h_0 \Delta T\,(\beta_l - 2\alpha_V)$

Variación de la densidad con la temperatura

Cuando un cuerpo se dilata, su masa no se altera, pero su densidad disminuye. Si el volumen del cuerpo ρ es V_t y a $t°$ es $V_{t'}$, y las densidades respectivas son: ρ_t y $\rho_{t'}$ se tiene: $m = \rho_t V_t = \rho_{t'} V_{t'}$

y si V_0 es el volumen a 0°C , reemplazando:

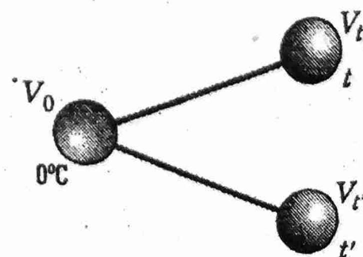


Fig. 60

$$\rho_t V_0 (1 + 3\alpha t) = \rho_t V_0 (1 + 3\alpha t')$$

$$\frac{\rho_t}{\rho_{t'}} = \frac{1 + 3\alpha t'}{1 + 3\alpha t}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

01 El coeficiente de dilatación cúbica de una cierta sustancia $2.79\times10^{-4}(°C)^{-1}$. Calcular su valor en $(°F)^{-1}$.

Solución:

Por teoría: $t_1(°C)=\frac{5}{9}[t_1'(°F)-32]$ y $t_2(°C)=\frac{5}{9}[t_2'(°F)-32]$

Luego: $t_2-t_1(°C)=\frac{5}{9}(t_2'-t_1')°F$, $\Delta t(°C)=\frac{5}{9}\Delta t(°F)$

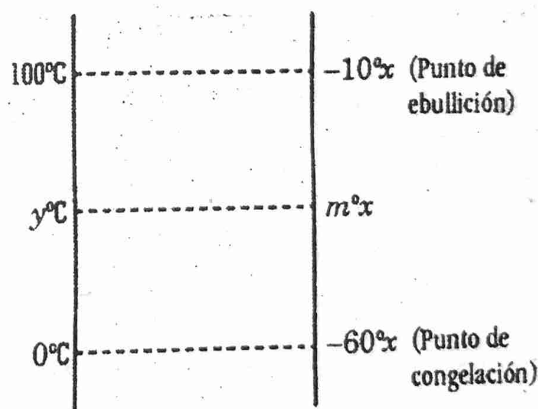
Como el coeficiente de dilatación cúbica se define por grado, se tiene:

$$\Delta t(°C)=1 \quad , \quad \Delta t'(°F)=\frac{9}{5}$$

Entonces: $2.79\times10^{-4}°C^{-1}=2.79\times10^{-4}\ \frac{1}{°C}=$

$$2.79\times10^{-4}\times\frac{1}{9/5\,°F}=\frac{5}{9}\times2.79\times10^{-4}°F^{-1}=1.55\times10^{-4}°F^{-1}$$

02 En cierta escala de temperatura se tiene presión normal los siguientes puntos fijos: punto de congelación del agua $-60°x$, punto de ebullición $-10°x$. Hallar la temperatura Celsius que corresponde a $0°x$.



Solución:

Comparando las escalas: centígrado y °x, se obtiene:

$$\frac{y°C-0°C}{(100°C-0°C)}=\frac{m°x-(-60°x)}{-10°x-(-60°x)}$$

Para $m°x=0°x$, reemplazando en la expresión anterior, se tiene: $y°C=120°C$, es decir

$$0°x\longleftrightarrow120°C$$

03 En un laboratorio algunos científicos deciden utilizar una escala de temperatura arbitraria, Albertus, tal que en ella el punto de fusión del hielo corresponde a 10°A y el punto de ebullición del agua a 160°A. Cuando el termómetro construido de esa manera señala 61°A, ¿qué temperatura tendremos en °C?

160°A — 100°C
61°A — x°C
10°A — 0°C

Solución:

Comparando las escalas de °A y °C:

$$\frac{61°A-10°A}{160°A-10°A}=\frac{x°C-0°C}{160°C-0°C}\text{ , operando: } x°C=34°C \quad 61°A \leftarrow\rightarrow 34°C$$

04 Calculen la temperatura en la que las lecturas de los siguientes pares de escalas tienen el mismo valor numérico: a) Kelvin – Fahrenheit absoluta; (b) Kelvin-Fahrenheit, y c) Celsius – Fahrenheit absoluta.

Solución:

a) Sabemos por teoría: $°K=°C+273$ y $°R_a=°F+460$ (Fah.abs)

Según la condición: $°K=°R_0$, reemplazando :

$°K=°C+273=°R_a=°F+460$, $°C+273=°F+460$

Sabemos que: $°C=\frac{5}{9}(°F-32)$, $\frac{5}{9}(°F-32)+273=°F+460$

Se obtiene: $°F=-460$, que es equivalente a $-273°C$.

b) Se tiene: $°K=°C+273$ y $°C=\frac{5}{9}(°F-32)$

La condición: $°K=°F$, reemplazando las equivalencias

$°K=°F=°C+273=\frac{5}{9}(°F-32)$, $°F=\frac{5}{9}(°F-32)$

desarrollando $°F=574$, $°K=574$

c) Se conoce: $°C=\frac{5}{9}(°F-32)$ y $°R_a=°F+460$

La condición: $°C = °R_a$ y $°F = °R_a - 460$

$$°C = \frac{5}{9}(°R_a - 460 - 32) \quad , \quad °C = \frac{5}{9}(°C - 492)$$

$$°C = -535 \text{ (no es posible)}$$

05 Evalúe la temperatura a la que el valor en grados Fahrenheit es cuatro veces mayor que el valor en grados Celsius.

Solución:

Por teoría: $°C = \frac{5}{9}(4°C - 32)$, y la condición $°F = 4°C$

Reemplazando se tiene: $°C = \frac{5}{9}(4°C - 32)$

$°C = 14.5$ equivalente a $58°F$

06 Se tiene un recipiente de paredes delgadas de zinc ($\alpha_{Zn} = 0.000027\ 1/°C$), completamente lleno de mercurio $\gamma_{Hg} = 0.000181\ 1/°C$. Si el conjunto se calienta con un incremento de 100 °C, ¿qué porcentaje del volumen inicial representa el volumen de mercurio derramado?

Solución:

Según el problema, sea V_0 el volumen inicial del recipiente:

$$\frac{V_{Hg} - V_{Zn}}{V_0} = \frac{V_0\,\gamma_{Hg}\,\Delta T - V_0\,3\alpha_{Zn}\Delta T}{V_0} = (\gamma_{Hg} - 3\alpha_{Zn})\,\Delta T$$

Como $\Delta T = 100°C$, reemplazando se obtiene: 0.01 en porcentaje será el 1%.

07 En una barra de acero de radio 100.125 cm. fue puesto un anillo de cobre de radio 100 cm. y área de sección transversal 2 mm². Hallar la fuerza con que se irá ensanchando el anillo, si simultáneamente la temperatura del sistema aumenta en 100°C. Si $E_{Cu} = 12\times10^{10}\ N/m^2$

Solución:

Sabemos que la longitud del anillo se ensanchará debido al aumento de temperatura: $\Delta L = L_0 \alpha_{Cu} \Delta T$, pero para el cálculo de la fuerza es necesario hallar por elasticidad: $E = \frac{FL_0}{S\Delta L}$ $\quad F = SE\frac{\Delta L}{L_0}$, donde $\Delta L = 0.125$ cm ,

$L_o = 100$ cm , $S = 2\ mm^2 = 2\times10^{-2}\ cm^2$, reemplazando: $F = 300\ N$

(08) ¿Que fuerza hay que aplicar a los extremos de una barra de hierro $(E_{Fe} = 20\times10^{10}\ N/m^2)$ de sección transversal $10\ cm^2$, para impedir que se dilate cuando se caliente uniformemente desde 0°C hasta 10°C? $\alpha_{Fe} = 1.2\times10^{-5}(°C)^{-1}$

Solución:

En este caso debido al cambio de temperatura se produce una dilatación ΔL, cuyo cálculo se halla $\Delta L = L_0\alpha_{Fe}\Delta T$.

Debido a la elasticidad del material, se produce una contracción que impide el alargamiento: $F = (\Delta L/L_0)SE$.

Luego: $\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{F}{SE} = \alpha_{Fe}\Delta T$, $F = SE\,\alpha_{Fe}\Delta T$

Reemplazando valores: $F = 10\times10^{-4}\times20\times10^{10}\times1.2\times10^{-5}\times10 = 24,000\ N$

$$F = 24,000\ N$$

(09) Un depósito de vidrio pesa 53 Kg. Este mismo depósito lleno de mercurio a una temperatura de 0°C pesa 1384 Kg. Cuando este recipiente se calienta a 40°C una parte del mercurio sale y entonces el depósito con el mercurio restante pesa 1376 Kg. ¿Cuál es el γ del vidrio. Tómese $\gamma_{Hg} = 18\times10^{-5}(°K)^{-1}$

Solución:

La $m_v = 53$ Kg y la masa del mercurio a $0°C$ es : $1384 - 53 = 1331\ Kg = m_{Hg}$

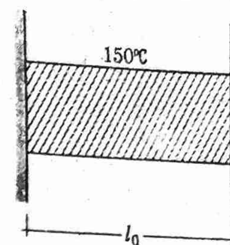
La masa que se derrama debido al aumento de temperatura es

$\Delta m_{Hg} = 1384 - 1376 = 8$ Kg , pero también el vidrio se dilata, luego:

$\Delta m_{Hg} = m_{Hg}(\gamma_{Hg} - \gamma_v)\,\Delta T$, donde $\Delta T = 40°C = 40°K$

$\gamma_v = \gamma_{Hg} - \frac{\Delta m_{Hg}}{m_{Hg}\Delta T}$, $\gamma_v = 3\times10^{-6}\,°K^{-1}$

(10) Un alambre de cobre se tendió entre dos paredes fijas resistentes estando a la temperatura de 150 °C. ¿A qué temperatura se romperá el alambre al enfriarse?. Suponer que la Ley de Hooke se cumple hasta el momento en que se produce la ruptura.



Solución:

Sabemos por dilatación o contracción debido a una variación de temperatura está dado por $\Delta l = l_0\,\alpha_{Cu}\Delta T$.

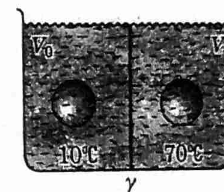
Por elasticidad: $E = \sigma_r/(\Delta l/l_0)$, combinando las dos últimas expresiones se obtiene: $\Delta T = \sigma_r/E\alpha$, donde:

$\sigma_r = 2.45\times10^8\ N/m^2$ (tensión a la ruptura para el Cu)

$E = 11.8\times10^8\ N/m^2$, $\alpha_{Cu} = 1.6\times10^{-5}\,°C^{-1}$, reemplazando:

$\Delta T = 129.8°C$ y $150 - °T = 129.8$, $°T = 20.2°C$

(11) Una esfera de Cu sumergida completamente en agua a 10°C tiene un volumen de 8,000 cm³. Si la temperatura del agua se cambia a 70°C. ¿Cuál será el incremento del empuje del agua sobre la esfera? $\alpha_{Cu} = 1.6\times10^{-5}\ °C^{-1}$



Solución:

Hallemos el empuje a $T = 10°C$: $E_{10} = \gamma V_0$ y a $T = 70°C$:

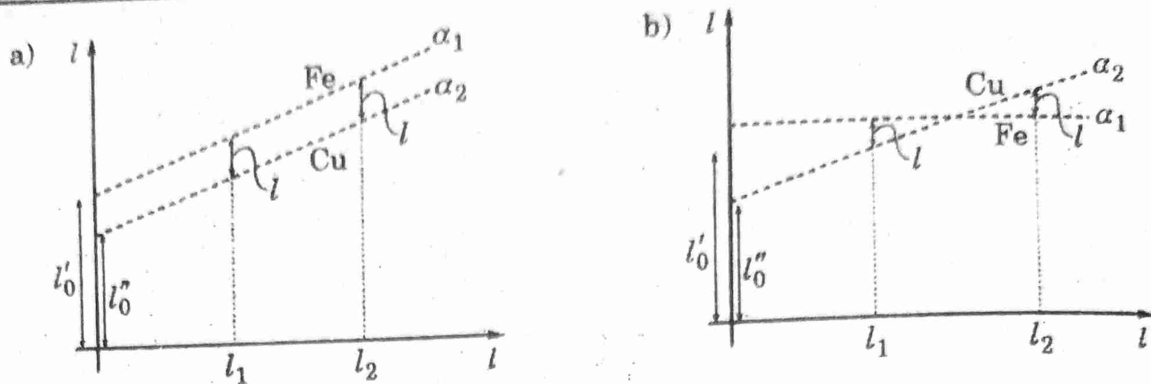
$E_{70} = \gamma V$, $\gamma = 1\ g/cm^3$, $\Delta T = 60°C$

El incremento del empuje: $\Delta E = E_{70} - E_{10}$

$\Delta E = \gamma(V - V_0) = \gamma(\Delta V) = \gamma(3\alpha_{Cu}\Delta T)\,V_0$

Reemplazando valores: $\Delta E = 23.04\ g$

(12) Hallar las longitudes de las reglas de hierro y de cobre l_0 y l_0' a $t = 0°C$, si las diferencias de las mismas a $t_1 = 50°C$ y $t_2 = 450°C$ son iguales según el módulo equivalen a $l = 2m$. Si $\alpha_{Fe} = 12\times10^{-6}/°C$ y $\alpha_{Cu} = 17\times10^{-6}/°C$.



Solución:

Se tienen dos casos, el primero, se indica en la figura adjunta (a). Luego la diferencia de longitudes de la regla a temperatura t_1 es igual:

$$l = l_0(1+\alpha_1 t_1) - l'_0(1+\alpha_2 t_2)$$

$$l = l_0(1+\alpha_1 t_2) - l'_0(1+\alpha_2 t_2)$$

Para el caso (b) la diferencia de longitudes de la regla a temperatura t_2 está dado:

$$l = l_0(1+\alpha_1 t_1) - l'_0(1+\alpha_2 t_1)$$

$$-l = l_0(1+\alpha_1 t_2) - l'_0(1+\alpha_2 t_2)$$

En el primer caso (a) solucionando las dos ecuaciones, se obtiene:

$$l_0 = \alpha_2 l/(\alpha_2 - \alpha_1) = 6.8 \text{ cm} \quad , \quad l'_0 = \alpha_1 l/(\alpha_2 - \alpha_1) = 4.8 \text{ cm}$$

Para el segundo caso (b), solucionando las ecuaciones:

$$l_0 = [2+\alpha_2(t_1+t_2)]\, l/(t_2 - t_1)(\alpha_2 - \alpha_1) = 2008.5 \text{ cm}$$

$$l'_0 = [2+\alpha_1(t_1+t_2)]\, l/(t_2 - t_1)(\alpha_2 - \alpha_1) = 2006 \text{ cm}$$

(13) A 20°C, la densidad del oro es de 19.3 g/cm^3. Halle su densidad a 100°C

Solución:

Sabemos que la variación de temperatura, no da lugar a una variación de masa; es decir que ésta permanece constante.

$$m = \rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_0(1+\gamma t_2)}{V_0(1+\gamma t_1)} = \frac{1+\gamma t_2}{1+\gamma t_1}$$

En este caso: $\rho_2 = 19.3\,\frac{1+\gamma_{Au}\times 20}{1+\gamma_{Au}\times 100}$, $\gamma_{Au} = 3\alpha_{Au}$

$\alpha = 14.3\times 10^{-6}\,°C^{-1}$, $\rho_2 = 19.2\ g/cm^3$

(14) Una vasija de vidrio está llena justamente con 1 ℓt de terpentina es 50°F. Hallar el volumen de líquido que se derrama si se calienta hasta 86°F. El $\alpha_v = 9\times 10^{-6}\,°C^{-1}$ y $\beta_T = 97\times 10^{-5}\,°C^{-1}$.

Solución:

Como se ha visto en los problemas anteriores, el volumen derramado está dado por: $\Delta V = V_0\,\beta_T \Delta t - V_0\,3\alpha_v \Delta t$

$$\Delta V = V_0(\beta_T - 3\alpha_v)\Delta t = 1\,\ell t(97-2.7)\times 10^{-5}\times(30-10) = 1986\times 10^{-5}\,\ell t$$

$\Delta V = 19.8\ \text{cm}^3$, donde $t_1 = 50°F = 10°C$ y $t_2 = 86°F = 30°C$

(15) La temperatura de un dólar de plata pura se eleva en 100°K. Hallar el cambio relativo en porcentaje de su: (a) área , (b) espesor, (c) volumen, (d) densidad. Si $\alpha_{Ag} = 1.7\times 10^{-5}\,°C^{-1}$.

Solución:

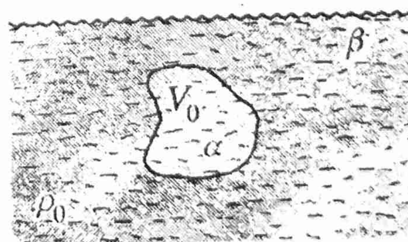
a) Sabemos $\Delta A = A_0\,2\alpha\Delta T$, $\frac{\Delta A}{A_0}\times 100 = 2\alpha\Delta T\times 100 = 0.34\%$

b) $\Delta e = e_0\alpha\Delta T$, $\frac{\Delta e}{e_0}\times 100 = \alpha\Delta T\times 100 = 0.17\%$

c) $\Delta V = V_0\,3\alpha\Delta T$, $\frac{\Delta V}{V_0}\times 100 = 3\alpha\Delta T\times 100 = 0.51\%$

d) $\Delta\rho/\rho_0 = -\Delta V/V_0$, $(\Delta\rho/\rho_0)\times 100 = -0.51\%$

(16) Según el principio de Arquímedes, si un cuerpo de volumen V_0 se sumerge en un líquido de densidad de masa ρ_0, entonces, lo hace flotar la fuerza $\rho_0 V_0 g$. Hallar la fuerza ascendente a la nueva temperatura si se elevan la temperatura del cuerpo y el fluido en ΔT. Sabiendo α es el coeficiente de expansión lineal del cuerpo y β es el coeficiente de expansión del volumen del fluido.



Solución:

El empuje inicial es $E_0 = \rho_0 V_0 g$

El empuje a la nueva temperatura será:

$$E = (\rho_0 + \Delta\rho)(V_0 + \Delta V)g = (\rho_0 V_0 + V_0\Delta\rho + \rho_0\Delta V + \Delta\rho\Delta V)\,g$$

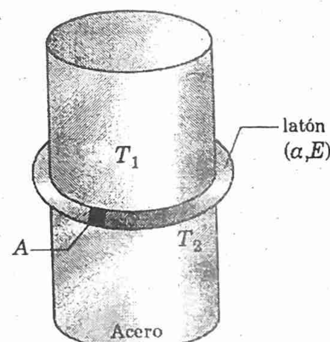
Pero: $\Delta\rho\Delta V = 0$

$$E = \rho_0 V_0 g\left[1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} + \frac{\Delta V}{V_0}\right] \quad \text{y} \quad \Delta V = V_0 3\alpha\,\Delta T \quad , \quad \Delta\rho = -\rho_0\beta\,\Delta T$$

Reemplazando en $E = \rho_0 V_0 g(1 - \beta\,\Delta T + 3\alpha\,\Delta T)$

$$E = \rho_0 V_0 g[1 + \Delta T(3\alpha - \beta)]$$

(17) Un anillo de latón de varios centímetros de diámetro se calienta hasta la temperatura $T_1 = 573°K$ se encaja ajustadamente sobre un cilindro de acero cuya temperatura es $T_2 = 291°K$. ¿Qué esfuerzo de rotura experimentará el anillo una vez enfriado hasta $291°K$?. Si $\alpha_{latón} 1.84\times10^{-5}\,°K^{-1}$. y $E_{latón} = 6.47\times10^{10}\,Pa$. Las dimensiones de la sección del anillo son $2\times5\ \text{mm}^2$



Solución:

El latón sufrirá una deformación en la longitud de su circunferencia interna, debido a los cambios de temperatura, si para l_1 se tiene T_1 y para l_2 le corresponde de T_2, luego tenemos: $l_1 = l_2[1 + \alpha(T_1 - T_2)]$, $\frac{l_1 - l_2}{l_2} = \alpha(T_1 - T_2)$

Como el espesor del anillo es pequeño en comparación con su diámetro, entonces el alargamiento relativo de todas sus dimensiones es la misma: $(l_1 - l_2)/l_2$. Luego, usando la Ley de Hooke: $(l_1 - l_2)/l_2 = F/ES$, entonces $F/ES = \alpha(T_1 - T_2)$

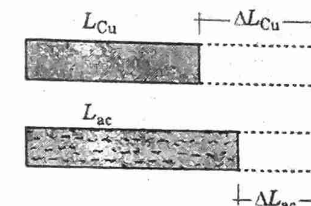
$F = SE\,\alpha(T_1 - T_2)$, reemplazando valores:

$$F = 10\times10^{-6}\times6.47\times10^{10}\times1.84\times10^{-5}(573 - 291) \approx 3357\ N$$

(18) Sea una varilla de cobre de 1 m. ¿Cuál debe ser la longitud de una varilla de acero tal que se produzca la misma dilatación lineal en las dos varillas cuando la temperatura aumenta en 75°C.

Solución:

La variación de la longitud en la varilla de cobre debido al ΔT:



$\Delta L_{Cu} = L_{Cu}\alpha_{Cu}\Delta T$ y para la varilla de acero:

$\Delta L_{ac} = L_{ac}\alpha_{ac}\Delta T$

Según las condiciones del problema:

$\Delta L_{Cu} = \Delta L_{ac}$, entonces:

$L_{Cu}\alpha_{Cu}\Delta T = L_{ac}\alpha_{ac}\Delta T$

$$L_{ac} = L_{Cu}\frac{\alpha_{Cu}}{\alpha_{ac}} = 1\ \text{m}\times\frac{1.6\times10^{-5}}{1.06\times10^{-5}} = 1.51\ \text{m}$$

$L_{ac} = 1.51\ \text{m}$

(19) Una esfera de Cu tiene 50 cm. de radio. Si se varía su temperatura en 100°C. Hallar (a) la variación de volumen debida a la dilatación. (b) La variación de la longitud del radio partiendo de (a). (c) La variación de la longitud del radio calculada directamente como si fuese una dilatación lineal. (d) Comparar los resultados de (b) y (c).

Solución:

a) Por teoría: $\Delta V = V_0 3\alpha\,\Delta T$ y $V_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 = 0.523\ \text{m}^3$

Luego $\Delta V = 0.523\times3\times1.6\times10^{-5}\times100 = 2.5104\times10^3\ \text{m}^3$

b) Hallemos el volumen final: $V_f = V_0 + \Delta V = 0.523 + 2.510\times10^{-3}$

$V_f = 523.51 + 10^{-3}\,\text{m}^3$, el radio respectivo $r = \left(\frac{3V_f}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$

Reemplazando valores $r = 0.50069\ \text{m}$ y $\Delta r = 0.50069 - 0.50000$

$\Delta r = 6.9\times10^{-4}\ \text{m}$

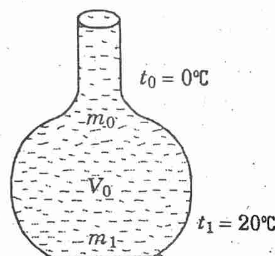
c) Por definición: $\Delta r = r_0\alpha\,\Delta T = 0.50\times1.6\times10^{-5}\times100\,\text{m} = 8\times10^{-4}\ \text{m}$

$\Delta r = 8\times10^{-4}\ \text{m}$

d) Luego la diferencia $\Delta(\Delta r) = 8\times10^{-4} - 6.9\times10^{-4}\,m = 1.1\times10^{-4}\,m$

(20) En un balón de vidrio a temperatura $t_0 = 0°C$, caben $m_0 = 100g$ de Hg a $t_1 = 20°C$. En este mismo balón caben: $m_1 = 99.7g$ de Hg. (En ambos casos hay que considerar la temperatura del Hg igual a la del balón). Hallar, valiéndose de estos datos, el coeficiente de dilatación lineal del vidrio α, teniendo en cuenta que el coeficiente de dilatación volumétrica del Hg. $\beta_1 = 18\times10^{-5}°C^{-1}$.

Solución:



Al calentar el vidrio, este aumenta su volumen, así:
$V_1 = V_0(1+\beta t_1)$, β: coeficiente del vidrio.

Si ρ_0 y ρ_1 son las densidades del mercurio a temperaturas t_0 y t_1: $m_0 = m_1$, $V_0\rho_0 = V_1\rho_1$

$\rho_1 = V_0\rho_0/V_1 = V_0\rho_0/V_0(1+\beta_1 t_1) = \rho_0/(1+\beta_1 t_1)$,
β_1: coeficiente del mercurio.

Como: $m_1 = V_1\rho_1 = [V_0(1+\beta t_1)][\rho_0/1+\beta_1 t_1] = m_0\,\frac{1+\beta t_1}{1+\beta_1 t_1}$

despejando β: $\beta = \frac{m_1(\beta_1 t_1) - m_0}{m_0 t_1} = 3\times10^{-5}°C^{-1}$

$$\beta = 3\times10^{-5}°C^{-1}$$

(21) Una barra de cobre mide 50 cm. de longitud cuando se mide con una cinta de acero a $10°C$. ¿Cuál será su longitud medida a 30°C?

Solución:

Hallemos cuanto habrá variado la longitud de cobre debido al cambio de temperatura:

$$L_{Cu} = L_o(1+\alpha_{Cu}\Delta T) = 50\,[1+1.68\times10^{-5}(30-10)]$$

$$L_{Cu} = 50.0168\text{ cm}$$

La cinta de acero sufrirá variación en su longitud para 50 cm.

$$L_{ac} = L_0(1+\alpha_{ac}\Delta T) = 50\,[1+1.05\times10^{-5}(30-10)]$$

$$L_{ac} = 50.0105\text{ cm}$$

Luego al usar la cinta de acero habrá un defecto en la medición de $\Delta L = L_{Cu} - L_{ac} = 50.0168 - 50.01050 = 0.006\,cm$, que es la diferencia que habrá que agregar a la barra de cobre:

50 + 0.006 cm. = 50.006 cm. a la temperatura de 30°C

(22) Una placa circular de cobre de 16 cm. de diámetro tiene un agujero concéntrico de 4.00 cm. de diámetro. Se desea fijar el disco a una barra de acero cilíndrica maciza de 4.010 cm. calentando el disco hasta una temperatura suficiente para que el diámetro del agujero sea igual al diámetro de la barra, lo que permitirá montarlo en la barra y luego enfriar las piezas (ambas). (a) Hallar el cambio de temperatura a que debe someterse el disco para lo anterior si el coeficiente de dilatación lineal del cobre es $1.66\times10^{-5}°C^{-1}$ (b) Hallar el cambio en la temperatura que pueden sufrir la barra ($\alpha_b = 1.1\times10^{-5}°C^{-1}$) y el disco unido a ella antes de que este se afloje otra vez.

Solución:

a) Hallemos la variación del diámetro según datos del problema:
$\Delta d = 4.010 - 4.00\text{ cm} = 0.01\text{ cm}$, esta deformación se obtiene por cambio de temperatura:

$$\Delta d = d_0\,\alpha\,\Delta T \quad , \quad \Delta T = \Delta d/\alpha d_0$$

$$\Delta T = 0.01/1.66\times10^{-5}\times4.00 = 150.6°C$$

b) Al calentar conjuntamente la barra de acero y el disco de cobre, las dimensiones finales de los diámetros será:

$$d_{Cu} = d_0 + \Delta d = d_0 + \alpha_{Cu}d_0\Delta T \quad \text{y}$$

$$d_{ac} = d_0' + \Delta d = d_0' + \alpha_{ac}d_0'\Delta T$$

Sabiendo $d_0 = 4.00$ cm $\quad d_0' = 4.010$ cm

El disco se aflojará y saldrá de la barra cuando $d_{Cu} = d_{ac}$

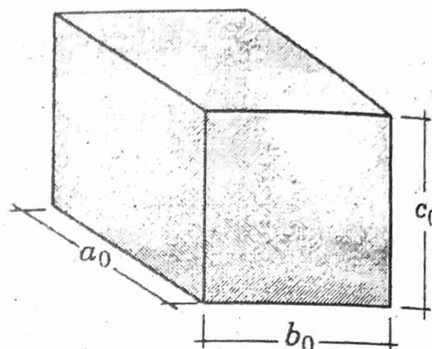
$$d_0 + \alpha_{Cu}d_0\Delta T = d_0' + \alpha_{ac}d_0'\Delta T \quad , \quad \Delta T = (d_0' - d_0)/(\alpha_{Cu}d_0 - \alpha_{ac}d_0')$$

Reemplazando valores se obtiene: $\Delta T = 449°C$

(23) **Demostrar que el coeficiente de dilatación volumétrica β y el coeficiente de dilatación longitudinal α de una sustancia sólida están relacionados por la sencilla expresión $\beta = 3\,\alpha$.**

Solución:

Sea un cuerpo cuyas dimensiones iniciales son a_0, b_0 y c_0. El incremento de volumen ΔV, debido a un aumento de temperatura da lugar a la expresión siguiente:



$$V_0 + \Delta V = (a_0 + \Delta a)(b_0 + \Delta b)(c_0 + \Delta c)$$

$$V_0 + \Delta V = a_0\,b_0\,c_0 + b_0c_0\Delta a + a_0c_0\Delta b + c_0\Delta a\,\Delta b + a_0b_0\Delta c + b_0\Delta a\,\Delta c + a_0\Delta b\,\Delta c + \Delta a\,\Delta b\,\Delta c$$

Considerando que el producto $\Delta a\,\Delta b\,\Delta c$ es pequeño o nulo, y $V_0 = a_0\,b_0\,c_0$

$$\Delta V = b_0c_0\Delta a + a_0c_0\Delta b + c_0\Delta a\Delta b + a_0b_0\Delta c + b_0\Delta a\Delta c + a_0\Delta b\Delta c$$

$$\Delta V = b_0c_0(a_0\alpha\Delta T) + a_0c_0(b_0\alpha\Delta T) + c_0(a_0\,\alpha\Delta T)(b_0\alpha\Delta T) + a_0b_0(c_0\alpha\Delta T) + b_0(a_0\alpha\Delta T)(c_0\alpha\Delta T) + a_0(b_0\alpha\Delta T) + a_0(b_0\alpha\Delta T)(c_0\alpha\Delta T)$$

$\Delta V = 3a_0b_0c_0\alpha\Delta T + 3\,a_0b_0c_0\alpha^2\,\Delta T$, como α^2 es pequeño.

$\Delta V = 3a_0b_0c_0\,\alpha\Delta T = a_0b_0c_0\,3\alpha\Delta T = V_0\,3\alpha\Delta T$ .... (1)

Por definición se tiene: $\Delta V = v_0\beta\,\Delta T$ .... (2)

De (1) y (2): $V_0\,3\alpha\Delta T = v_0\,\beta\Delta T$, $\beta = 3\,\alpha$

(24) Demuestre que el cambio de densidad con la temperatura que ocurre como resultado de dilatación térmica, puede expresarse por $\Delta\rho/\Delta T = -\beta\rho$.

Solución:

Sabemos por definición: $m = \rho V$, $\Delta m = \rho\Delta V + V\Delta\rho$

Como no hay variación de masa: $\Delta m = 0$

$\Delta\rho = -\rho(\Delta V/V)$, pero sabemos $\Delta V = V\beta\,\Delta T$, $\Delta V/V = \beta\,\Delta T$

Reemplazando su igualdad: $\Delta\rho = -\rho(\beta\,\Delta T)$ es decir $\frac{\Delta\rho}{\Delta T} = -\beta\,\rho$

(25) Se une con soldadura una barra metálica de longitud l_1, extremos con extremo, a una barra de otro metal y cuya longitud es l_2. El coeficiente de dilatación lineal del primer metal es α_1 y el del segundo α_2. ¿Cuál será el coeficiente de dilatación lineal efectivo de la barra soldada compuesta?.

Solución:

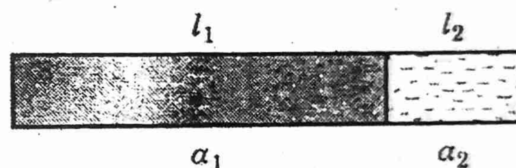
Cuando hay una variación de temperatura ΔT, da lugar a una variación Δl_1 de la primera barra: $\Delta l_1 = l_1 \alpha_1 \Delta T$; para la segunda barra $\Delta l_2 = l_2 \alpha_2 \Delta T$

Cuando las dos barras están juntas, experimentará el conjunto una variación Δl con un coeficiente de dilatación efectivo α:

$$\Delta l = (l_1 + l_2)\alpha \Delta T$$

pero: $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$, se aplica la misma variación ΔT :

$$(l_1 + l_2)\alpha \Delta T = l_1 \alpha_1 \Delta T + l_2 \alpha_2 \Delta T$$



Luego: $\alpha = \dfrac{l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2}{l_1 + l_2}$

(26) Cuando cierto metal se calienta desde 0°C hasta 450°C su densidad disminuye 1.015 veces. Hallar el coeficiente de dilatación lineal de este metal suponiendo que es constante en el intervalo de temperaturas dado.

Solución:

Se ha demostrado en el problema 24: $\Delta\rho/\rho = -\beta \Delta T$ y $\beta = 3\alpha$

$$\Delta\rho/\rho = -3\alpha \Delta T \quad , \quad \Delta T = -\frac{\Delta\rho/\rho}{3\alpha}$$

Por condición del problema: $\rho - 1.015\rho = \Delta\rho$, $-0.015\rho = \Delta\rho$

$$\Delta\rho/\rho = -0.015$$

luego: $\alpha = -\dfrac{-(0.015)}{3 \times (450°C)}$

$$\alpha = 1.11 \times 10^{-5} \, °C^{-1}$$

(27) El coeficiente medio de dilatación lineal de un hilo metálico entre $0°C$ y $t°C$, viene dado por la fórmula:

$$\alpha = 1.28 \times 10^{-5} + 4.33 \times 10^{-9} t$$

Calcular la dilatación que experimentarán 200 m, a 0°C, de dicho hilo, cuando su temperatura se eleve de 10°C a 200°C.

Solución:

La longitud del hilo metálico para cada temperatura será:

para t_2 : $l_2 = l_0[1+\alpha(t_2 - t_0)]$

para t_1 : $l_1 = l_0[1+\alpha(t_1 - t_0)]$

$$l_2 = l_0[1+(1.28\times10^{-5} + 4.33\times10^{-9}t_2)(t_2 - t_0)]$$

$$l_1 = l_0[1+(1.28\times10^{-5} + 4.33\times10^{-9}t_1)(t_1 - t_0)]$$

Luego: $\Delta l = l_2 - l_1 = l_0[1.28\times10^{-5}(t_2 - t_1) + 4.33\times10^{-9}(t_2^2 - t_1^2)]$

donde: $l_0 = 200\,\text{m}$

$t_1 = 10°C$, $t_2 = 200°C$, se obtiene: $\Delta l = 0.00521\,\text{m} = 5.21\,\text{mm}$

(28) A qué temperatura es preciso calentar un matraz abierto para expulsar los 5/6 del aire que contiene α 20°C?

Solución:

Para desalojar los 5/6 del aire del matraz y quede en él 1/6, es necesario que el volumen inicial se haga 6 veces mayor, es decir: $V_f = 6V_0$.

Luego, para dilatación de gases: $V_f = V_0[1+\beta(t - t_0)]$

$$6V_0 = V_0[1+\beta(t - 20°C)]$$

$$5/\beta = t - 20°C \quad , \text{ pero } \beta = 1/273°C$$

$$t = 20°C + 5\times273°C = 1385°C$$

(29) Una capa esférica y muy delgada tiene un radio de 15 cm. y se compone de aluminio. si su temperatura se eleva en 20°K. Calculen: (a) El cambio de su área superficial. (b) El cambio de su volumen y (c) El cambio de su radio.

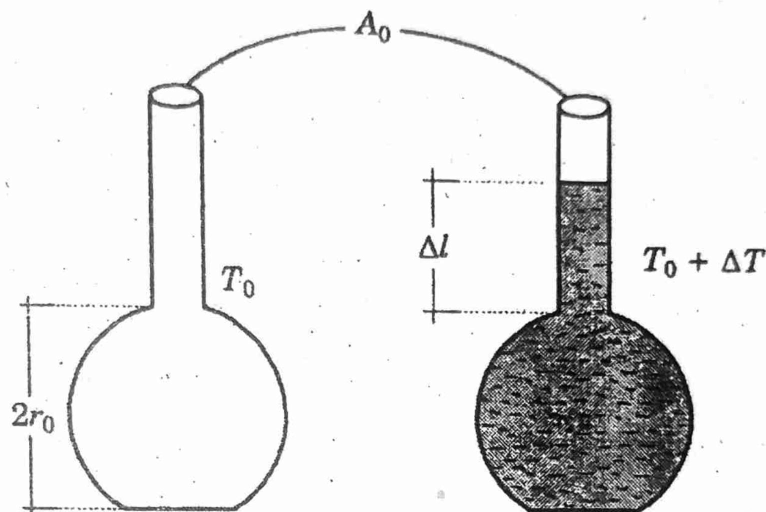
Rpta.: a) $\Delta S = 2.5\,\text{cm}^2$ b) $\Delta V = 19\,\text{cm}^3$ c) $\Delta r = 6.6\times10^{-3}\,\text{cm}$

(30) Un líquido con un coeficiente de expansión de volumen β ocupa como se muestra en la figura, una cápsula hueca y esférica de radio r_0 compuesta de

un material con un coeficiente de expansión lineal α. Se fija un pequeño tubo capilar de área de corte transversal A_0 a una abertura de la esfera. Supongan que la temperatura del sistema se eleva desde una temperatura original T_0 a $T_0 + \Delta T$.

a) Cuál es el cambio de volumen de la cápsula esférica

b) Cuál es el cambio de volumen del liquido.



Rpta.: **a)** $\Delta V_{esf} = 4\pi\, r_0^3 \Delta T\, \alpha$

b) $\Delta V_{liq} = 4\pi/3\, r_0^3 \beta \Delta T$

(31) Con relación al problema anterior, demuestren que la altura Δl del líquido en la columna capilar está dado por:

$$\Delta l = (4\pi r_0^3 / 3A_0)(\beta - 3\alpha)\Delta T$$

(32) Demuestre que el cambio del momento de inercia I con la temperatura que experimenta un objeto sólido está dado por la expresión: $\Delta I = 2\alpha I_0 \Delta T$.

b) Demuestre que el cambio de período T de un período físico con la temperatura está dado por $\Delta t = \alpha t_0 \Delta T/2$.

Solución:



a) En general el momento de Inercia de un cuerpo está dado por: $I_0 = \Sigma m_i R_i^2$

luego: $\Delta I = 2\ \Sigma\ m_i R_i\ \Delta R_i$ .... (1)

Como R_i : es una magnitud lineal, representa la distancia de la masa m_i al eje de rotación.

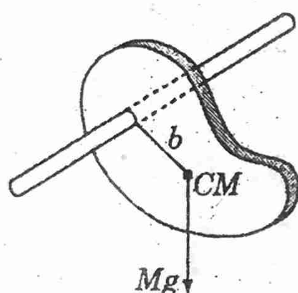
$\Delta R_i = R_i\ \alpha \Delta T$ .... (2)

De (2) en (1) : $\Delta I = 2\,\Sigma m_i R_i (R_i \alpha\, \Delta T)$

$$\Delta I = 2\alpha (\Sigma m_i R_i^2)\, \Delta T$$

$$\Delta I = 2\alpha\, I_0 \Delta T$$

b)



Sabemos para un péndulo físico, su período es:

$$t_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Mgb}} \quad \text{.....................} \quad (3)$$

Cuando se produce un incremento de temperatura, el nuevo período será:
Derivando: (3)

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta T} = \pi \left(\frac{I_0}{Mg\,b} \right)^{1/2} \left\{ \frac{1}{Mgb} \frac{\Delta I_0}{\Delta T} + \frac{I_0}{Mg\,b^2} \frac{\Delta b}{\Delta T} \right\}$$

$$= \pi \sqrt{\frac{Mg\,b}{I_0}} \left\{ \frac{1}{Mg\,b} \left(\frac{2\alpha I_0 \Delta T}{\Delta T} \right) + \frac{I_0}{Mg\,b^2} \frac{b\,\alpha \Delta T}{\Delta T} \right\}$$

$$= \pi \sqrt{\frac{Mg\,b}{I_0}} \left\{ \frac{2I_0\alpha}{Mg\,b} + \frac{I_0\alpha}{Mg\,b} \right\}$$

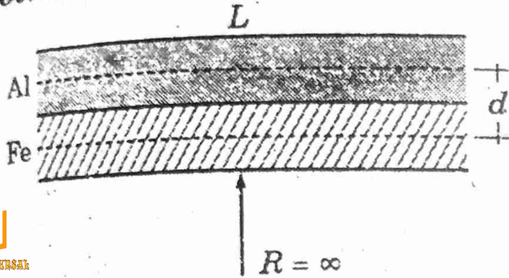
$$\frac{\Delta t_0}{\Delta T} = \pi \sqrt{\frac{Mg\,b}{I_o}} \left(\frac{3I_0\alpha}{Mg\,b} \right) = \pi\alpha \sqrt{\frac{I_0}{Mg\,b}}$$

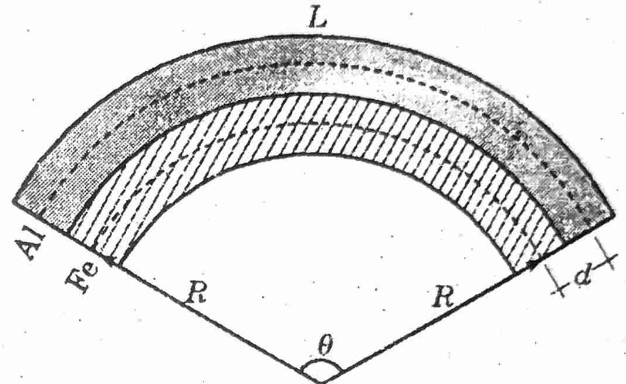
Pero: $\sqrt{\dfrac{I_0}{Mg\,b}} = \dfrac{t_0}{2\pi}$

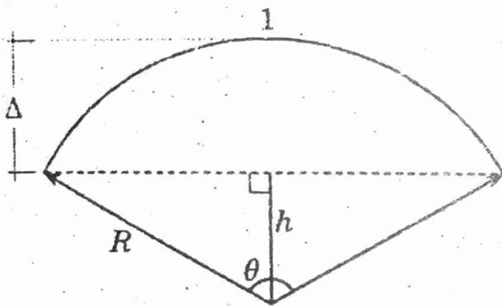
Luego: $\dfrac{\Delta t_0}{\Delta T} = \pi\alpha \left(\dfrac{t_0}{2\pi} \right) = \dfrac{\alpha t_0}{2}$, $\Delta t_0 = \frac{1}{2} \alpha t_0\, \Delta T$

(33) a) Una banda bimetálica, tal como se indica en la figura, $d = 2$ mm y los metales son Aluminio y Fierro. Halle el radio de curvatura R de la tira, si se eleva su temperatura 20°C, a partir de las temperaturas para la cual $R = \infty$ (b) si la banda tiene 20 cm. de largo. Halle el ángulo central del arco, que forma la banda. (c) La desviación lateral de su punta (flecha).

Solución:







a) Los nuevos radios para el aluminio R_1 y fierro R_2, tendrán un valor para ΔT.

$$R_1 = R[1 + \alpha_{Al}\Delta T]$$

$$R_2 = R[1 + \alpha_{Fe}\Delta T]$$

$$R_1 - R_2 = (\alpha_{Al} - \alpha_{Fe})R\Delta T$$

Pero: $R_1 - R_2 = d$, $d = (\alpha_{Al} - \alpha_{Fe})R\Delta T$

$$R = \frac{d}{(\alpha_{Al} - \alpha_{Fe})\Delta T} = 909.1 \text{ cm}$$

b) Según el gráfico: $L = R\theta$

$$\theta = L/R = 20\text{cm}/909.1\text{cm} = 0.022 \text{ radianes}$$

c) Nos piden la flecha: Δ

$$\Delta = R - h = R - R\cos(\theta/2)$$

$$\Delta = R[1 \cos(\theta/2)]$$

$$\Delta = 0.0550 \text{ cm.}$$

(34) Cuando vale el coeficiente de dilatación (a presión constante) de un gas ideal a la temperatura $T = 600°K$?

Solución:

Por definición : $\beta = \dfrac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)}{V}$

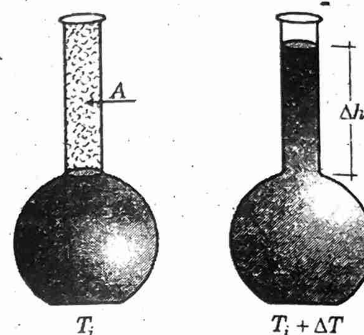
Para un gas ideal : $PV = nRT \qquad V = \dfrac{nRT}{P}$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right) = \frac{nR}{P}$$

Luego: $\beta = \dfrac{\left(\frac{nR}{P}\right)}{V} = \dfrac{1}{\left(\frac{PV}{nR}\right)}$, como $\dfrac{PV}{nR} = T$

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{600°K} = 1.66 \times 10^{-3}\,°K^{-1}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

01 

Un termómetro de mercurio se construye como se muestra en la figura. El tubo capilar tiene un diámetro de 0.00400 cm. y el diámetro del bulbo es igual a 0.250 cm. Ignore la expansión del vidrio y encuentre el cambio en la altura de la columna de mercurio que sucede con un cambio de temperatura de $30.0°C$.

Rpta.: 3.55cm

02 En recipiente de capacidad calorífica despreciable se tiene 1 kg de hielo a $-20°C$. ¿Qué mínima cantidad de un líquido a $80°C$ debe ingresar al sistema para finalmente quede ingresar al sistema para que finalmente quede 225 g de hielo?. El líquido tiene un calor específico que varía con la temperatura (T) según la ley $Ce = 10 + 2T(\text{cal}/g°C)$.

Rpta.: 10 g.

03 Dentro de una caja térmicamente aislante se ubica dos objetos cúbicos, del mismo material y de aristas α y 2α, a temperaturas $9°C$ y $18°C$ respectivamente. Determine la temperatura en el equilibrio térmico. (No hay cambio de fase)

Rpta.: $17°C$

04 Una sustancia de 20 g se encuentra a $10°C$ y se observa que se calor específico (Ce) varía con la temperatura de acuerdo a la siguiente relación $Ce(t) = 2t + 4$ (t en segundos y Ce en $\text{cal}/gx°C$). Determine la cantidad de calor que se requiere entregar para variar su temperatura en $30°C$.

Rpta.: 32,4K cal

05 Que alargamiento sufrirá un carril de hierro de 12.50 m a $0°C$, al pasar de $8°C$ a $80°C$ ¿Si $\alpha_{Fe} = 1.16 \times 10^{-5}°C^{-1}$?

Rpta.: $\Delta L = 12.76$ mm

06 Un alambre telefónico de cobre prácticamente no tiene comba entre los postes separados 35.0 m en un día invernal cuando la temperatura es de $-20.0°C$. ¿Cuánto más largo es el alambre en un día de verano cuando $T_c = 35.0°C$?

Rpta.: 3.27 cm.

07 Dos reglas metálicas de latón y aluminio, respectivamente miden exactamente $1m$ 0°C. Qué diferencia de longitud tendrán a 150°C. Si $\alpha_l = 1.9\times10^{-5}\ °C^{-1}$ y $\alpha_{Al} = 2.2\times10^{-5} °C^{-1}$.

Rpta.: La regla del aluminio excederá 0.45 mm.

08 Dos tramos de concreto de un puente de 250 metros de largo se colocan extremo con extremo de modo que no haya posibilidad se expansión. Si hay un aumento de temperatura de $20.0°C$, encuentre la altura y a la cual estos tramos se pandean.



(a)



(b)

Rpta.: 2.74m.

09 Hallar la densidad del mercurio a 300°C sabiendo que su densidad a $0°C$ es igual a $13.6\ g/cm^3$. Considerar que el coeficiente de dilatación cúbica de mercurio es constante y que su valor medio en el intervalo de temperaturas dado es igual a $1.85\times10^{-4} °C^{-1}$.

Rpta.: $\rho_{Hg} = 12.9\ g/cm^3$

10 En un recipiente de vidrio cuya altura 10 cm. hay mercurio. A la temperatura 20°C al nivel del mercurio le faltaba la altura 1 mm. para llegar al borde del recipiente. ¿Cuántos grados se puede calentar el mercurio sin que rebose de este recipiente? El coeficiente de dilatación cúbica del mercurio $\beta = 1.82\times10^{-4} °C^{-1}$. La dilatación del vidrio se desprecia.

Rpta.: $\Delta t = 56°C$

11 En una cazuela se echa agua fría (a temperatura de $10°C$) y se pone a calentar en un hornillo. Pasado 10 minutos el agua comienza a hervir, a partir de ese instante, ¿dentro de cuánto tiempo el agua se vaporizará por completo?

Rpta.: 60 minutos.

12 El módulo de comprensibilidad del benzol a $0°C$ y a la presión atmosférica es igual a $9\times10^{-5}\,atm^{-1}$ y su coeficiente de dilatación cúbica $1.24\times10^{-3}\,°C^{-1}$. Qué presión exterior habrá que ejercer sobre el benzol para que al calentarlo 1°C su volumen no varíe?

Rpta.: $\Delta p = 13.8\,atm$

13 El volumen de un paralelogramo sólido y homogéneo se dilata en 0,03%. Determine en qué porcentaje se dio la dilatación superficial de una de sus caras.

Rpta.: 0,02%

14 Dos láminas A y B se encuentra inicialmente a $20°C$ y $30°C$ respectivamente. Al aumentar las temperaturas hasta $60°C$, sus áreas aumentaron en 2% y 3% respectivamente. Indique la relación correcta de sus coeficientes de dilatación lineal.

Rpta.: $\alpha_A = \frac{\alpha\beta}{2}$

15 En una rueda de madera de 100 cm. de diámetro es necesario colocar un neumático de hierro, cuyo diámetro es 5 mm. menor que el de la rueda. En ¿cuántos grados es necesario elevar la temperatura del neumático. Si $\alpha_{Fe} = 12\times10^{-6}\,°C^{-1}$.

Rpta.: $\Delta t = 418°C$

16 Un reloj con un péndulo de latón tiene un período de 1.000s a $20.0°C$. Si la temperatura aumenta a $30.0°C$

a) ¿En qué medida cambia el periodo y
b) Cuánto tiempo se atrasa o adelanta el reloj en una semana?

Rpta.: a) $9.49\times10^{-5}\,s$ b) $57,4\,s$ perdida

17 La altura de la columna de mercurio medida en una escala de latón a temperatura t_1, es igual a h_1. Cuál será la altura h_0 de la columna de mercurio a $t_0 = 0°C$ se conoce α del latón y β del mercurio.

Rpta.: $h_0 \cong h_1(1 + \alpha t_1 - \beta t_1)$

18 A la temperatura de $0°C$ se llena de mercurio un recipiente de vidrio cuyo volumen es 1 litro. Se eleva determinar la cantidad de mercurio que saldrá del vaso, sabiendo que $\alpha_{vidrio} = 8\times10^{-6}°C^{-1}$ y $\alpha_{Hg} = 6\times10^{-5}°C^{-1}$

Rpta.: 26 cm^3

19 Un líquido tiene densidad ρ.

a) Muestre que el cambio fraccional en la densidad para un cambio de temperatura ΔT es $\Delta\rho/\rho = -\beta\Delta T$. ¿Cuál es el significado del signo negativo?

b) El agua dulce tiene una densidad máxima de 1.000 g/cm^3 a $4.0°C$. A $10.0°C$, su densidad es 0.9997 g/cm^3. ¿Cuál es el valor de β para el agua a lo largo de este intervalo de temperatura?

Rpta.: a) La expansión hace caer la densidad
b) $5\times10^{-5}(°C)^{-1}$

20 Una bola de vidrio, cuyo coeficiente de dilatación cúbica es β, se pesa tres veces: en el aire y en un líquido a las temperaturas t_1 y t_2. Las indicaciones para las tres pesadas son: P, P_1, P_2. Hallar el coeficiente de dilatación cúbica β_1 del líquido.

Rpta.: $\beta_1 = \frac{P_2 - P_1 + (P - P_1)(t_2 - t_1)\beta}{(P - P_2)(t_2 - t_1)}$

21 Un cojinete de bola de acero mide 4000 cm de diámetro a $20.0°C$. Una placa de bronce tiene un agujero de 3.994 cm. de diámetro a $20.0°C$. ¿Qué temperatura común deben tener ambas piezas para que la bola atraviese apretadamente el agujero?

Rpta.: $208°C$

22 De un alambre de hierro de 1 mm. de radio cuelga una carga. Esta carga hace que el alambre se alargue en la misma longitud que se alargaría si se elevara 20°C su temperatura. Hallar la magnitud de la carga.

Rpta.: $F = 147.7\ N$

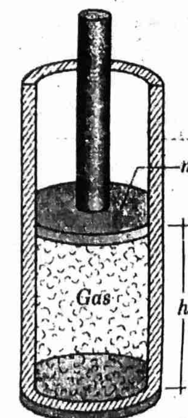
23 Los rieles de acero de un rápido sistema de transporte interurbano forman una vía continua que se mantiene rígidamente fija el concreto.

a) Si la vía fue instalada cuando la temperatura era de $0°C$, ¿cuál es el esfuerzo en los rieles en su día caluroso la temperatura es de $25.0°C$?

b) ¿Qué fracción representa del límite elástico de 52.2×10^7 N/m^2 que hace este esfuerzo?

Rpta.: a) $5.00 MPa$
b) 9.58×10^{-3}

24 Un cilindro vertical de área de sección transversal A se cierra con un émbolo de masa m si fricción que se encaja herméticamente.



a) Si en el cilindro, a una temperatura T, hay n lomes de un gas ideal, determine la altura h a la cual el émbolo está en equilibrio bajo su propio peso.

b) ¿Cuál es el valor de h si $n = 0.200$ mol, $T = 400 K$ $A = 0.00800\ m^2$ y $m = 20.0$ kg?

Rpta.: a) $h = nRT/(mg + P_0A)$
b) $0{,}661 m$

25 Tomando igual a 4.8×10^{-5} atm el valor medio del coeficiente de comprensión del agua, hallar la densidad del agua del mar a la profundidad de 5 km sabiendo que su densidad en la superficie es igual a 1030 kg/m^3. Al calcular la presión hidrostática del agua de mar supóngase que su densidad es aproximadamente igual a la densidad del agua en la superficie.

Rpta.: $\rho = 1055\ kg/m^3$

26 El coeficiente de dilatación cúbica del mercurio $\beta = 1.82\times10^{-4}\ °C^{-1}$. Hallar su coeficiente de comprensibilidad sabiendo que para que su volumen no varíe cuando se calienta 1°C es necesario aumentar 47 atm la presión exterior.

Rpta.: $\chi = 3.9\times10^{-6}\ atm^{-1}$

27 La relación $Lf = Li(1+\alpha\Delta T)$ es una aproximación que funciona cuando el coeficiente de expansión promedio es pequeño. Si αes muy grande, la relación $dL/dT = \alpha L$ debe integrarse para determinar la longitud final.

a) Suponga que el coeficiente de expansión lineal promedio es constante L varía, y determine la expresión general para la longitud final.

Rpta.: a) $Lf = L_i e^{\alpha\Delta T}$

28 Un calentador de inmersión de 500W se coloca en un depósito que tiene 2 litros de agua a $20°C$. ¿Cuánto tiempo se requerirá para llevar el agua a su temperatura de ebullición, suponiendo que el 80% de la energía disponible es absorbida por el agua?

Rpta.: 1,6 min

29 Dos barras metálicas yuxtapuestas y soldadas solamente por uno de sus extremos presentan a cualquier temperatura la misma diferencia de longitud. Calentadas en t°, la razón L_1/L_2 de sus longitudes en n.

Hallar la expresión algebraica de n, sabiendo que los respectivos coeficientes de dilatación son α_1 y α_2.

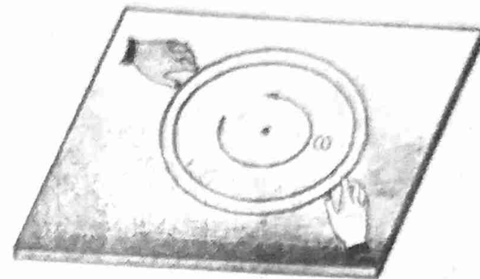
Rpta.: $n = \dfrac{\alpha_2(1+\alpha_1 t)}{\alpha_1(1+\alpha_2 t)}$

30 Una bola de plomo que se desplaza con una velocidad de 400 m/s, choca contra una pared, considerando que el 5% de su energía cinética se invierte en calentarla. Determine la variación de temperatura que sufre la bola si su $Ce = 0{,}03\text{cal}/°C$.

Rpta.: $\Delta T = 31°C$

31 Un anillo metálico ($Ce = 0,24$ cal/°C) cuya masa es 0,5 kg se hace girar sobre una mesa horizontal rugosa tal como se indica. Si el anillo adquirió 50 rad/s, ¿en cuánto incrementa su temperatura hasta que deja de girar? Considere que el anillo no experimenta la disipación de energía (radio del anillo: 10cm).

Rpta.: $\Delta T = 0,0200°C$



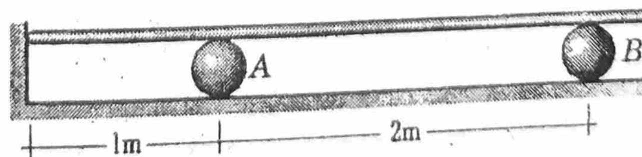
32 Dos termómetros de mercurio construidos del mismo vidrio tienen sus recipientes esféricos de 7 mm. y 6 mm. de diámetro; el diámetro del tubo cilíndrico del primero es igual a 2 mm. y el del segundo 1 mm. ¿En qué relación estarían las longitudes de un grado en los dos termómetros? Considere que la sección transversal del tubo capilar se mantiene constante y que inicialmente el mercurio ocupa totalmente los recipientes esféricos.

Rpta.: $\frac{h_1}{h_2} = 0,397$

33 Un reloj de péndulo metálico se adelanta 5 segundos por día a $15°C$ y se atrasa 10 segundos por día a $30°C$. Determine el coeficiente de dilatación lineal del metal del cual está hecho el péndulo.

Rpta.: $\alpha = 28 \times 10^{-6} °C^{-1}$

34 Una varilla metálica ($\alpha_{metal} = 1,7 \times 10^{-5} °C^{-1}$) del 3m longitud se encuentra sujeta por un extremo y apoyado sobre dos rodillos de 0,5cm de radio. Se calienta por acción de una corriente eléctrica desde $20°C$ hasta $220°C$, lo cual hace rotar a los rodillos.



Determine cuánto es la diferencia de lo que rotan cada uno de los rodillos debido a la dilatación de la varilla. Desprecie los efectos térmicos sobre los rodillos.

Rpta.: $\Delta\theta = 0,40$ rad

35 Una vasija de vidrio se llena parcialmente con mercurio y se hace el vacío. Se observa que al calentar el conjunto, la "merma" permanece constante. ¿Qué fracción del volumen total ocupaba inicialmente el mercurio?. El coeficiente de dilatación cúbica del vidrio es $2{,}5\times10^{-5}/°C$ y el mercurio es $0.000182/°C$.

Rpta.: $\frac{V_M}{V}=0{,}137$

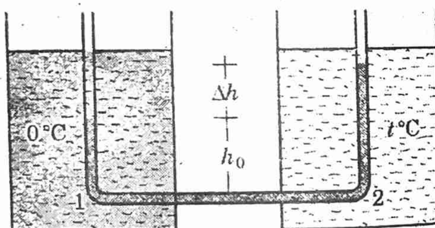
36 Un trazo del metal cuyo coeficiente de dilatación lineal es α, sumergido en mercurio sufre una "pérdida de peso" P a $0°C$ y P' a $t°C$. ¿Calcular el coeficiente de dilatación cúbica del mercurio β.

Rpta.: $\beta=\frac{1}{t}\left[\frac{P}{P'}(1+3\alpha t)-1\right]$

37 Una esfera hecha de un metal cuyo coeficiente de dilatación lineal $\left(\alpha=\frac{4}{3}\times10^{-4}K^{-1}\right)$ es sacado de un congelador a $0°C$ e introducida en un horno a $400°C$. ¿En cuánto aumenta su volumen?

Rpta.: 16%

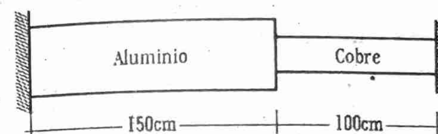
38 Dos tubos verticales de vidrio llenos de un líquido están unidos por sus extremos inferiores mediante un tubo capilar horizontal. Un tubo está rodeado de un baño que contiene hielo y agua en equilibrio (0°C), el otro está rodeado de un baño de agua caliente $(t°C)$. La diferencia de altura de los líquidos de las dos columnas es Δh, y h_0 es la altura de la columna a $0°C$.



Explique cómo este aparato, primeramente usado en 1816 por Dulong y Petit, se puede usar para medir el coeficiente verdadero de dilatación volumétrica β de un líquido (no la dilatación, diferencial entre el cristal y el líquido). Determínese: B si $t=16°C$, $h_0=126\,cm$, $\Delta h=1{,}50$ cm

Rpta.: $\beta=7{,}44\times10^{-4}/°C$

39 La barra compuesta de la figura está rígidamente sujeta a los dos apoyos. La parte de la izquierda es de cobre con sección uniforme 70 cm² y longitud 150 cm.; mientras que la derecha es de aluminio, con sección uniforme de $18cm^2$ y longitud 100 cm. A la temperatura de $25°C$, el conjunto está sin tensiones. La temperatura de la estructura desciende, y durante este proceso el soporte derecho cede 0.05cm en el sentido de la contracción del metal.



Determine la temperatura mínima a la que puede someterse al conjunto para que la tensión en el aluminio no exceda de 1700 kg/cm².

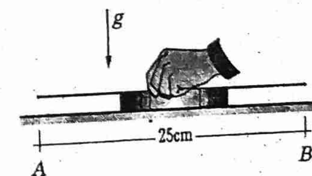
Módulos de elasticidad: para el cobre $E=1.1\times10^6$ kg/cm² para el aluminio $E=7\times10^5$ kg/cm². Coeficientes de dilatación: para el cobre $\alpha=17\times10^{-6}/°C$ para el aluminio $\alpha=22.2\times10^{-6}/°C$.

Rpta.: $t=-48°C$

40 Un matraz de 250 cm² de capacidad se llena completamente con mercurio a $30°C$. Si los coeficientes de dilatación cúbica para el vidrio y el mercurio son $1.2\times10^{-5}°C^{-1}$ y $18\times10^{-5}°C^{-1}$ respectivamente. ¿Qué volumen de mercurio se derramará si el sistema se calienta hasta $80°C$?

Rpta.: $V=2{,}10$ cm³

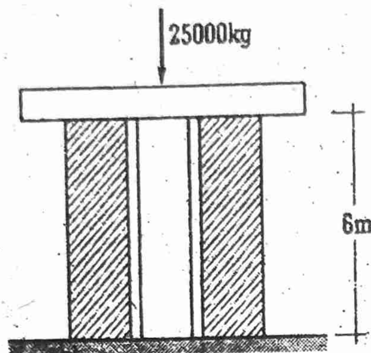
41 Una moneda de cobre de 20 g. es friccionada sobre una superficie horizontal áspera $(\mu_k=0{,}1)$ entre A y B. Si la fuerza normal de la persona sobre la moneda es 15N y ésta absorbe el 80% del calor producido; ¿cuántas veces debe recorrer dicho tramo para incrementar su temperatura en $10°C$?



$Ce_{Cu}=380$ J/kg°C$(g=10$ m/s²$)$.

Rpta.: $x=500$ cm

42 Un cilindro hueco de acero rodea a otro macizo de cobre y el conjunto está sometido a una carga axial de 25000 kg como se muestra en la figura. La acción del acero es de $18\ cm^2$, mientras que la del cobre es de $60\ cm^2$. Ambos cilindros tienen la misma longitud antes de aplicar la carga.



Determinar el aumento de temperatura del sistema, necesario para colocar toda la carga en el cilindro de cobre. La placa cubierta de la parte superior del conjunto es rígida.

Módulos de elasticidad: Del acero $E = 2.1\times10^6\ kg/cm^2$

Del cobre $E = 1.1\times10^6\ kg/cm^2$

Coeficientes de dilatación: Del acero $\alpha = 11\times10^{-6}\ /°C$

Del cobre $\alpha = 17\times10^{-6}\ /°C$

Rpta.: $\Delta t = 63°C$

43 En el centro de un disco de acero hay un orificio de diámetro 4.99 mm a 0°C. hasta qué temperatura hay que calentar el disco para que por su orificio empiece a pasar una bola de diámetro 5.00 mm. El coeficiente lineal del acero es $1.1\times10^{-5}\ °C^{-1}$

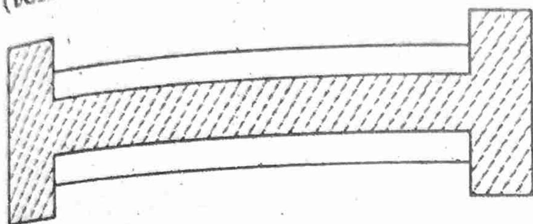
Rpta.: $t_f = 182°C$

44 Entre dos paredes se encuentra una barra, de sección S, compuesta de dos partes de igual longitud $L/2$ que tienen los coeficientes de dilatación lineal α_1 y α_2 y los módulos de Young E_1 y E_2. A la temperatura T_1 los extremos de la barra apenas tocan las paredes. Con qué fuerza presionará dicha barra sobre las paredes si se calienta hasta la temperatura T_2? Desprécciese la deformación de las paredes. Cuánto se desplazará la junta de las partes de la barra?

Rpta.: $F = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{E_1 + E_2} E_1 E_2 S (T_2 - T_1)$

$$\Delta L = \frac{L}{2}\,\frac{(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2)}{E_1 + E_2}(T_2 - T_1)$$

45 Una pesada barra de latón está provista de unos salientes es sus extremos, según se indica en la figura.
Dos hilos finos de acero sujetos entre los salientes se hallan justamente tensos (tensión nula) cuando el sistema se encuentra a $0°C$



¿Cuál es el esfuerzo de tensión de los alambres cuando se eleva la temperatura del sistema al $300°C$?

Háganse las hipótesis simplificadoras que se consideren justificadas anunciando cuales sean éstas.

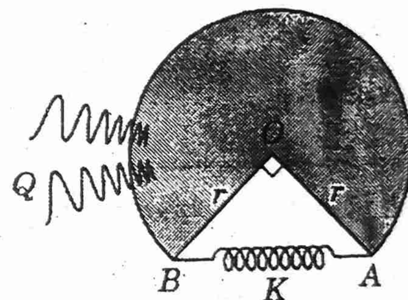
Coeficiente de dilatación: Del latón $\alpha = 20 \times 10^{-6}\,/°C$

Del acero $\alpha = 12 \times 10^{-6}\,/°C$

Módulo de elasticidad del acero $E = 2 \times 10^{6}$ kg/cm^2

Rpta.: $\sigma = 4800$ kg/cm^2

46 La placa mostrada tiene un coeficiente de dilatación lineal $\alpha = 78 \times 10^{-4} °C^{-1}$ y un radio de 1m, el resorte impermeable al calor tiene una constante de rigidez $K = 100\,N/m$ e inicialmente está sin deformar.



Si la calentamos uniformemente elevando en $100°C$ su temperatura; ¿qué energía potencial adquiere el resorte que está soldado a la placa en los puntos A y B?

Rpta.: $U = 256\,J$

47 Una resistencia eléctrica de 48 g. de masa calienta 6 kg de agua hasta su punto de ebullición en un tiempo de 3 minutos. Pero si la resistencia es conectada sin el agua se daña al cabo de 4 s. ¿Cuál es la temperatura de fusión del metal resistivo? El calor específico de la resistencia es 0,5 veces el calor específico del agua. Considere que la temperatura inicial en ambas situaciones es $10°C$.

Rpta.: $503°C$

48 Una cinta metálica de 1m de longitud está calibrada a $10°C$, pero es utilizada a $80°C$ en la medición del largo de un terreno; si la cinta indicó 200m, ¿cuál es la longitud real del terreno? $(\alpha_{cinta} = 4\times10^{-5}\,°C^{-1})$

Rpta.: $200{,}56m$

49 Un estudiante mide la longitud de una barra de latón con una cinta de acero a $20.0°C$. La medida es de 95.00 cm. ¿Cuál será la inclinación de la cinta para la longitud de la barra cuando ésta y la cinta estén a:

a) $-15.0°C$ y b) $55.0°C$

Rpta.: a) 94,97cm
b) 95,03cm

50 Un cubo de vidrio de 205g, sumergido en un líquido a $20°C$ experimenta una pérdida de peso de 1N: Al repetir el experimento con las mismas sustancias, pero con la temperatura del líquido de $70°C$ la pérdida aparente de peso es 0,997N. Calcule el coeficiente de la dilatación cúbica del líquido $(\alpha_{vidrio} = 9\times10^{-6}1/°K)$.

Rpta.: $0{,}87\times10^{-4}\times1/°K$

51 En qué tanto por mil aumentará el volumen de una esfera de plata al pasar de 15°C a 100°C? Si $\alpha_{Ag} = 1.97\times10^{-5}°C$.

Rpta.: 5.01 por mil

CAPÍTULO VII

CALOR, PROPIEDADES DE LOS GASES Y PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA



CALOR

Antes de definirlo, veamos las teorías al respecto, así tenemos:

1) Teoría del calórico

El calor es un fluido capaz de penetrar en los cuerpos y pasar de unos a otros. Este fluido es el calórico, caracterizado por ser imponderable (no tiene peso) y por estar formado por partículas que se repelen mutuamente y son atraídas por la materia uno de los teóricos fue José Black Wölf (1750).

2) Teoría cinética o energética

El conde Rumford (1718) fue el primero que refutó la teoría del calórico. considera al calor como una forma de la energía alojada en los cuerpos denominada energía térmica, que depende de los movimientos de sus menores porciones, los átomos y las moléculas.

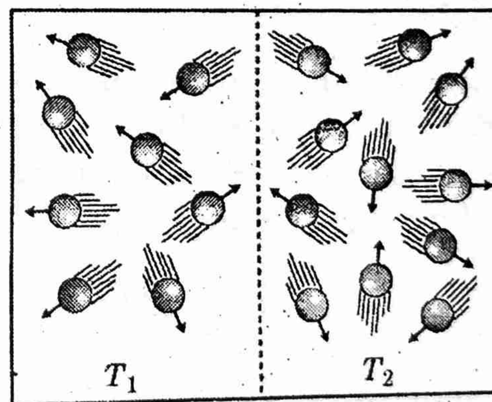


Fig. 61 *Celda con gas a diferente temperatura* $T_1 > T_2$

Consideremos una cámara llena de un gas que tiene una gradiente de temperatura en su volumen. En los lugares en que la temperatura es más alta, las moléculas tienen en promedio, velocidades mayores que en los lugares en que la temperatura es menor. Figura 61.

Debido a las colisiones moleculares en la separación de ambos y a la difusión de las moléculas calientes de izquierda a derecha y de las frías de derecha a izquierda hay una transferencia neta de energía de izquierda a derecha, que llamamos *calor*. Luego, el calor es una forma de energía en *tránsito*.

En los gases monoatómicos, la suma total de estas energías se debe al movimiento de traslación o de vaivén de las moléculas, en las moléculas más complejas se debe considerar las energías de rotación y de vibración.

Luego la definición de calor, es energía que se comunica entre un sistema y su medio ambiente como resultado únicamente de las diferencias de temperatura.

Joule, demostró experimentalmente que al convertir una cantidad dada de energía mecánica en calor, siempre se produce la misma cantidad de calor.

Helmholtz, expresó la idea de que no sólo el calor y la energía mecánica son equivalente si no todas las formas de energía lo son.

$$1 \text{ Cal} = 4.186 \text{ J} \qquad 1 \text{ BTU} = 778 \text{ lb-pie}$$

CANTIDAD DE CALOR

Si se eleva la temperatura de un Kg. de masa de agua de 14.5°C a 15.5°C calentándolo, decimos que se ha agregado al sistema una K-cal.

La relación de la cantidad de calor ΔQ aplicada a un cuerpo a su correspondiente elevación de temperatura ΔT se llama capacidad calorífica C del cuerpo.

$$C = \Delta Q/\Delta T$$

CALOR ESPECÍFICO

La capacidad calorífica de un cuerpo por unidad de masa, se llama calor específico, es característico de cada material de que está formado el cuerpo.

$$Ce = \frac{\Delta Q/\Delta T}{m}$$

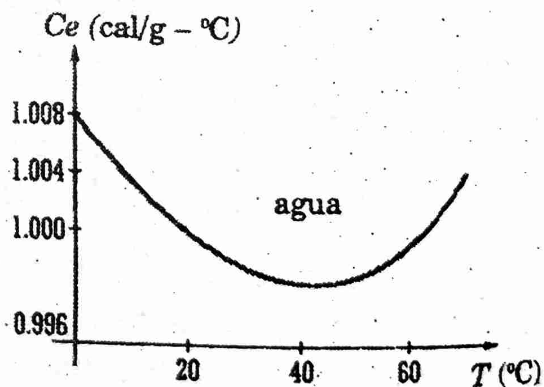


Fig. 62 *Calor específico del agua.*

En general, el Ce de un material a cualquier temperatura se define así:

$$Q = m\int_{t_0}^{t_f} Ce\, dT \quad ; \quad Ce = f(T)$$

Para nuestro curso se puede considerar que Ce es constante, en general no lo es, tal como se indica para el caso del agua. Figura 62.

Para gases, es más conveniente expresar el Ce tomando como unidad de masa el átomo-gramo y no el gramo.

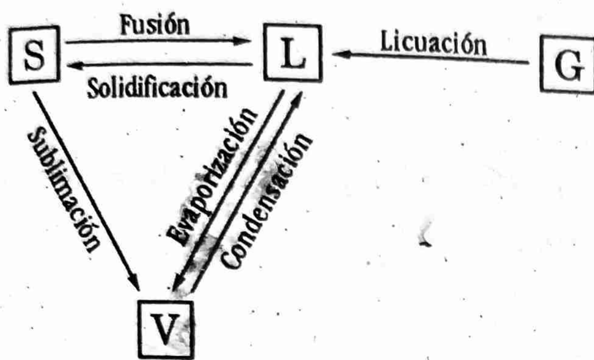


Fig. 63 *Cambios de estado*

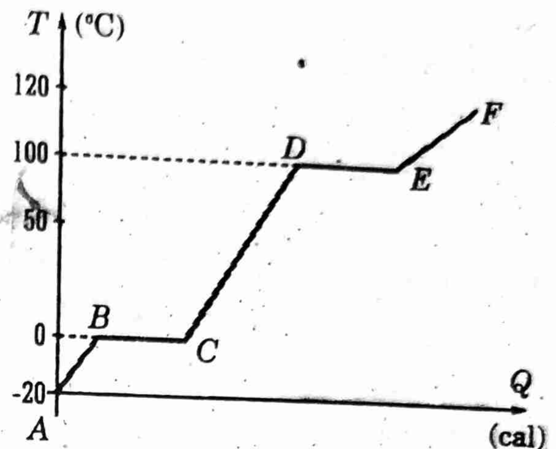


Fig. 64 *Puntos de transición*

Dulong y Petit, observaron en 1819 que los Ce de los metales expresado de este modo eran todos iguales aproximadamente a 6 cal/atg–C°.

La cantidad de calor se mide en calorímetros, los hay de agua y de flujo continuo.

CAMBIOS DE ESTADO

Van acompañados de absorción o desprendimiento del calor, Fig. 63. La Fig. 64 representa la temperatura con respecto al calor para una masa de hielo a $-20°C$, que se transforma a $120°C$.

Región AB

Indica un aumento constante de temperatura, cuando pasa de su temperatura igual a $-20°C$, hasta la temperatura de fusión. No existe variación de la energía potencial de los átomos. Se usan expresiones de este tipo:

$$Q = mCe_H \Delta T \quad , \quad Ce_H : \text{calor específico del hielo.}$$

Región BC

Todo el calor durante este intervalo sirve para debilitar la estructura cristalina del hielo y aumentar su energía potencial interna. Las moléculas del hielo adquieren mayor libertad, pero no varía su velocidad media.

La expresión que se usa es: $Q = mL_f \quad , \quad L_f$: calor latente de fusión

Calor latente de fusión

Es la cantidad de calor que debe comunicarse a la unidad de masa de un sólido a temperatura de fusión para transformarlo totalmente en líquido a la misma temperatura.

Región CD

El calor añadido se emplea para aumentar la componente cinética de la energía interna total del agua. Se usa la expresión: $Q = mCe_{agua}\Delta T$

Región DE

En el punto de ebullición, se detiene la temperatura a 100°C, el calor suministrado durante este intervalo se emplea para vencer las últimas trazas de cohesión molecular. Se usa:

$$Q = mL_v \quad , \quad L_v : \text{calor latente de vaporización}$$

Calor latente de vaporización

Es la cantidad de calor necesario para convertir completamente en vapor a la temperatura de ebullición del líquido.

La evaporización a diferencia de la ebullición tiene lugar a cualquier temperatura, la ebullición a una temperatura fija siempre que se mantenga constante la presión exterior.

PROPAGACIÓN DEL CALOR

Se da cuando hay una diferencia de temperatura

a. Conducción

Es la forma de propagación en los metales y se basa en la presencia de electrones libres, que hacen de conductores del flujo calorífico, excitando a los átomos en su trayecto. En esta propagación no se produce desplazamiento de materia considerada en conjunto.

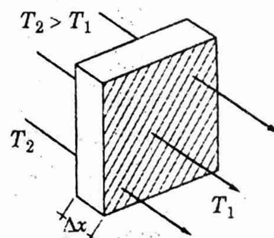


Fig. 65

El transporte de energía entre elementos de volúmenes próximos, en virtud de la diferencia de temperatura existente entre ellos se llama conducción *calorífica*.

Consideremos una superficie de sección A y espesor Δx, y las dos caras se hallan a una diferencia de temperatura $\Delta T = T_2 - T_1$.

Se sabe experimentalmente $\Delta Q \;\alpha\; A\Delta t$, donde Δt: variación del tiempo.

$\Delta Q \;\alpha\; \frac{\Delta T}{\Delta x}$, luego:

$\frac{\Delta Q}{dt} \;\alpha\; A\frac{\Delta T}{\Delta x}$, y en el límite:

$\frac{dQ}{dt} = -KA\frac{dT}{dx}$, donde: dT/dx : gradiente de temperatura.

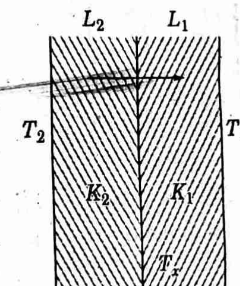
K : conductividad térmica.

El signo menos es debido a que si la temperatura aumenta de izquierda a derecha, la dirección de la corriente calorífica es de derecha a izquierda.

No existe ninguna sustancia que sea conductor perfecto $(K = \infty)$ o aislador perfecto $(K = 0)$.

Conducción de calor entre dos capas paralelas

Se pide hallar $\Delta Q/\Delta t$



Para la primera placa L_1:

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = -K_1 A \frac{T_1 - T_x}{L_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Para la segunda placa L_2:

$$\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = -K_2 A \frac{T_x - T_2}{L_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Para un régimen estable: $\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$

$-K_1 A\frac{T_1 - T_x}{L_1} = -K_2 A\frac{T_x - T_2}{L_2}$, hallamos Tx y reemplazamos en (1) o (2)

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{A(T_2 - T_1)}{(l_1/K_1) + (L_2/K_2)}$$

Flujo calorífico radial entre dos cilindros coaxiales:

Consideremos el flujo de esta cantidad de calor a través de una capa cilíndrica de material limitada por los cilindros de radios r y $r+dr$.

Sea T la temperatura para el radio r y $T+dT$ la temperatura para el radio $r+dr$, el área de la capa $2\pi r L$.

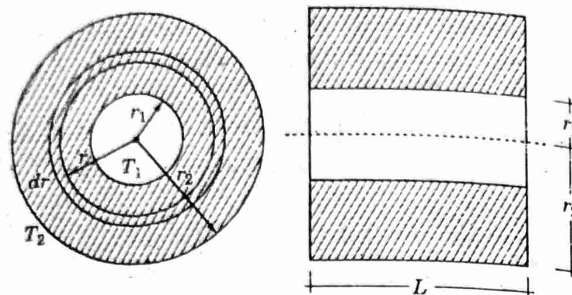


Fig. 67 *Condición entre cilindros*

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -K(2\pi r L)\frac{dT}{dr} \ , \quad \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{Q}{2\pi r LK}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = 2\pi LK\frac{T_1 - T_2}{\text{Ln}(r_2/r_1)}$$

Flujo calorífico radial entre dos esferas concéntricas

En este caso el área a ser usada es:

$$A = 4\pi r^2$$

$$\dot{Q} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -K(4\pi r^2)\frac{dT}{dr}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\dot{Q}}{4\pi K}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = 4\pi r_1 r_2 K\frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1}$$

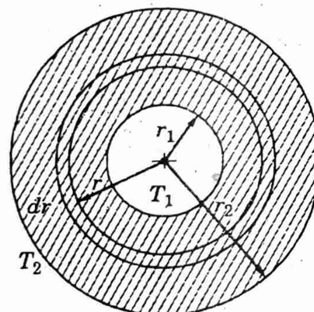


Fig. 68

b. Convección

Cuando el calor se propaga de un lugar a otro por un movimiento real de la sustancia caliente. Si la sustancia caliente es obligada a moverse por un ventilador o bomba se llama *convección forzada*, y si se mueve a causa de diferencias de densidad se llama *convección natural o libre*.

Consideremos un fluido en contacto con una pared plana o curva cuya temperatura es superior a la de la masa principal del fluido. La pared transfiere calor al fluido por un fenómeno que a la vez conducción a través de la capa estática delgada junto a la pared y convección del fluido.

$$\Delta Q/\Delta t = hA\Delta T$$

El coeficiente de convección h depende de los factores:

a. De que la pared sea plana o curva
b. De que sea horizontal o vertical
c. De que el fluido sea gas o líquido
d. De la ρ η Ce, K del líquido
e. Régimen laminar o turbulento
f. Si hay evaporización, condensación o formación de una película.

3) Radiación

Es la emisión continua de energía desde la superficie de todos los cuerpos. Esta energía se llama energía radiante y se encuentra en forma de ondas electromagnéticas que se propagan a la velocidad c y se transmiten a través del vacío lo mismo que a través del aire.

La Ley de Stefan-Boltzmann establece que la radiación total de todas las longitudes de onda, procedente de un radiador perfecto o cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta.

Si la densidad superficial de potencia del cuerpo negro, es decir, el número de watts por metro cuadrado, en el sistema *MKS*, es E:

$E = \sigma T^4$, donde:

$\sigma = 5.67\times10^{-8}\ w/m^2 - {}^\circ K^4$

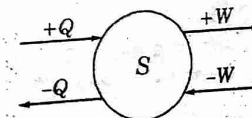
└ Cte. de Boltzmann

DIFERENCIA ENTRE CALOR Y TRABAJO

El trabajo como calor requiere una transmisión de energía. Se define el trabajo como energía que se transmite de un sistema a otro de tal manera que no interviene directamente una diferencia de temperaturas.

Las cantidades Q y W no son características del estado (equilibrio) del sistema sino, más bien del proceso termodinámico.

Entonces Q es el calor trasmitido al sistema o extraído de él, y W el trabajo efectuado sobre el sistema o producido por él.



Trabajos originados por cambios de volumen

Tomemos un gas dentro de un recipiente cilíndrico, que tiene un émbolo móvil y el gas es el sistema, fig. 69.

El sistema, inicialmente se encuentra en el estado (p_i, V_i) y como el calor es absorbido por la base del cilindro y pasa a otro estado (p_f, V_f), entonces el pistón se desplaza una distancia infinitesimal dS y el trabajo efectuado por el gas es:

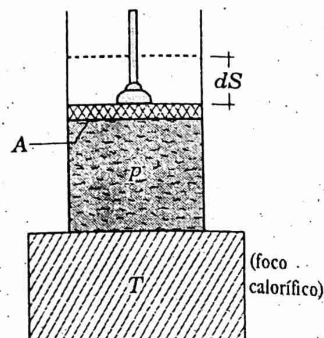


Fig. 69 *Gas en un cilindro.*

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{S} = pA\,dS = p\,dV$$

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV$$

El trabajo efectuado por un sistema depende no solamente de los estados inicial y final sino también de los estados intermedios; esto es, del recorrido que siga el proceso, figura 70.

Se llega a un resultado semejante, si se halla el flujo de calor durante el proceso. El calor que ingresa al sistema, depende de cómo se calienta el gas y se concluye: El calor perdido o ganado por un sistema depende no solamente de los estados inicial y final sino también de los estados intermedios; esto es, de la trayectoria del proceso, figura 71.

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

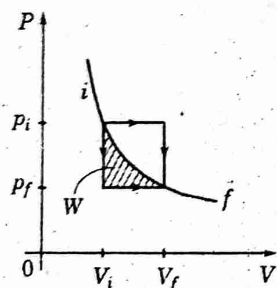


Fig. 70 *Trabajo efectuado por el gas*

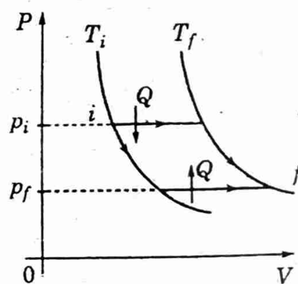


Fig. 71

Si un sistema está en un estado de equilibrio inicial, i, pasa a un estado de equilibrio final f y siendo Q el calor absorbido por el sistema y W el trabajo desarrollado por el mismo.

Sabemos que Q y W cuando pasan del estado i al f, sus valores dependen de la trayectoria seguida. Sin embargo, la diferencia $Q - W$ para este mismo intervalo de i a f es el mismo. Es decir, no depende de la trayectoria, sino de los estados inicial y final de equilibrio.

Luego, sostenemos en termodinámica (a diferencia que en mecánica, la existencia de una función energía potencial), de que hay una función, cuyo cambio es igual a $Q - W$, y se llama *Función de Energía Interna:* $\Delta U = U_f - U_i = Q - W$, y es el enunciado de la Primera Ley de la Termodinámica, el cual encierra ciertas características:

a. La existencia de una función energía interna del sistema.
b. El principio de la conservación de la energía.
c. La definición de calor como energía en movimiento.
d. Todas las magnitudes han de expresarse en las mismas unidades.
e. Q es positivo cuando el sistema recibe calor.
f. W es positivo cuando el sistema realiza trabajo.

Esta ley sólo dice que la energía se conserva en un proceso, pero no dice si un proceso puede ocurrir realmente, para ello es necesario la segunda Ley de la Termodinámica.

TRANSFORMACIÓN ISOBÁRICA

Sea un cilindro que contiene un líquido el cual absorbe calor por la parte inferior (foco) y el émbolo se desplaza a presión constante (isobárica), hallemos ΔU, como la masa m del líquido, se transforma de líquido en vapor, entonces la cantidad de calor absorbida por la masa m en el cambio de estado es $Q = mL_v$, donde L_v: calor de vaporización. Figura 72.

El sistema al dilatarse de un volumen líquido V_L a un volumen de vapor V_V, a presión constante (la cantidad de arena sobre el émbolo no varía), nos permite hallar el trabajo realizado por el sistema:

$$W = \int_{V_L}^{V_V} p\,dV = p(V_V - V_L)$$

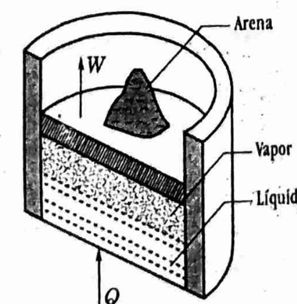


Fig. 72

Luego, el trabajo interno efectuado para vencer la fuerte atracción de las moléculas del líquido entre si en el estado líquido es: $\Delta U = mL_V - p(V_V - V_L)$.

TRANSFORMACIÓN ADIABÁTICA

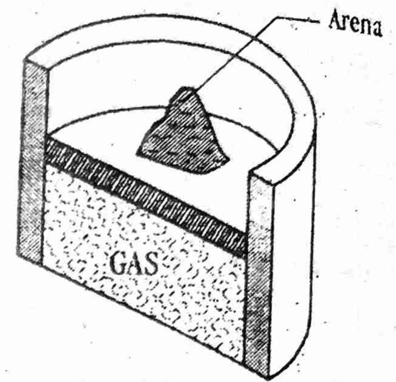


Fig. 73

Se llama así, cuando no sale, ni ingresa calor a un sistema, es decir $Q = 0$

Luego, $\Delta U = Q - W = -W$, esto significa que el trabajo efectuado sobre el sistema es igual al incremento de la energía interna del mismo, generalmente produce un aumento de temperatura, Figura 73.

DILATACIÓN LIBRE O EXPANSIÓN EN EL VACÍO

En este caso, es un proceso adiabático y en el cual no se hace trabajo externo, es decir $Q = 0$, $W = 0$. Luego: $\Delta U = 0$ y de allí $U_f = U_i$

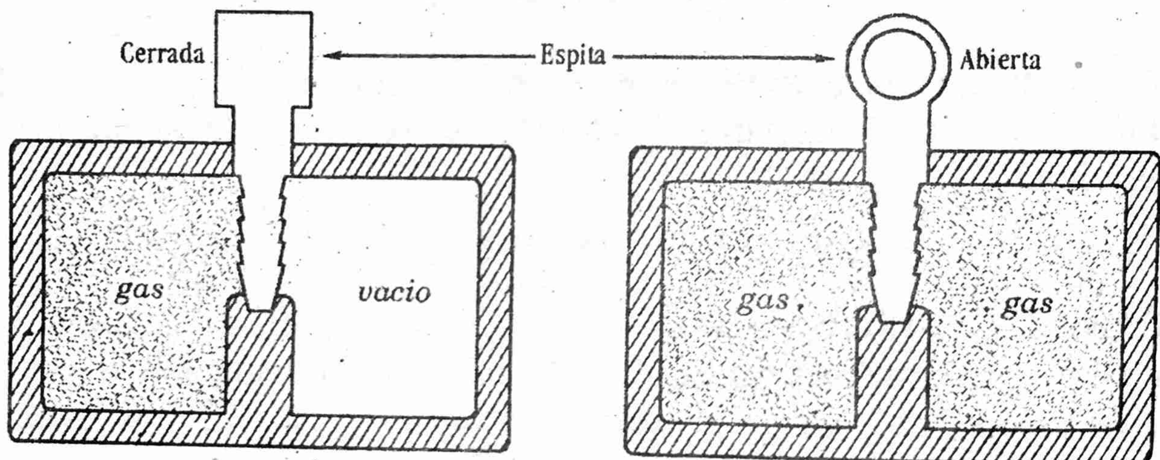


Fig. 74

TRANSFORMACIÓN ISÓCORA

En este caso el gas encerrado en el cilindro absorbe calor y para evitar que el émbolo se desplace, depositamos arena, de esta forma el volumen permanece constante:

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV = 0 \quad , \quad \Delta U = Q$$

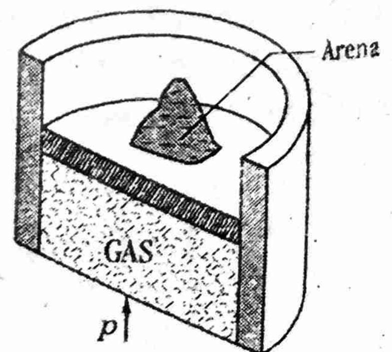


Fig. 75

Luego, todo el calor absorbido por el sistema sirve para aumentar su energía interna, es decir se eleva la temperatura del gas. Fig. 75

TEORÍA CINÉTICA DE LOS GASES

Gas ideal

Se define un gas, bajo ciertas suposiciones:

a. Un gas está formado de partículas llamadas moléculas y estos a su vez de átomos.
b. Todos los átomos son idénticos.
c. Las moléculas se mueven en todas las direcciones y diferentes velocidades.
d. El número total de moléculas es grande.
e. El volumen de las moléculas es muy pequeño en comparación del volumen ocupado por el gas.
f. La fuerza entre las moléculas son de origen eléctrico.
g. Los choques son elásticos y de duración insignificante.

Ley de Boyle-Mariotte

Si se mantiene constante la temperatura de una masa determinada de gas, entonces:

pV = constante (proceso isotérmico). Figura 76.

También se usa: $\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$

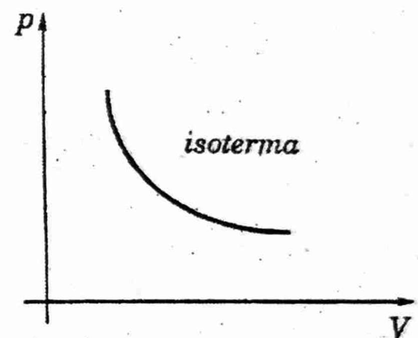


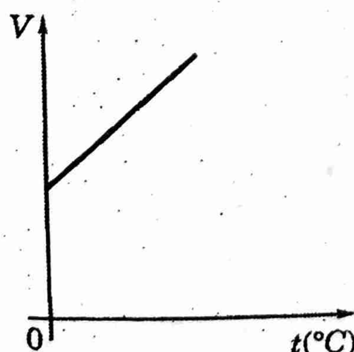
Fig. 76

Ley de Gay-Lussac

Gay-Lussac, midió el coeficiente de dilatación β_0 de un cierto número de gases distintos a presión constante (proceso isobárico). Figura 77.

$$V = V_0[1+\beta_0 t] = V_0\,\beta_0\left[t+\frac{1}{\beta_0}\right] = V_0\beta_0[t+273] = V_0\,\beta_0 T$$

Para dos estados: $V_1/V_2 = T_1/T_2$



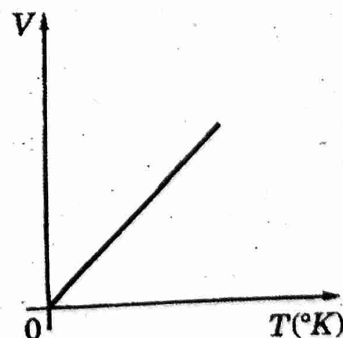


Fig. 77

ECUACIÓN DE ESTADO DE UN GAS PERFECTO (IDEAL)

Combinando las ecuaciones de la Ley de Bayle y Gay Lussac, obtenemos lo siguiente (Figura 78).

El estado (1), el gas está a la presión $P_0 = 1\,atm$ y temperatura $t_0 = 0°C$

Cuando el gas pasa del estado (1) al estado (3) es mediante un proceso isobárico (presión constante) y obtenemos:

$V_3 = V_0\,\beta_0\,T$ .... (i)

Cuando el gas pasa del estado (3) al (2), se tiene un proceso isotérmico:

$p_0 V_3 = pV$ .... (ii)

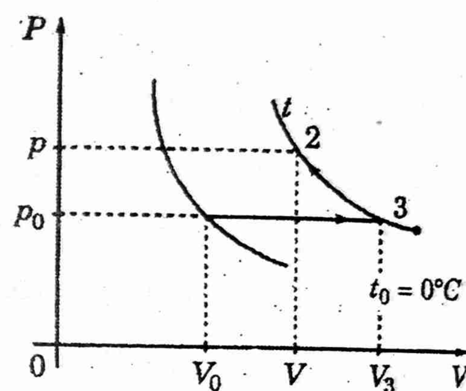


Fig. 78

De (i) y (ii):

$p_0\beta_0 T = pV$, $p_0 V_0 \beta_0 = p\,V/T$ .... (iii)

La cantidad $p_0 V_0 \beta_0$, depende del sistema de unidades que se escoja. En condiciones normales, una molécula-gramo de cualquier gas ocupa un volumen de 22.415 lt, luego si la masa del gas contiene n (moles), su volumen será:

$$V_0 = n22.4\,lt \;;\; p_0 = 1atm = 1.013\times 10^{\circ}\,dinas/cm^2 \;;\; \beta_0 = 0.00366\,°K^{-1}$$

Reemplazando valores en la expresión (iii):

$$p_0 V_0\,\beta_0 = (1.013\times 10^6)(n\times 22.415)(0.00366) = n\times 0.08207\,lt - atm/°K$$

Usando R, se tiene: $p_0 V_0 \beta_0 = nR$, donde R es la constante universal de los gases perfectos.

Luego $pV = nRT$, donde: R : $8.31\times 10^7\,erg/mol - °K$

R : 8.31 Joules/mol - °K

R : 0.08207 lt - atm/mol - °K

R : 1.986 $cal/mol - °K$

1 cal = 4.186 Joules

Ley de Dalton

Sea una mezcla homogénea de gases perfectos inertes a temperatura T, presión P y volumen V. Figura 79.

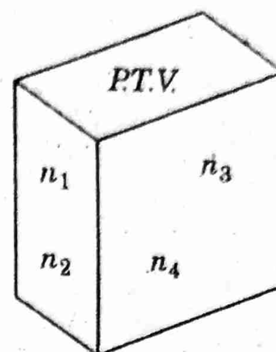


Fig. 79

Supongamos que hay n_1 moles del gas A_1, n_2 moles del gas $A_2, \ldots$, hasta n_c moles del gas A_c.

Como no hay reacción química, la mezcla se halla en equilibrio y la ecuación de estado es:

$$PV = (n_1 + n_2 + \ldots + n_c)\,RT = n_1RT + n_2RT + \ldots + n_cRT$$

$$P = \frac{n_1RT}{V} + \frac{n_2RT}{V} + \frac{n_3RT}{V} + \ldots + \frac{n_cRT}{V}$$

Se observa que $(n_k\, RT/V)$ es la presión ejercida por el gas K si ocupase él solo el volumen V, se denomina presión parcial del gas K, se representa por p_k, es decir:

$$p_1 = \frac{n_1RT}{V} \;,\; p_2 = \frac{n_2RT}{V} \;,\; \ldots \;,\; p_c = \frac{n_cRT}{V}$$

Reemplazando: $P = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_c$

Este enunciado dice, que la presión total de una mezcla de gases perfectos es igual a la suma de las presiones parciales y constituye la Ley de Dalton.

Calores específicos de un gas ideal

Sabemos que el calor específico de una sustancia es la cantidad de calor que requiere la unidad de masa (mol) para cambiar la temperatura en una unidad.

Hay dos clases de capacidades caloríficas molar, a volumen constante C_v y a presión constante C_p, Figura 80.

El estado del sistema se halla en el punto (a) (p, V) de la figura 81, que pertenece a la isoterma a una temperatura T.

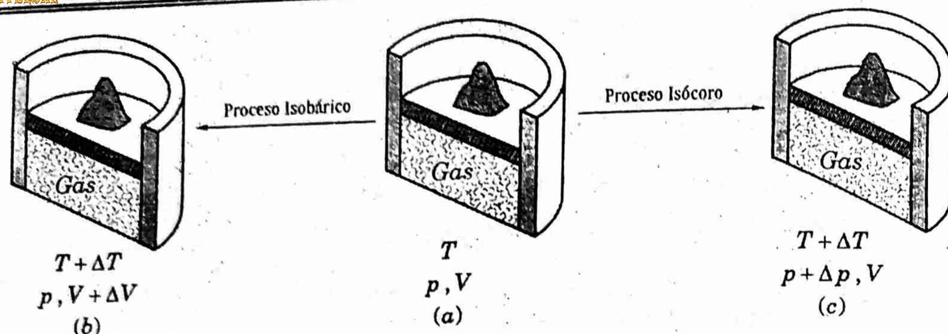


Fig. 80 *Procesos isobáricos e isócoro para un gas encerrado*

Al elevar la temperatura del sistema en una cantidad ΔT, aumentando lentamente la temperatura del gas, este pasa a otro estado, como deseamos que el volumen no varíe, entonces agregamos arena al émbolo y conseguimos un proceso isócoro $(a \to c)$. Figura 81.

Las ecuaciones que se usan en este caso son:

$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$. Como $\Delta v = 0 \to \Delta W = 0$

y $\Delta Q = nC_v\Delta T \;\to\; \Delta U = \Delta Q = nC_v\Delta T$ (I)

Ahora calentamos el gas y al elevar su temperatura ΔT, pero la cantidad de arena no la variamos, esto es para conseguir que la presión p no varíe, este proceso se llama isobárico $(a \to b)$. Figura 81.

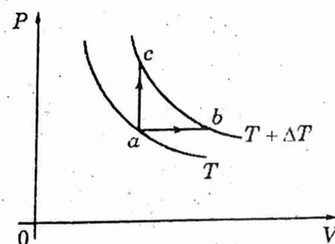


Fig. 81 *iagrama de un proceso isobárico e isócoro.*

Se tiene: $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$, $\Delta Q = nC_p\Delta T$ y

$\Delta W = p\Delta V$

Como los procesos $(a \to b)$ y $(a \to c)$ se refieren al mismo cambio de temperatura ΔT y le corresponde el mismo cambio ΔU de energía interna, luego:

$\Delta U = nC_v\Delta T$ y $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$, reemplazando sus equivalente:

$nC_p\Delta T = nC_v\Delta T + p\Delta V$

Como se trata de un gas ideal: $p\Delta V = nR\Delta T$

$$nC_p\Delta T = nC_v\Delta T + nR\Delta T \;,\; C_p = C_v + R$$

También se define $C_p/C_v = \gamma$, para todos los gases ideales.

TABLA Nº 1 - CAPACIDADES CALORÍFICAS MOLARES A BAJA PRESIÓN

Tipo de gas	Gas	Cp Cal/mol -°K	Cv Cal/mol -°K	C_p/C_v
Monoatómico	He	4.97	2.98	1.67
	Ar	4.97	2.98	1.67
Diatómico	H_2	6.87	4.88	1.41
	O_2	7.03	5.03	1.40
	N_2	6.95	4.96	1.40
	Cl_2	8.29	6.15	1.35
	CO	6.29	4.98	1.40
Poliatómico	CO_2	8.83	6.80	1.30
	SO_2	9.65	7.50	1.29
	C_2H_6	12.35	10.30	1.20
	NH_3	8.80	6.65	1.31
	H_2S	8.37	6.20	1.34

Siempre C_p es mayor que C_v, porque C_v está relacionado con la variación de la energía interna. En cambio C_p incluye además el trabajo de expansión del gas. Los valores de las capacidades caloríficas se dan en la tabla 1.

Nota:

Se usará la siguiente equivalencia, para pasar de $(atm\text{-}lt)$ a (cal):

$$x(atm - lt) \times 24.2(cal/at - lt) = 1\,cal$$

PROBLEMAS RESUELTOS

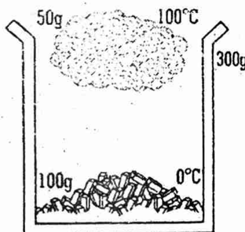
(01) El calor específico de determinada sustancia depende de la temperatura; $C(T) = a + bT$, donde a y b son constantes. Si la temperatura aumenta de T_1 a T_2, demuestre que el calor requerido por unidad de masa está dado por: $\Delta Q/m = (T_2 - T_1)\left[a + \frac{b}{2}(T_2 + T_1)\right]$

Solución:

Sabemos por teoría: $\Delta Q = \int_{T_1}^{T_2} mC_e dT = \int_{T_1}^{T_2} m(a + bT)dT$

$$\frac{\Delta Q}{m} = a\int_{T_1}^{T_2} dT + b\int_{T_1}^{T_2} TdT = (T_2 - T_1)\left[a + \frac{b}{2}(T_2 + T_1)\right]$$

(02) Un calorímetro de cobre de 300 g contiene 100 g de hielo. El sistema está inicialmente a 0°C. si se introducen al calorímetro 50 g de vapor a 100°C (a 1 atm de presión). Halle la temperatura final del contenido.



Solución:

Hallemos el calor absorbido por:

El hielo se funde y para ello necesita la cantidad de calor siguiente:

$$100\,g \times 80\,cal/g = 8000\,cal$$

El agua eleva su temperatura hasta T_x y la cantidad de calor necesaria es:

$$100 \times 1 \times (T_x - 0)\,cal$$

El calorímetro eleva su temperatura hasta T_x y el calor absorbido es:

$$300 \times 0.093 \times (T_x - 0)$$

Calor absorbido: $8000 + 100(T_x - 0) + 300 \times 0.093\,(T_x - 0)$ .... (α)

El calor cedido por el vapor se determina, así:

$50\,g \times 540\,cal/g + 50 \times 1 \times (100 - T_x)$ .... (β)

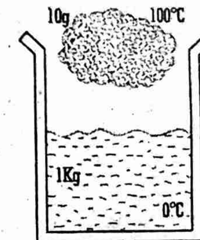
Entonces el calor absorbido (α) es igual al calor cedido (β):

$$8000 + 100\,T_x + 27.9\,T_x = 27{,}000 + 5000 - 50T_x$$

De donde: $T_x = 134°C$

Esto quiere decir que en el sistema de cobre y hielo se introduce más vapor que el necesario para elevar la temperatura del cobre y del agua a 100°C, luego la temperatura final de la mezcla es de $T_f = 100°C$ y parte del vapor se queda sin condensar.

(03) Suponga que se obliga a que se condensen 10 g a 100°C en un Kg de agua originalmente a 0°C. Hallar la temperatura final del agua, suponiendo que el calor de vaporización del agua sea de 540 cal/g.



Solución:

Hallemos el calor ganado por el agua:

$Q_g = mCe_{agua}\Delta T = 1000 \times 1 \times (T_x - 0) = 1000\,T_x$

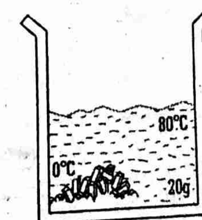
El calor perdido por el vapor:

$Q_p = ml_v + mCe_{agua}\Delta T = 10 \times 540 + 10 \times 1 \times (100 - T_x)$

Luego: $Q_g = Q_p$, $1000\,T_x = 5400 + 10(100 - T_x)$

$T_x = 6.3°C$.

(04) Un cubo de hielo de 5g a 0°C se deja caer en 20 g de agua a una temperatura original de 80°C. Hallar la temperatura final del agua.



Solución:

Hallemos el calor ganado por el hielo: Q_g

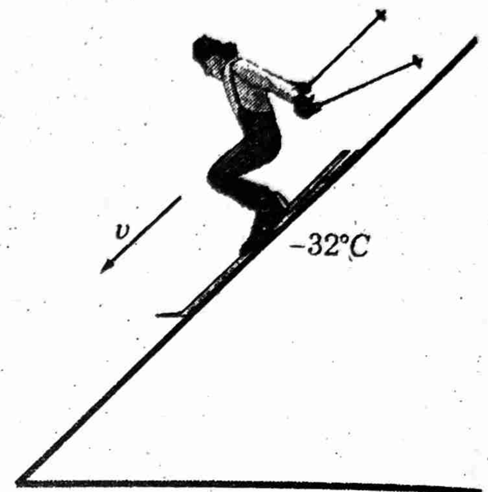
$Q_g = ml_f + mCe_{agua}\Delta T = 5 \times 80 + 5 \times 1 \times (T_x - 0)$

El calor perdido por el agua: $Q_p = mCe_{agua}\Delta T = 20 \times 1 \times (80 - T_x)$

Luego $Q_g = Q_p$, $400 + 5\,T_x = 20(80 - T_x)$

$T_x = 48°C$

05 Suponiendo que el calor de fusión de la nieve es de 340 J/g, un esquiador que pesa 90Kg (o sea su masa tiene este valor), desciende por una pista de −32°C a 16 m/seg. Determine cuántos gramos de nieve se funden bajo sus esquíes por segundo, si toda la energía disponible se emplea en fundir la nieve.



Solución:

Hallemos el calor ganado por el hielo: Q_g

$$\dot{Q}_g = Q_g/t \ , \ \dot{m} = m/t$$

$$\dot{Q}_g = \dot{m}L_f + \dot{m}Ce_{hi}(0 - t°C)$$

$$\dot{Q}_g = \dot{m}\,81.2 + \dot{m} \times 0.5 \times (0 - 32°C) = 97.2\dot{m}(cal)$$

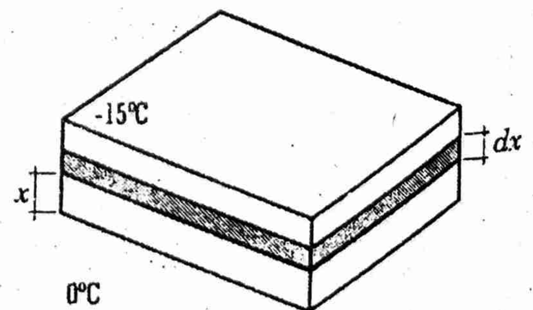
donde $L_f = 340$ Joules$/g = 81.2\ cal/g$ y m: masa de hielo que se funde.

El esquiador al bajar, toda su energía cinética se convierte en calor que funde el hielo: $E_c = \frac{1}{2}\dot{m}_H v^2 = \frac{\dot{m}_H v^2}{2 \times 4.187}(cal)$, $\dot{m}_H = m_H/t$.

Luego por conservación de energía: $97.2m = \frac{m_H v^2}{2 \times 4.187}$, $t = 1\ seg$

donde $m_H = 90\ Kg$, $v = 16\ m/seg$. Entonces: $m = 28.3$ g

06 La densidad del hielo es $0.92\ g/cm^3$ y su conductividad térmica 0.0022 cal/cm-seg. -°C. Su calor de fusión vale 79.7 cal/g. Un lago tiene una capa superficial de hielo de x cm. de espesor cuando la temperatura del aire es de (−15°C). Demuestre que la rapidez de aumento de esta capa, en cm/seg, está dada por: $dx/dt = 0.0022 \times 15/79.7 \times 0.92\,x$ y evalúe esta rapidez cuando $x = 10\ cm$. Si $t = 0$, $x = 0$. ¿cuánto tiempo tarda el espesor en llegar a 10 cm?.



Solución:

La cantidad de calor que se necesita para solidificar es: $Q = m\,L_f$

Esta cantidad de calor se consigue por conductividad: $\frac{Q}{\Delta t} = -KA\,\frac{(-15-0)}{\Delta x}$

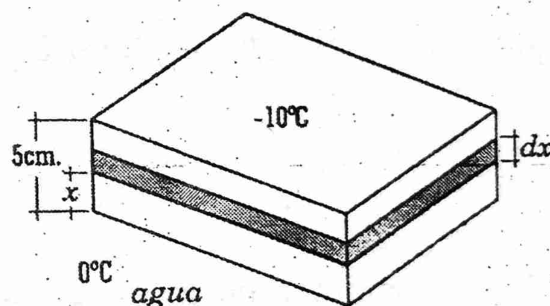
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{KA15}{Q} = \frac{KA15}{mL_f} = \frac{KA15}{\rho_{hi}AxL_f} = \frac{K15}{L_f\rho_{hi}x}$$

En el límite: $\frac{dx}{dt} = \frac{0.0022\times 15}{79.7\times 0.92x}$ .... (α)

$$x\,dx = \frac{0.0022\times 15}{79.7\times 0.92}dt \quad , \quad \int_{x=0}^{x=10} x\,dx = 4.5\times 10^{-4}\int_{t=0}^{t} dt$$

Integrando, se obtiene: $t = 11.1\times 10^4\,seg = 30.8\,h$

17. Se coloca un recipiente con agua a 0°C al aire libre cuando la temperatura ambiente es de −10°C. Si el área del recipiente es de 500 cm^2 y el agua tiene 5 cm. de profundidad. ¿Cuánto tiempo necesita el agua para congelarse totalmente?. Desprecie los efectos debidos a la capacidad térmica de la vasija.



Solución:

Usando la expresión (α) del problema anterior, con el cambio de −10°C por -15°C, así:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{0.0022\times 10}{79.7\times 0.92x} = \frac{3\times 10^{-4}}{x}$$

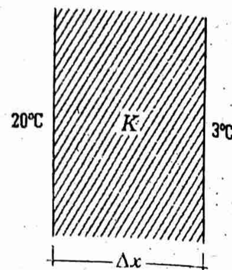
$$xdx = 3\times 10^{-4}\,dt \quad , \quad \int_o^5 x\,dx = 3\times 10^{-4}\int_o^t dt$$

Integrando, se obtiene: $t = 41.67\times 10^3\,seg = 11.6\,h$

(08) La conductividad térmica del aire es:

$$K_a = 6\times10^{-6}\ Kcal/s\text{–}m\text{–}°C.$$

Una ventana de $2m^2$ de área y 0.006 m de espesor, conduce calor desde el interior hacia el exterior de una casa. Si la temperatura interna es de 20°C y la temperatura externa de 3°C, halle la pérdida de calor en un lapso de 24 h. Si el precio del combustible es de $ 0.015 dólares por 6500 BTU, evalúe el costo de la calefacción por día, considerando sólo las pérdidas a través de esta ventana.



Solución:

El calor que se elimina por la ventana es por conductividad térmica y se usa:

$$\dot{Q} = -KA\frac{\Delta T}{\Delta x'} \quad , \quad Q = -tKA\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

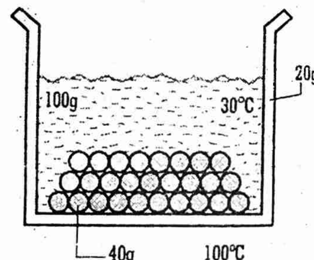
$$Q = -24\times3600\times2\times10^{-1}\times2\times\frac{3-20}{0.006} = 9.8\times10^{7}\,cal$$

Sabemos que: $1\,BTU = 252\,cal$, y $6500\times252\,cal$ —— $0.015

$9.8\times10^{7}\,cal$ —— x

$x = 0.89\$$

(09) Un calorímetro de cobre de 20 g contiene 100 g de agua a 30°C. En él se vierten 40 g de canicas de vidrio, las cuales habían sido calentadas a 100°C. Si la temperatura final de la mezcla es de 34°C. ¿Cuál será el calor específico del vidrio?



Solución:

El sistema de calorímetro y el agua aumentan de temperatura, porque absorbe calor: Q_g.

$$Q_g = Q_{Cu} + Q_{agua} = m_{Cu}Ce_{Cu}\Delta T + m_{agua}Ce_{agua}\Delta T$$

$$Q_g = 20\times0.093\times(34-30) + 100\times1\times(34-30) = 407.44\ cal$$

Las canicas de vidrio ceden calor: Q_p

$$Q_p = m_v Ce_v \Delta T = 40\times Ce_v(100-34) = 2640\,Ce_v$$

Por conservación de energía: $Q_g = Q_p$ $\quad 407.44 = 2640\,Ce_v$

Luego: $Ce_v = 0.154\ cal/g-°C$

(10) Una hoja de asbesto de $0.20m$ de espesor se usa como separador entre dos placas de bronce, una a 100°C y la otra a 20°C. ¿Cuánto calor fluye a través de un área de $1\,m^2$ de una placa a la otra en 1 hora?



Solución:

Por la ecuación de conductividad: $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -KA\frac{\Delta T}{\Delta x}$,

Donde: $\Delta x = 0.20\ m$, $A = 1\,m^2$, $K = 5\times10^{-4}\ cal/seg-°C-cm$

$\Delta T = 20-100 = -80$ y $\Delta t = 1h = 3600\ seg$

$$\Delta Q = -KA\,\Delta t\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Reemplazando valores, se obtiene: $\Delta Q = 7.2\times10^{6}\,cal$

(11) Se dispara una bala de plomo de 25 g de masa, a 350 m/s hacia un bloque de madera, donde queda en reposo. Si el calor específico del plomo es de 0.031 cal/g-°C. Hallar el aumento en la temperatura de bala, suponiendo que toda la energía se utiliza para calentarla.

Solución:

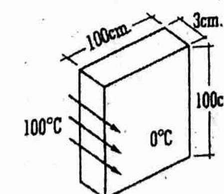
En este caso, la energía cinética : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

se convierte en energía calorífica : $Q = m\,Ce\,\Delta T\times4.187$

Se usó: $m\,Ce\,\Delta T\times4.187 = \frac{1}{2}mv^2$; donde: $m = 25\ g$, $Ce = 0.031\ cal/g-°C$, $v = 350\ m/s$.

Reemplazando en la última expresión se obtiene: $\Delta T = 472°C$.

(12) Una placa de cobre mide 100 cm por 100 cm por 3 cm. Uno de sus lados se mantiene a 0°C , en tanto que el otro se mantiene a 100°C. Si la conductividad térmica media es:



$$K_{Cu} = 0.92\ cal/seg - cm - °C$$

¿Cuánto calor fluye a través de la placa en condiciones de estado estable durante un lapso de 15 min.?

Solución:

Por teoría: $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -KA\frac{\Delta T}{\Delta x}$, reemplazando valores

$$K = 0.92\ cal/seg - cm - °C\ ,\ A = 100 \times 100\ cm^2$$

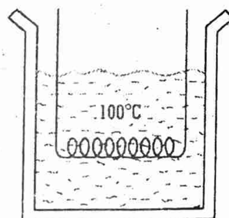
$$\Delta T = 0 - 100°C = -100°C\ ,\ \Delta x = 3\,cm$$

$$\Delta t = 15 \times 60\,seg$$

Luego: $\Delta Q = -KA\,\Delta t\,\frac{\Delta T}{\Delta x} = 2.76 \times 10^8\,cal$

$$\Delta Q = 2.76 \times 10^8\,cal$$

(13) Un profesor tiene un calentador eléctrico de inmersión de $350w$ y desea emplearlo para preparar una jarra de té, para lo cual debe hacer hervir $500g$ de agua inicialmente a la temperatura de $18°C$. Halle el tiempo que necesita para lograr eso.



Solución:

La potencia es: $P = 350\ w = 350$ Joules/seg $= \frac{350}{4.186}$ cal/seg

Hallemos la cantidad de calor necesario para elevar la temperatura del agua:

$$m\,Ce\,\Delta T = 500 \times 1 \times (100 - 18)$$

$$Q = 41{,}000\,cal$$

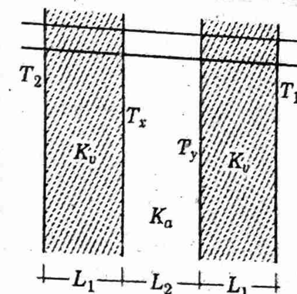
Luego en 1 seg se consume $(350/4.186)$ cal, el tiempo necesario para consumir 41,000 cal será:

$$t = 41{,}000/(350/4.186)\ seg. = 482.6\ seg. = 8.04\ min.$$

$$t = 8.04\ min.$$

(14) Una ventana contra tormentas como la figura, consiste en una capa de aire intercalada entre dos placas de vidrio. Si las conductividades térmicas del vidrio y del aire son, respectivamente, K_v y K_a, demuestre que la conductividad térmica del sistema está dada por:

$$K = (2L_1 + L_2)\Big/\left(2\frac{L_1}{K_v} + \frac{L_2}{K_a}\right)$$



Solución:

Sea T_x y T_y las temperaturas en las caras internas de las placas de vidrio, que se deben hallar.

Para la placa de vidrio de la izquierda, el flujo calorífico es:

$$Q_1 = -K_v A\frac{(T_x - T_2)}{L_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

Para la capa de aire, el flujo calorífico es: $Q_2 = -K_a A\frac{(T_y - T_x)}{L_2}$ .... (β)

Para la placa de vidrio de la derecha, el flujo es: $Q_3 = -K_v A\frac{(T_1 - T_y)}{L_1}$ ...... (γ)

Como el flujo calorífico es el mismo, ya que no hay fuentes, ni sumideros en los alrededores del sistema, entonces comparando (α) y (β):

$$-K_v A\frac{(T_x - T_2)}{L_1} = -K_a A\frac{(T_y - T_x)}{L_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

(β) y (γ):

$$-K_a A\frac{(T_y - T_x)}{L_2} = -K_v A\frac{(T_1 - T_y)}{L_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

De (1) y (2) se obtiene:

$$T_x = \frac{K_v L_2 T_2[(K_v L_2 + K_a L_1)T_2 + K_a L_1 T_1]}{(K_v L_2 + K_a L_1)^2 - (K_a L_1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$T_y = \frac{K_v L_2 T_2[(K_v L_2 + K_a L_1)T_1 + K_a L_1 T_2]}{(K_v L_2 + K_a L_1)^2 - (K_a L_1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

También podemos definir: $\dot{Q} = -KA\frac{(T_1 - T_2)}{(L_1 + L_2 + L_1)}$, que es igual a:

$\dot{Q} = \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2$ por las mismas razones enunciadas anteriormente despejando:

$$K = -\frac{(2L_1 + L_2)}{A(T_1 - T_2)}\dot{Q}_1 = -\frac{(2L_1 + L_2)}{A(T_1 - T_2)}\left[-K_v A\frac{(T_x - T_2)}{L_1}\right]$$

Reemplazando el valor de T_x:

$$K = \frac{(2L_1 + L_2)}{A(T_1 - T_2)}\left[\frac{K_v L_2 T_2[(K_v L_2 + K_a L_1)T_2 + K_a L_1 T_1]}{(K_v L_2 + K_a L_1)^2 - (K_a L_1)^2} - T_2\right]$$

Simplificando : $$K = \frac{(2L_1 + L_2)}{L_1(T_1 - T_2)}\left[\frac{K_a L_1(T_1 - T_2)}{KvL_2 + 2K_a L_1}\right]$$

$$K = \frac{aL_1 + L_2}{\frac{L_1}{K_v} + \frac{L_2}{K_a} + \frac{L_1}{K_v}}$$

(15) Una bala de plomo que lleva una velocidad de 400 m/s choca con una pared y penetra en ella. Suponiendo que el 10% de la energía cinética de la bala se invierte en calentarla. Calcular cuántos grados se elevará su temperatura. El calor específico del plomo debe hallarse por la ley de Dulong-Petit.

Solución:

Según el problema el 10% de la energía cinética de la bala se convierte en energía calorífica, es decir:

$$0.10 \times \tfrac{1}{2}mv^2 = mCe_{Pb}\Delta T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

La Ley de Dulong-Petit dice : La capacidad molar media a presión constante para todos los metales, excepto los muy ligeros es aproximadamente la misma e igual a 6.3 cal/mol-°C.

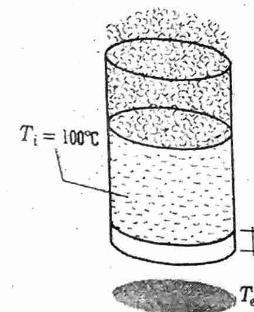
Para el plomo:

$(\text{Peso atómico})_{Pb} \times Ce_{Pb} = 6.3\ cal/at-gr-°C$, $(\text{Peso atómico})_{Pb} = 207.19$

Luego: $Ce_{Pb} = 6.3/207.19 = 0.03\ cal/g-°C$

Reemplazando valores en (α): $v = 400\ m/s$, se obtiene: $\Delta T = 66°C$.

(16) Una cacerola de aluminio de 15cm de diámetro llena de agua está puesta en una hornilla. El agua hierve y cada minuto se forma 300 g de vapor. Hallar la temperatura a que se encuentra la parte exterior del fondo de la cacerola, si su espesor es de 2 mm. Desprecie las pérdidas térmicas.



Solución:

El flujo de calor que ingresa por la parte inferior de la cacerola: Q, sirve para que el agua hierva, es decir:

$$\dot{Q} = -K_{Al}A\frac{\Delta T}{\Delta x'} \quad \text{y} \quad \dot{Q} = \dot{m}L_v$$

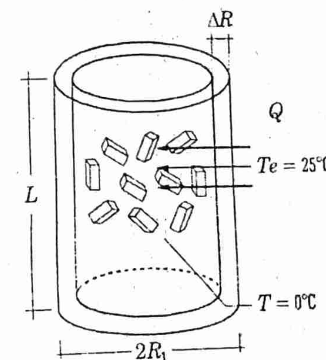
Luego, como no hay pérdidas térmicas: $-K_{Al}A\frac{\Delta T}{\Delta x} = \dot{m}L_v$

$\Delta T = \frac{\dot{m}L_v\Delta x}{-K_{Al}A}$ y sabiendo $K_{Al} = 0.49\ cal/seg-cm-°C$

$L_v = 540\ cal/g$, $\Delta x = 0.2\ cm$, $A = \pi d^2/4$, $d = 15cm$

$-\Delta T = 6°C$ y $-(100°C - T_e) = 6°C$, $T_e = 106°C$

(17) Una vasija metálica cilíndrica que tiene 9 cm de radio está llena de hielo a 0°C. Esta vasija está aislada térmicamente por medio de una capa de corcho de 1 cm. de espesor. ¿Cuánto tiempo tardará en fundirse todo el hielo que hay en la vasija si la temperatura del aire exterior es igual a 25°C?. Suponer que el intercambio de calor se realiza únicamente a través de la superficie lateral de la vasija que tiene 9.5 cm de radio medio.



Solución:

El flujo calorífico Q va de la región exterior al interior y este calor fundirá el hielo.

Por simetría cilíndrica: $\dot{Q} = 2\pi LK_c\ \Delta T/Ln(R_2/R_1) = \frac{Q}{t}$ .... (1)

El calor de fusión $Q = L_f m = L_f \rho_{Hi} \pi R_1^2 L$ .... (2)

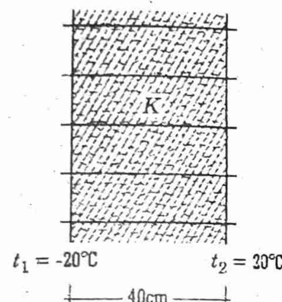
Reemplazando (2) en (1): $t = \rho_{Hi} R_1^2 L_f Ln(R_2/R_1)/2K_c \Delta T$

Reemplazando valores: $K_c = 0.05\, w/m-°C = 1.19\times10^{-4}\ cal/seg-cm-°C$

$\rho_{Hi} = 0.9\ g/cm^3$ $L_f = 80\ cal/g$, $R_1 = 9.0\ cm$, $\Delta T = (+25°C)$

Se obtiene: $t = 102{,}916\ seg$, $t = 28.5\ h$

(18) La superficie externa de una pared está a la temperatura $t_1 = -20°C$, mientras que la interna a $t_2 = 20°C$. La pared tiene 40 cm de espesor. Hallar el coeficiente de conductividad térmica del material del que está hecha la pared, sabiendo que por cada metro cuadrado de su superficie pasa 110 *Kcal/hora*.



Solución:

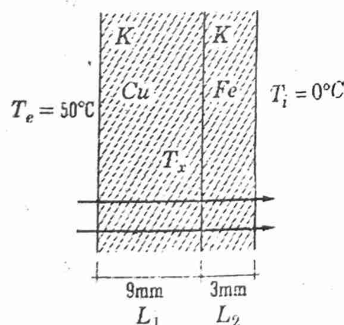
El flujo de calor es debido a la conductividad de la pared $\dot{Q} = -KA\frac{\Delta T}{\Delta x}$, donde:

$$\dot{Q} = 110\ Kcal/h = \frac{1110}{36}\ cal/seg\ ,\ A = 1\ m^2$$

$$\Delta T = -20-20°C = -40°C \text{ y } \Delta x = 40cm = 0.4\ m$$

Reemplazando valores: $K = -\frac{Q\Delta x}{A\Delta T} = \frac{11}{36}\ cal/m\times seg-°C = 1.1\ Kcal/m-h-°C$

(19) Una lámina de cobre cuyo espesor es de 9 mm y otra de hierro de 3 mm de espesor, están juntas. La superficie exterior de la lámina de cobre se mantiene a la temperatura de $50°C$ y la superficie interior de la lámina de hierro $0°C$. Hallar la temperatura que tendrán las superficies de contacto entre las dos láminas. Las superficies de las láminas son grandes en comparación con sus espesores.



Solución:

Sea T_x la temperatura entre las dos láminas. Como no hay fuentes y sumideros, el flujo calorífico en la barra de cobre es la misma en la barra de fierro.

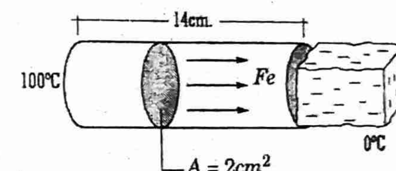
Luego: $Q = -K_{Cu}A\frac{(T_x - T_e)}{L_1} = -K_{Fe}A\frac{(T_i - T_x)}{L_2}$

$T_x = \frac{K_{Cu}L_2 50}{K_{Fe}L_1 + K_{Cu}L_2}$. Reemplazando valores:

$K_{Cu} = 390\ w/m°C$, $K_{Fe} = 58.7\ w/m-°C$, $L_1 = 9mm$, $L_2 = 3mm$

$T_x = 34.5°C$

(20) Uno de los extremos de una barra de hierro se mantiene a la temperatura de 100°C, mientras que otro se apoya en un trozo de hielo. La barra tiene 14cm de longitud y 2 cm^2 de sección transversal. Despreciar las pérdidas por las paredes laterales. Hallar (a) la velocidad de propagación del calor a lo largo de la barra. (b) La cantidad de hielo que se funde en 40 minutos.



Solución:

El calor se propaga por la barra de cobre, por conducción.

$\dot{Q} = -K_{Fe}A\frac{\Delta T}{\Delta x}$ .... (1)

Este flujo de calor funde el hielo. Para ello usamos: $Q = mL_f$ ...... (2)

De (1) y (2) : $\frac{Q}{t} = -K_{Fe}A\frac{\Delta T}{\Delta x}$

$\frac{mL_f}{t} = -K_{Fe}A\frac{\Delta T}{\Delta x} = \dot{Q}$, $m = \frac{\dot{Q}t}{L_f}$ .... (3)

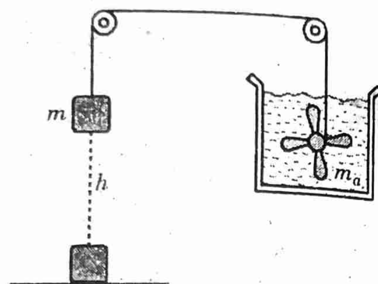
Usando los valores: $K_{Fe} = 58.7\ w/m-°C$, $A = 2\ cm^2 = 2\times10^{-4}\ m^2$

$\Delta T = 0-100 = -100°C$, $\Delta x = 0.14\ m$.

Y reemplazando en (1): $\dot{Q} = 2\ cal/seg$

Además: $L_f = 80\,cal/g$, $t = 40\,min = 2400\,seg$. Reemplazando en (3): $m = 60g$

(21) En un experimento de Joule una masa de 6 Kg cae desde una altura de 50 m y hace girar una rueda de aspas que agita a 0.6 Kg de agua. El agua está inicialmente a 15°C. ¿Cuánto se eleva su temperatura?



Solución:

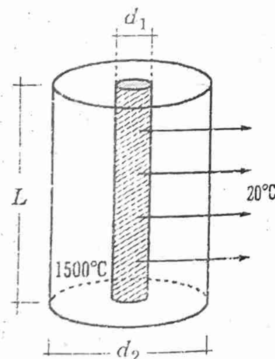
En este caso existe una conversión de energía potencial de posición de la masa en energía calorífica de la masa de agua, es decir: $\frac{mgh}{4.186} = m_a Ce_a (T_f - T_o)$

Donde: $m = 6\,Kg$, $h = 50\,m$, $m_a = 0.6\,Kg$

$Ce_a = 1\,cal/g - °C$ y $T_0 = 15°C$

Reemplazando valores, se obtiene: $T_f = 16.17$. Luego: $\Delta T = 1.17°C$

(22) Un calentador de alambre de tungsteno trabaja a 3 Kwatts/m y su diámetro es de $5\times10^{-4}\,m$. Está ahogado dentro del eje de un cilindro de cerámica de 0.12 m de diámetro. Cuando está operando a la potencia de trabajo, el alambre se encuentra a 1,500°C, la cara exterior del cilindro está a 20°C. ¿Cuál es la conductividad térmica de la cerámica?



Solución:

Se demuestra en teoría, que el flujo calorífico radial entre dos cilindros concéntricos es:

$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{2\pi K L \Delta T}{Ln(r_2/r_1)}$ .... (1)

En este caso: $\frac{\Delta Q}{L\,\Delta t} = \frac{\Delta Q}{L}\,\frac{1}{\Delta t} = \frac{3\times10^3}{4.186}\,cal/seg - m$

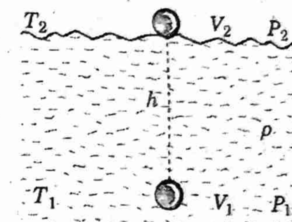
$\frac{\Delta Q}{L} = \frac{3\times10^3}{4.186}\Delta t$ y $\Delta T = 1500 - 20°C = 1480°C$

$r_2 = d_2/2 = 0.12/2 = 0.06\,m$, $r_1 = d_1/2 = 5\times10^{-4}\,m/2 = 2.5\times10^{-4}\,m$

Reemplazando en la siguiente expresión: $K = \frac{(\Delta Q/\Delta t)\,Ln(r_2/r_1)}{2\pi L \Delta t}$

$K = 0.42\,cal/seg - m - °C$

(23) Una burbuja de aire de $20cm^3$ de volumen se encuentra en el fondo un lago a 40m de profundidad en donde la temperatura es de 4°C. La burbuja se eleva hasta la superficie que está a una temperatura de 20°C. Considerar que la temperatura es igual a la del agua que la rodea y encontrar su volumen cuando está a punto de llegar a la superficie.



Solución:

En este caso usamos: $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$, donde:

$P_1 = P_0 + \rho gh$, $P_2 = P_0$, $T_1 = 273 + 4°C = 277°K$

$T_2 = 273 + 20°C = 293°K$, $V_1 = 20\,cm^3$

$V_2 = p_1V_1\ \ T_2/p_2\,T_1$.

Reemplazando valores: $V_2 = 100\,cm^3$

(24) Calcular el trabajo efectuado al comprimir un mol de oxígeno desde un volumen de 22.4 lts a 0°C y 1 atm de presión hasta 16.8 lts a la misma temperatura.

Solución:

Sea $n = 1\,\text{mol}$, $V_1 = 22.4\,lt$, $V_2 = 16.8\,lt$, $T_1 = 273°C$

$T_2 = 273°K$, $R = 8.314\,J/mol - °K$

En teoría se ha visto: $W = \int p\,dV = \int n\frac{RT}{V}dV = nRT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}$

$W = nRT_1 Ln(V_2/V_1) = -653\,J$

$W = -653\,J$. El signo menos, significa que se realiza trabajo sobre el sistema.

(25) Un motorista calibra los neumáticos de su vehículo con presión de 20 $lbs/pulg^2$ a una temperatura de 20°C. Después de realizar un viaje la temperatura de los neumáticos subió a 40°C. ¿Cuál es la presión del aire al final del viaje?

Solución:

Se tiene los datos: $p_1 = 20 lbs/pulg^2$, $T_1 = 273 + 20 = 293°K$

$T_2 = 273 + 40 = 313°K$, $P_2 = ?$

Como el volumen es constante, entonces: $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$

$P_2 = \frac{P_1 T_2}{T_1}$. Reemplazando valores: $P_2 = 21.4\ lbs/pulg^2$

(26) Calcule el número de moléculas de un gas contenido en un volumen de 1 cm^3 a una presión de 10^{-3} atm y a una temperatura de 200°K.

Solución:

Usando la expresión de gases ideales:

$PV = nRT$, $n = PV/RT$, donde $R = 0.082 \frac{atm - lt}{mol - °K}$

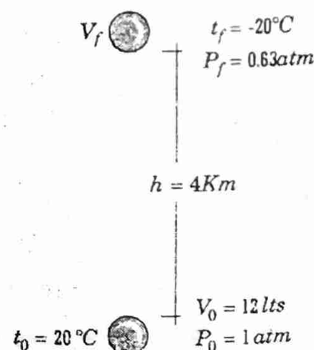
$T = 200°K$, $P = 10^{-3} atm$, $V = 1\ cm^3 = 10^{-3} lt$

Reemplazando se obtiene: $n = 6.09 \times 10^{-8}$ moles

Para hallar el número de moléculas: $N = nN_A$, donde:

$N_A = 6.023 \times 10^{23}$ *moléculas/mol*. Entonces $N = 3.7 \times 10^{16}$ moléculas.

(27) Un globo lleno de helio a presión atmosférica y 20°C tiene un volumen de 12 *lts*. El globo se eleva a 4 *Km* de altura, donde la temperatura es de (–20°C) y la presión de 0.63*atm*. Halle el nuevo volumen del globo. ¿Cuántos moles de *He* hay en el globo?



Solución:

Usamos la expresión: $\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_f V_f}{T_f}$

$V_f = \frac{P_0 V_0 T_f}{T_0 P_f}$, donde $T_0 = 273 + 20 = 293°K$

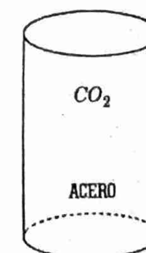
Y $T_f = 273 - 20 = 253°K$, reemplazando valores se obtiene: $V_f = 16.44\ lt$

Para hallar el número de moles, se usa la relación: $pV = nRT$, donde:

$P_f = 0.63\ atm$, $T_f = 273 - 20 = 253°K$, $R = 0.082 atm - lt/mol - °K$

Entonces: $n = p_f V_f / RT_f = 0.5$ mol de Helio.

(28) Un tanque de acero de gran tamaño contiene dióxido de carbono a 20°F y 10 atm de presión. Si el CO_2 se calienta a 200°F. ¿Cuál será la nueva presión en el tanque?



Solución:

Se tiene: $T_0 = 20°F$

$T_0 = 266.43°K$, $p_0 = 10\ atm$

$T_f = 200°F$, $T_f = 366.3°K$. Como el volumen no varía (recipiente de acero)

(29) El volumen de cierta masa de gas perfecto al elevar su temperatura 1°K a presión constante, aumenta en 1/335 de su valor inicial. ¿A qué temperatura se encontraba el gas al principio?.

Solución:

Según el problema, se tiene $\Delta V = V_0/335$, $\Delta T = 1°K$, P = constante

La expresión a ser usada es: $\frac{T_f}{T_0} = \frac{V_f}{V_0}$, $\frac{T_f - T_0}{T_0} = \frac{V_f - V_0}{V_0}$

$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta V}{V_0}$, $T_0 = \frac{\Delta T}{\Delta V/V_0} = \frac{1°K}{1/335} = 335°K$

$T_0 = 335 K$

(30) Al elevar 1°K la temperatura de un gas a volumen constante, la presión aumentó un 0.2% ¿A qué temperatura inicial se encontraba el gas?

Solución:

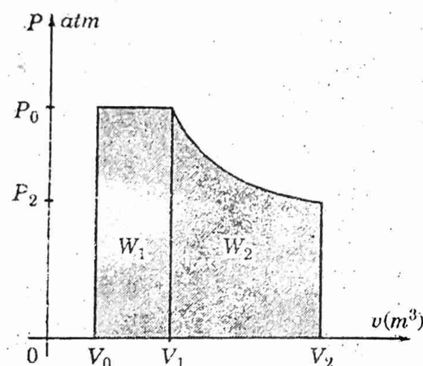
Se conoce lo siguiente: $\Delta T = 1°K$, $\Delta P/P_0 = 2\% = 0.02$, proceso a V = constante

La expresión a ser usada es: $\frac{P_f}{P_0} = \frac{T_f}{T_0}$

$\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{\Delta T}{T_0}$ $\qquad T_0 = \frac{\Delta T}{\Delta P/P_0} = \frac{1°K}{0.002} = 500°K$

$T_0 = 500°K$

(31) Un metro cúbico de aire está inicialmente a 49°C y 2*atm* de presión y se expande a presión constante hasta un volumen de $5m^3$. Luego se expande adiabáticamente hasta que el volumen es de $10m^3$ y la presión final de 0.5*atm*. Represente todo el proceso en un diagrama de *P-V* y halle el trabajo efectuado por el gas en cada etapa.



Solución:

Según datos del problema:

$V_0 = 1m^3$, $t_0 = 49°C$ o $T_0 = 332°K$

$P_0 = 2atm$, $V_1 = 5m^3$ y $V_2 = 10m^3$, $P_2 = 0.5atm$

Hallemos el trabajo W_1, para la primera etapa, a presión constante (isobárico).

$W_1 = P_0(V_1 - V_0) = 2(5-1)\,atm - m^3$

$W_1 = 8atm - m^3 = 8\times10^3 atm - lt$, $1\,atm - lt = 24.2\times4.186\,J$

$1\,atm - lt = 101.3\,J$. Entonces $W = 81\times10^4\,J$

Para hallar el trabajo W_2, es necesario conocer γ y la constante C, de la relación:

$P_0V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}$, $2\times5^{\gamma} = 0.5\times10^{\gamma} = C$

De donde se deduce $\gamma = 2$, $C = 2\times5^{\gamma} = 2\times5^2 = 50\,atm - m^6$

Luego: $W_2 = \int p\,dV = \int \frac{C}{V^{\gamma}}dV = C\left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_{V_1}^{V_2} = 5\,atm - m^3$

$W_2 = 5\times10^3\,atm - lt = 506.5\times10^3\,J.$

(32) Sea medio mol de un gas monoatómico ideal confinado en un cilindro de área de corte transversal de $100\,cm^2$ y supongan que en un extremo hay un émbolo que se mantiene en su lugar (ver figura), mediante un resorte de constante $K = 10^3\ N/m$. Supongan que originalmente, el gas tenga un volumen de $10^4\,cm^3$ y esté a una temperatura de 0°C (a) ¿Cuál es la presión del gas? (b) ¿Cuánto se habrá comprimido el resorte a partir de su longitud de equilibrio?

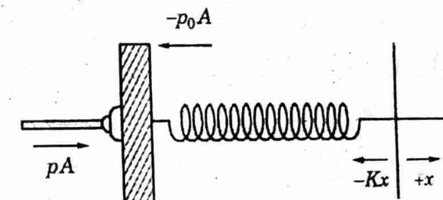
Solución:

a) Son datos $n = 0.5\,mol$, $V_0 = 10\,lt$, $T_0 = 273°K$. La ecuación de estado para un gas ideal:

$pV_0 = nRT_0$, $p = nRT_0/V_0$

donde $R = 0.082\ atm - lt/mol - °K$

luego $p = 1.12\,atm$ y $P_0 = 1\,atm$



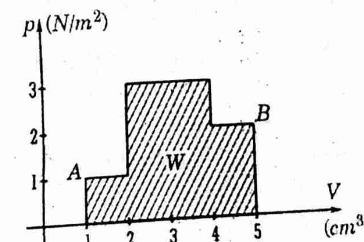
b) Según condición de equilibrio:

$\Sigma F_x = pA - p_0A - Kx = 0$, $x = (p - p_0)A/K$

$K = 10^3\,N/m$, $A = 100cm^2$, $\Delta p = 0.12atm$

Entonces: $x = 0.12\,m$

(33) La presión y el volumen de un gas ideal varían como se muestra en la figura, durante una expansión desde *A* hasta *B*. ¿Cuánto trabajo efectuó el gas en el proceso?



Solución:

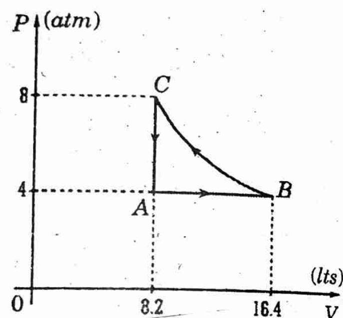
El trabajo realizado por el gas, es el área debajo de la curva.

$$W = 1\times1+3\times2+2\times1\frac{N}{m^2}\times cm^3$$

$$W = 9\frac{Ncm^3}{m^2} = 9\frac{N}{m^2}\times10^{-6}\ m^3 = 9\times10^{-6}\ N-m$$

$$W = 9\times10^{-6}\ J$$

(34) Dos moles de un gas perfecto para el cual $C_v = 3\ cal/mol-°K$ efectúan el ciclo ABC como se muestra en la figura. El proceso BC es una compresión isotérmica. Halle el trabajo realizado por el gas en cada una de las etapas del ciclo. Hállese también el calor suministrado y la variación de su energía interna.



Solución:

Sea $n = 2moles$, $C_v = 3cal/mol-°K$

a) Hallemos el trabajo efectuado en cada etapa:

$$W_{ab} = \int_{V_a}^{V_b} p\,dV = p_a(V_b - V_a) = 4\ atm\,(16.4-8.2)\ lt$$

$W_{ab} = 32.8\ atm-lt$ (trabajo efectuado por el gas)

$$W_{bc} = \int p\,dV = \int_{V_b}^{V_c} \frac{nRT_b}{v}\,dV = nRT_bLn\,(V_c/V_b) \text{ y } p_aV_b = nRT_b$$

$$W_{bc} = p_aV_bLn(V_c/V_b) = 4\times16.4\ atm-lt\ Ln(8.2/16.4)$$

$W_{bc} = -45.5\ atm-lt$ (trabajo efectuado sobre el gas)

$$W_{ca} = \int_{V_c}^{V_a} p\,dV = 0 \text{ (por ser un proceso isócoro)}$$

b) Hallemos el calor suministrado en cada etapa: $Q_{ab} = nCp(T_b - T_a)$

para el estado a: $p_aV_a = nRT_a$

para el estado b: $p_aV_b = nRT_b$

Luego: $\frac{V_a}{V_b} = \frac{T_a}{T_b}$

$$T_b = T_a(V_b/V_a) = T_a(2V_a/V_a) = 2T_a$$

$$\text{y} \quad T_a = p_a\,V_a/nR = 4\times8.2/2\times0.082°K$$

$$T_a = 200°K \text{ y } T_b = 2(200°K) = 400°K$$

Luego: $Q_{ab} = nCp(2T_a - T_a) = nCp\,T_a = 2\times5\times200\ Cal$

$Q_{ab} = 2000\ Cal$

$Q_{bc} = \Delta U_{bc} + W_{bc}$ (donde $\Delta U_{bc} = 0$ por ser un proceso isotérmico).

$Q_{bc} = W_{bc} = -45.5\ atm\times lt = -1101\ cal$ (es el calor suministrado por el gas)

$Q_{ca} = nC_v(T_a - T_c) = nC_v(T_a - T_b)$

$Q_{ca} = 2\ mol\times3\frac{cal}{mol°K}(200-400)°K = -1200\ cal$ (es el calor extraído del gas)

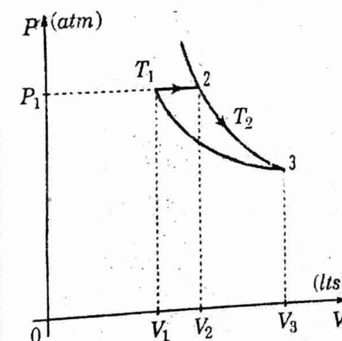
c) Hallemos la variación de energía interna en cada etapa.

$\Delta U_{ab} = Q_{ab} - W_{ab} = (2000 - 32.8\times24.2)\ cal = 1206\ cal$

$\Delta U_{bc} = Q_{bc} - W_{bc} = [-1101-(-45.5\times24.2)]\ cal = 0\ cal$

$\Delta U_{ca} = Q_{ca} - W_{ca} = (-1200-0)\ cal = -1200\ cal$

(35) Dos moles de O_2 se encuentran inicialmente a la temperatura de 27°C y ocupan un volumen de $20lts$ se expanden primero a presión constante hasta duplicar su volumen y después adiabáticamente hasta recuperar su temperatura inicial (a) ¿Cuál es el incremento total de su energía interna expresada en calorías? (b) ¿Cuál es en calorías el calor total suministrado?. (c) ¿Cuál es en Joules el trabajo total realizado por el gas? (c) ¿Cuál es su volumen final.



Solución:

Sea: $n = 2 mol - g O_2$, $T_1 = 300°K$, $V_1 = 20 lts$, $V_2 = 40 lts$, $T_3 = 300°K$

a) Hallemos el cambio de energía interna:

$\Delta U_{13} = 0$ (por ser un proceso isotérmico)

b) El calor total: $Q_{13} = Q_{12} + Q_{23}$, donde $Q_{23} = 0$ por ser un proceso adiabático.

$Q_{13} = Q_{12} = nCp(T_2 - T_1)$ (por ser un proceso isobárico)

Comparando el punto (1) y (2) : $T_2 = T_1(V_2/V_1)$ (proceso isobárico)

$T_2 = 300°K(V_2/V_1) = 600°K$ y $Cp = 7\ cal/mol - °K$ (oxígeno diatómico)

Luego: $Q_{13} = 2\ mol \times 7 \frac{cal}{mol - °K}(600°K - 300°K) = 4,200\ cal$

c) Sabemos $\Delta U_{13} = Q_{13} - W_{13}$ y $W_{13} = Q_{13} - \Delta U_{13}$

$W_{13} = 4,200\ cal - 0 = 4,200\ cal = 17,600$ Joules

d) Por ser un proceso adiabático de (2) → ~ (3):

$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$, $V_3 = V_2(T_2/T_3)^{1/(\gamma-1)}$

Donde $\gamma = Cp/Cv = 1.4$, $V_3 = 40\ lts\ (600/300)^{1/0.4} = 228\ lts$

(36) En cierto proceso se suministran a un sistema 50,000 cal y simultáneamente el sistema se expande venciendo una presión exterior constante de 7.2 Kg/cm^2. La energía interna del sistema es la misma al comienzo que al final del proceso. Calcúlese el incremento de volumen del sistema.

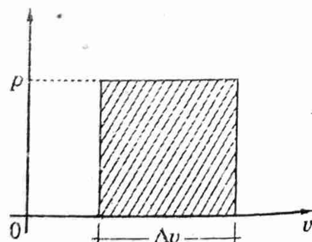


Solución:

De la primera Ley de la Termodinámica:

$\Delta U = Q - W$, como $\Delta U = 0$.

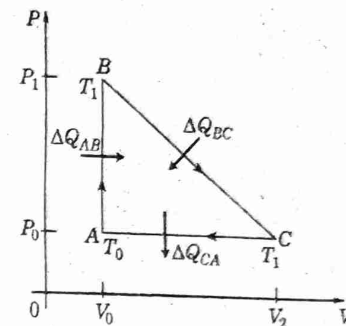
$Q = W$ y $W = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV = p\Delta V$



$Q = p\Delta V$, $\Delta V = Q/p = \frac{50,000/24.2\ atm - lt}{7.2\ Kg/cm^2}$

$\Delta V = \frac{2070\ atm/lt}{7.2\ atm} = 287\ lts$

(37) Se somete una masa de gas ideal diatómico con volumen inicial $V_0 = 25 lt$, presión inicial $p_0 = 1.5 atm$ y temperatura inicial $T_0 = 300°K$, al proceso cíclico ABC de la figura. Partiendo de A, se eleva la presión del gas hasta el valor $P_1 = 4.5\ atm$ a volumen constante. A continuación varían la presión y el volumen siguiendo la trayectoria recta BC hasta alcanzar la presión inicial $P_0 = 1.5 atm$ en el punto C, donde la temperatura es la misma que en el punto B. Por último se reduce el volumen del gas a la presión constante P_0 hasta llegar al estado inicial en A. Encontrar los cambios de calor, trabajo y energía interna en cada rama de proceso y para todo el ciclo. Determinar asimismo el trabajo neto efectuado en cada ciclo por el sistema.



Solución:

Sea: $P_0 = 1.5 atm$, $V_0 = 25 lts$, $T_0 = 300°K$, $P_1 = 4.5 atm$

$Cv = \frac{5}{2}R\ cal/mol - °K$, $Cp = Cv + R$

Hallemos primero el número de moles n, la temperatura T_1 y el volumen V_2.

Por la ecuación de estado: $P_0 V_0 = nRT_0$

$n = P_0 V_0 / RT_0 = 1.5 \times 25/0.08206 \times 300$, $n = 1.523 mol$

Comparando el estado inicial A y el final B:

$P_0 V_0 = nRT_0$, $P_1 V_0 = nRT_1$, $T_1 = (P_1/P_0)T_0$

$T_1 = (4.5/1.5)\ 300°K = 900°K$

Comparando el estado inicial B y el final C:

$P_1 V_0 = nRT_1$, $P_0 V_2 = nRT_1$, $V_2 = (P_1/P_0)V_0$

$V_2 = (4.5/1.5) 25 = 75 lts$

En el proceso AB: $\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB}$, pero $W_{AB} = 0$ por ser un proceso isócoro:

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = nCv(T_1 - T_0)$$

$$Q_{AB} = 1.523 \times \tfrac{5}{2} R \times (900 - 300)\ cal = 4537\ cal = 18.991 J$$

En el proceso BC: $\Delta U_{BC} = Q_{BC} - W_{BC}$, pero $\Delta U_{BC} = 0$, porque la temperatura inicial y final es la misma: T_1.

$$Q_{BC} = W_{BC} = p_0(V_2 - V_0) + \tfrac{1}{2}(V_2 - V_0)(P_1 - P_0)$$

El trabajo se determina por áreas:

$$W_{BC} = \tfrac{1}{2}(V_2 - V_0)(P_0 + P_1) = \tfrac{1}{2}(75 - 25)(1.5 + 4.5)\ atm - lt$$

$$W_{BC} = 150\ atm - lt = 3630\ cal = 15{,}195 \text{ Joules}$$

En el proceso CA: $\Delta U_{CA} = Q_{CA} - W_{CA}$ y $Cp = 6.951\ cal/mol - °K$

Donde: $Q_{CA} = nCp(T_0 - T_1) = 1.523 \times 7 \times (300 - 900)\ cal$

$Q_{CA} = -6{,}352\ cal = 26{,}588$ Joules

El trabajo: $W_{CA} = \int_{V_2}^{V_0} p\, dV = p_0(V_0 - V_2) = 1.5 \times (25 - 75)\ atm - lt$

$W_{CA} = -75 atm - lt = -7597.6$ Joules

Luego: $\Delta U_{CA} = -26{,}588 - (-7{,}597)\ J = -18{,}991\ J$

$\Delta U_{CA} = 4537\ cal$

Entonces para el ciclo completo:

$$\Delta Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 4{,}537 + 3630 + (-6{,}352)\ cal$$

$$\Delta Q = 1815\ cal = 7597\ J$$

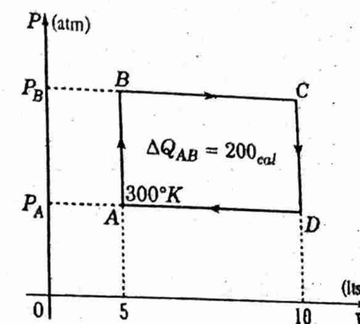
$$\Delta U = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = 4537 + 0 + (-4537)$$

$$\Delta U = 0$$

$$\Delta W = \Delta W_{AB} + \Delta W_{BC} + \Delta W_{CA} = 0 + (15{,}195) + (-7{,}597)$$

$$\Delta W = 7{,}598 J$$

(38) Se da un diagrama P-V para un proceso cíclico que comprende 3 moles de un gas monoatómico ideal, como se indica. Hallar (a) la presión en el punto A, (b) la temperatura y la presión en el punto B, (c) el trabajo efectuado por el gas al pasar de B a C, (d) la temperatura en C, (e) el calor de entrada y el cambio de energía interna desde B hasta C, (f) la temperatura en D y (g) el trabajo total efectuado por el gas.



Solución:

a) Se conoce $T_A = 300°K$

$\Delta Q_{AB} = 200\ cal$

$V_A = V_B = 5 lt$

$V_C = V_D = 10\ lts$, $Cv = 2.98\ cal/mol - °K$, $Cp = 4.97\ cal/mol - °K$

$R = 0.08207\ atm - lt/mol - °K$

Usando la ecuación de estado para A:

$p_A = nRT_A/V_A = 3 \times 0.08207 \times 300/5 = 14.8\ atm$

b) Sabemos $\Delta Q_{AB} = nCv(T_B - T_A)$, $200 = 3 \times 2.98(T_B - 300)$

$T_B = 322°K$ y $P_B = nR\, T_B/V_B = 3 \times 0.08207 \times 322/5$

$P_B = 15.9\ atm$

c) Usando áreas geométricas: $W_{BC} = P_B(V_C - V_B)$

$W_{BC} = 15.9 \times (10 - 5)\ atm - lt = 79.5\ atm - lt = 1923.9\ cal$

$W_{BC} = 853\ Joules$

d) Comparando dos estados B y C:

$P_B V_B = nRT_B$, $P_B V_C = nRT_C$, $T_C = (V_C/V_B)T_B$

$T_C = (10/5)322 = 644°K$

e) De la Primera Ley de la Termodinámica:

$\Delta U_{BC} = Q_{BC} - W_{BC}$, $Q_{BC} = nCp(T_C - T_B)$

$Q_{BC} = 3 \times 4.97 \times (644 - 322) cal = 4801 cal$

$\Delta U_{BC} = 4801 - 1923.9\ cal = 2877.1 cal = 12{,}043\ J$

f) Comparando dos estados A y D:

$P_A V_A = nRT_A$, $P_A V_D = nRT_D$, $T_D = (V_D/V_A)T_A$

$T_D = (10/5)300 = 600°K$

Para hallar el trabajo, lo hacemos por área, considerando el sentido de D a A:

$W_{DA} = (5 - 10) \times 14.8\ atm - lt = -74\ atm - lt$

$W_{DA} = -1790.8\ cal = -7496.3$ Joules

g) El trabajo total, se halla sumando los trabajos:

$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = 0 + 8053 + 0 + (-7496.3)J$

$W = 557$ Joules

(39) Demostrar que para un gas ideal, que experimenta un proceso adiabático:

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}$$

Solución:

De la primera ley de la Termodinámica para un proceso infinitesimal.

$dU = dQ - dW = 0 - dW$

$nCudt = -dW = -pdv$ .... (1)

como: $p = \frac{nRT}{V}$ (gases ideales)

Reemplazando en (1):

$nCvdT = -\frac{nRT}{V}dV$, $\frac{Cv}{R}\frac{dT}{T} = -\frac{dV}{V}$

$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{Cv}\frac{dV}{V}$, $\text{Ln}T = \text{Ln}V^{-R/Cv} + \text{Ln}C$

$\text{Ln}T - \text{Ln}V^{-R/Cv} = \text{Ln}C$

$\text{Ln}\ T/V^{-R/Cv} = \text{Ln}\ C$

$\text{Ln}\ T/V^{-R/Cv} = \text{Ln}\ C$, $TV^{R/Ov} = C$

Como: $Cp = Cv + R$

$TV^{(Cp - Cv)/Cv} = R$

$TV^{(\gamma-1)} = C$

(40) Demostrar que para un gas ideal, que experimenta un proceso adiabático:

$$TP^{-(\gamma-1)/\gamma} = \text{constante}$$

Solución:

De la primera Ley de la termodinámica

$dv = dQ - dW = 0 - dW = -dW$

$nCvdT = -pdV$ .... (1)

Por ser gases ideales: $pV = nRT$

$pdV + Vdp = nRdT$ .... (2)

De (1) en (2): $-nCvdT + Vdp = nRdT$

$Vdp = nRdT + nCvdT$

$Vdp = n(Cv + R)dT = nCpdT$

Como: $V = nRT/P$ (gases ideales)

$\frac{nRT}{P}dp = nCpdT$

$\frac{R}{Cp}\frac{dp}{P} = \frac{dT}{T}$; $\text{Ln}\ T = \text{Ln}\ P^{R/Cp} + \text{Ln}C$

$$\operatorname{Ln} T - \operatorname{Ln} P^{R/Cp} = \operatorname{Ln} C$$

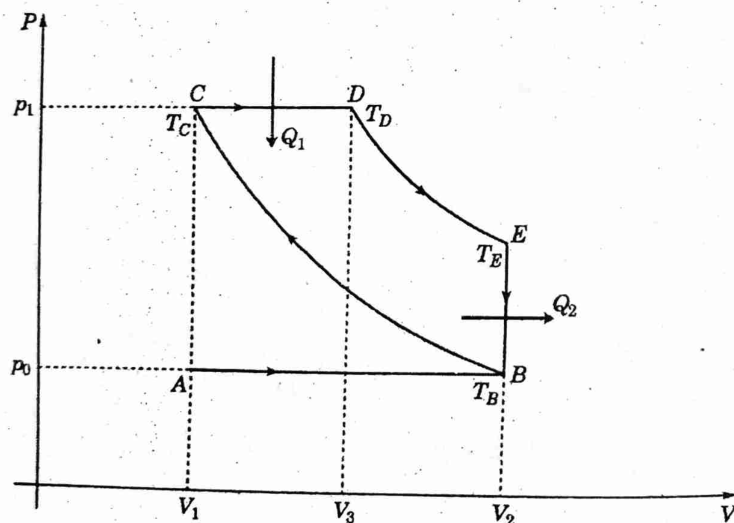
$$\operatorname{Ln}(T/P^{R/Cp}) = \operatorname{Ln} C$$

$$\operatorname{Ln} T P^{-R/Cp} = \operatorname{Ln} C$$

Luego: $TP^{-R/Cp} = C$, como: $R = Cp - Cv$

$$TP^{-(Cp-Cv)/Cp} = C,\quad TP^{-(\gamma-1)/\gamma} = C$$

41 En la figura se muestra el ciclo de un motor diesel de cuatro tiempos en el cual tenemos: (a) La rama AB, de admisión de aire en el cilindro ($P_0 = 1atm$); (b) la rama BC, de comprensión adiabática del aire hasta la presión p_1; (c) al finalizar el tiempo de comprensión en el cilindro se inyecta el combustible que al entrar en contacto con el aire caliente se inflama y se quema, el émbolo se mueve hacia la derecha, primero por vía ísobara (rama CD) y luego adiabáticamente (rama DE); (d) al final de la expansión adiabática se abre la válvula de escape y la presión desciende hasta p_0 (rama EB); y (e) el émbolo se mueve hacia la izquierda y los gases de escape son expulsados del cilindro (rama BA). Hallar el rendimiento del motor Diesel.



Solución:

Para hallar el rendimiento por la teoría:

$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \quad \text{.............} \quad (1)$$

Proceso isóbaro CD: $Q_1 = nCp\Delta T = nCp(T_D - T_C)$ .... (2)

proceso isócoro EB: $Q_2 = nCv(T_E - T_B)$ .... (3)

De (3) y (2) en (1): $\eta = 1 - \dfrac{nCv(T_E - T_B)}{nCp(T_D - T_C)} = 1 - \dfrac{T_E - T_B}{(T_D - T_C)}$ .... (4)

Para CD:

$$p_1 V_1 = nRT_C$$

$$p_1 V_3 = nRT_D$$

$$T_C = T_D \frac{V_1}{V_3} \quad \text{............} \quad (5)$$

Para DE:

$$T_D V_3^{\gamma-1} = T_E V_2^{\gamma-1}$$

$$T_E = T_D (V_3/V_2)^{\gamma-1} \quad \text{............} \quad (6)$$

Para BC:

$$T_B V_2^{\gamma-1} = T_C V_1^{\gamma-1}$$

$$T_B V_2^{\gamma-1} = T_C V_1^{\gamma-1}$$

$$T_B = T_C \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left[T_D \frac{V_1}{V_3}\right](V_1/V_2)^{\gamma-1} \quad \text{............} \quad (7)$$

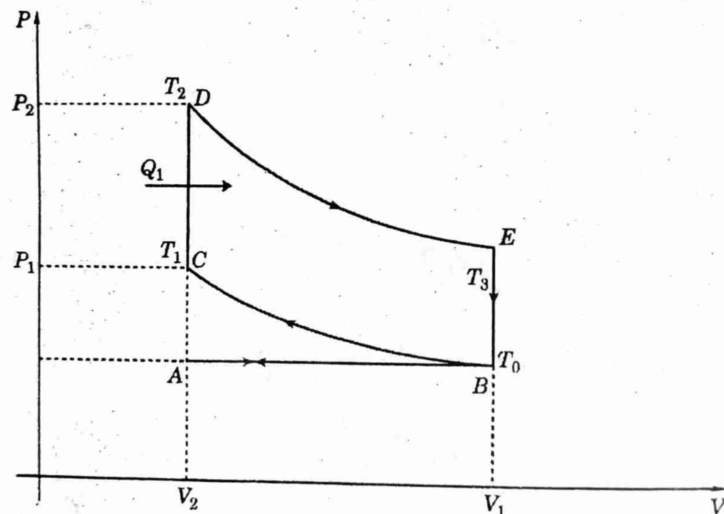
De (5), (6) y (7) en (4): $\eta = 1 - \dfrac{1}{\gamma} \dfrac{T_D (V_3/V_2)^{\gamma-1} - T_D (V_1/V_3)(V_1/V_2)^{\gamma-1}}{T_D - T_D (V_1/V_3)}$

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{(V_3^{\gamma} - V_1^{\gamma})}{V_2^{\gamma-1}(V_3 - V_1)}$$

42 En la figura se representa el ciclo de un motor de combustión interna de cuatro tiempos de carburador o de gas en el que tenemos que: (a) en la primera carrera del émbolo en el cilindro se produce la admisión o aspiración del combustible (en los motores de carburación la mezcla combustible está compuesta por vapor de gasolina y aire y se prepara en el carburador, en los motores de gas la mezcla gas-aire procede de un generador de gases de combustión), la presión p_0 = constante y el volumen aumenta desde V_2 hasta V_1 (rama AB, admisión); (b) durante la segunda carrera del émbolo (rama BC, compresión) el combustible se comprime adiabáticamente desde V_1 hasta V_2, la temperatura aumenta desde T_0 hasta T_1 y la presión desde p_0 hasta

p_1 (c) después tiene lugar el encendido (explosión) del combustible por medio de una chispa, con lo que la presión aumenta de p_1 a p_2 a volumen constante (rama CD) y la temperatura se eleva hasta T_2; (d) la tercera carrera del émbolo se debe a la expansión adiabática del combustible desde V_2 hasta V_1 (carrera de trabajo, rama DE), durante la cual la temperatura desciende hasta T_3; (e) cuando el émbolo llega a su posición extrema (punto E) se abre la válvula de escape y la presión disminuye a volumen constante hasta p_0 (rama EB); y (f) la cuarta carrera del émbolo, que produce una comprensión isobárica (rama BA, expulsión o escape, barrido de los gases quemados). Hallar el rendimiento de este ciclo si la relación de comprensión $V_1/V_2 = 5$ y la exponente de la adiabática es 1.33

Solución:



Para hallar el rendimiento: $n = W/Q_1$ .... (α)

$$W = W_{BC} + W_{CD} + W_{DE} + W_{EB}$$

Por ser procesos isocóros: $W_{CD} = W_{EB} = 0$

$$W = W_{BC} + W_{DE}$$

Luego: $W_{DE} = \frac{\eta R T_2}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right]$

$$W_{BC} = \frac{\eta R T_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right]$$

$$W = \frac{\eta R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)[1 - (V_2/V_1)^{\gamma-1}] \quad \text{......................... (1)}$$

Para el proceso adiabático: BC

$$T_0 V_1^{\gamma-1} = T_1 V_2^{\gamma-1}$$

$$T_1/T_0 = (V_1/V_2)^{\gamma-1} \quad \text{..................... (2)}$$

Para el proceso adiabático $\overline{DE}$:

$$T_2 V_2 = T_3 V_1^{-1}$$

$$T_2/T_3 = (V_1/V_2)^{-1} \quad \text{.............. (3)}$$

De (2) y (3): $T_1/T_0 = T_2/T_3$ .... (4)

Reemplazando (2) y (4) en (1): $W = \frac{\eta R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)\left[1 - \frac{T_3}{T_2}\right]$ .... (5)

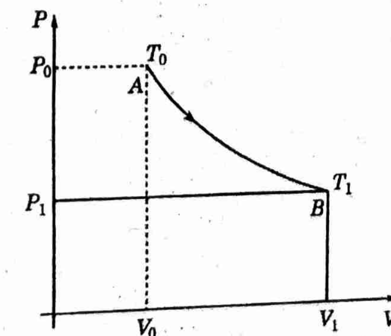
Para el proceso isócoro CD: $Q_1 = nC_v(T_2 - T_1)$ .... (6)

De (5) y (6) en (α): $\eta = \frac{nR(T_2 - T_1)(T_2 - T_3)/T_2(\gamma - 1)}{nCv(T_2 - T_1)} = \eta = \frac{T_2 - T_3}{T_2} = 1 - \frac{T_3}{T_2} = 1 - \frac{1}{(T_2/T_3)}$

Usando (3): $\eta = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}}$

Reemplazando valores: $n = 0.412$, 41.2%

(43) Hallar el trabajo realizado por un gas ideal, durante un proceso adiabático.



Solución:

$$W_{AB} = \int p dV = \int \frac{C}{V^{\gamma}} dV = C \int_{v_0}^{v_1} \frac{dV}{V} = \frac{CV^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\Bigg]_{v_0}^{v_1}$$

$$W_{AB} = \frac{C}{1-\gamma}\left[\frac{1}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_2^{\gamma-1}}\right] \quad \text{.................... (1)}$$

$$W_{AB} = \frac{C}{V_0^{\gamma-1}(1-\gamma)}\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$$

$$W_{AB} = \frac{CV_o^{1-\gamma}}{(1-\gamma)}\left[1-\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$p_0V_0^{\gamma} = C = p_1V_1^{\gamma}$$

$$p_0V_0^{\gamma} = \eta RT_0 \quad ; \quad p_1V_1 = \eta RT_1$$

$$W_{AB} = \frac{p_oV_o^{\gamma}V_o^{1-\gamma}}{(\gamma-1)}[1-(V_0/V_1)^{\gamma-1}]$$

$$W_{AB} = \frac{p_oV_0}{(\gamma-1)}[1-(V_0/V_1)^{\gamma-1}] \qquad \boxed{W_{AB} = \frac{\eta RT_0}{(\gamma-1)}[1-(V_0/V_1)^{\gamma-1}]}$$

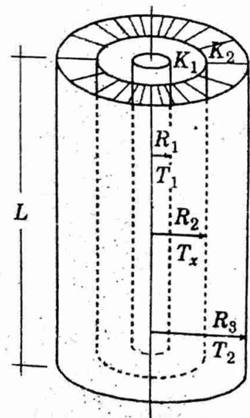
También en (1): $W_{AB} = \dfrac{C}{V_1^{\gamma-1}(1-\gamma)}[1-(V_1/V_0)^{\gamma-1}]$

$$W_{AB} = \frac{p_1V_1^{\gamma}}{V_1^{\gamma-1}(1-\gamma)}[1-(V_1/V_0)^{\gamma-1}]$$

$$W_{AB} = \frac{p_1V_1}{\gamma-1}[1-(V_1/V_0)^{\gamma-1}] \qquad \boxed{W_{AB} = \frac{\eta RT_1}{(\gamma-1)}[1-(V_1/V_0)^{\gamma-1}]}$$

(44) Dos cilindros concéntricos huecos de radios R_1 y R_2 y temperatura interna T_1 y externa $T_2 (T_2 < T_1)$ y de longitud L de conductividades K_1 y K_2. Hallar la temperatura entre los cilindros, a la distancia R_3 del eje del cilindro y el flujo calorífico, ver figura.

Solución:



Sea T_x, la temperatura pedida a la distancia R_3. por la simetría cilíndrica:

$$\mathring{Q}_1 = \frac{2\pi LK_1(T_1 - T_x)}{\text{Ln}(R_3/R_1)}$$

$$\mathring{Q}_2 = \frac{2\pi LK_2(T_x - T_2)}{\text{Ln}(R_2/R_3)}$$

Como el flujo es constante y uniforme:

$$\mathring{Q}_1 = \mathring{Q}_2$$

$$\frac{2\pi LK_1(T_1 - Tx)}{\text{Ln}(R_3/R_1)} = \frac{2\pi LK_2(Tx - T_2)}{\text{Ln}(R_2/R_3)}$$

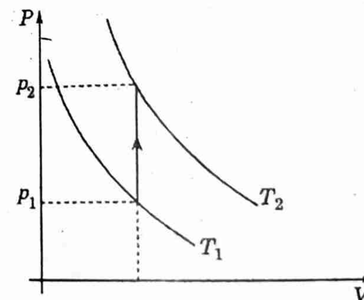
$$T_x = (AK_1T_1 + K_2T_2)/(AK_1 + K_2)$$

Donde: $A = \text{Ln}(R_2/R_3)/\text{Ln}(R_3/R_1)$

Reemplazando Tx en Q_1, se halla: $\mathring{Q}_1 = \dfrac{2\pi LK_1K_2(T_1 - T_2)}{K_1\text{Ln}(R_2/R_3) + K_2\text{Ln}(R_3/R_1)}$

(45) Hallar la temperatura del gas que se encuentra en un recipiente cerrado, si la presión del gas aumenta en un 0.4% con relación a la presión inicial al calentar el gas en 1°C.

Solución:



Por ser un proceso isócoro:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{p_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Por condición del problema: $\dfrac{p_1 - p_2}{p_1} = \dfrac{\Delta p}{p} = 0.004$ y $\Delta T = T_1 - T_2 = 1°C$

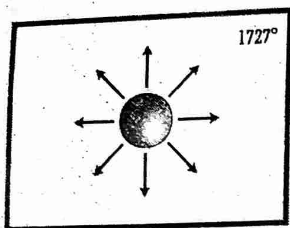
Pero: $\Delta T(1°C) = \Delta T(1°K)$

Luego en (1) : $0.004 = \dfrac{1°K}{T_1}$

$$T_1 = \frac{1°K}{0.004} = 250°K$$

(46) En un horno eléctrico se hace un pequeño orificio de $1cm^2$ de área (a modo de cuerpo negro) en una de sus paredes que está a 1727°C de temperatura. Hallar la cantidad de calor radiada por unidad de tiempo a través de este orificio.

Solución:



Hallemos la temperatura en °K :

$$T(°K) = 273 + 1727°K$$

$$T = 2000°K$$

Luego por teoría: $E = \sigma T^4$

$$E = 5.67 \times 10^{-8} \times (2000)^4 \frac{W}{m^2}$$

$$E = 90.72 \times 10^4 \frac{W}{m^2}$$

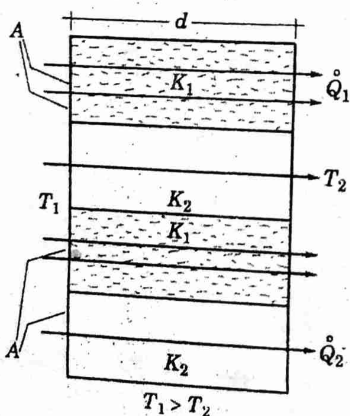
El calor que se irradia por unidad de tiempo por la superficie dada es:

$$\mathring{Q} = \frac{90.72 \times 10^4}{4.186} \frac{cal}{m^2 - seg} 10^{-4} m^2$$

$$\mathring{Q} = 21.67\ cal/seg$$

(47) Una pared consta de barras alternas de longitud d y de coeficientes de conductividad térmica K_1 y K_2, según figura. Las áreas de la sección transversal de las barras son iguales. Hallar el coeficiente de conductividad térmica de la pared.

Solución:



El flujo de calor a través de la barra de conductividad K_1 es:

$$\mathring{Q}_1 = -K_1 A \frac{(T_2 - T_1)}{d}$$

Para la barra de conductividad K_2 es:

$$\mathring{Q}_2 = -K_2 A \frac{(T_2 - T_1)}{d}$$

Luego el flujo total es: $\mathring{Q} = 2\mathring{Q}_1 + 2\mathring{Q}_2 = -2(K_1 + K_2)A \frac{(T_2 - T_1)}{d}$

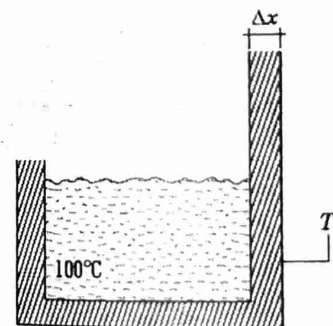
El flujo del calor a través de las cuatro barras es: $Q = -Keq\, 4A \frac{(T_2 - T_1)}{d}$

Luego: $-Keq\ 4A \frac{(T_2 - T_1)}{d} = -2(K_1 + K_2)A \frac{(T_2 - T_1)}{d}$

$$Keq = K_1 + K_2/2$$

(48) Una tetera de porcelana de $2mm$ de espesor contiene agua hirviendo. Hallar: (a) La temperatura de la superficie externa de la misma, siendo la del exterior de $20°C$, la conductividad de la porcelana 0.0025 $cal/seg\text{-}cm\text{-}°C$ y su coeficiente de radiación y conversión 0.0012 $cal/seg - cm - °C$ (b) Qué espesor habrá que dar a la tetera para que su cara exterior no sobrepase de los 50°C.

Solución:



a) El calor por conducción es:

$$\mathring{Q} = -kA\ \Delta T/\Delta x$$

El calor que se transmite por conversión es:

$$\mathring{Q} = hA\ \Delta T'$$

Como el flujo calorífico es uniforme: $-KA\ \Delta T/\Delta x = hA\,\Delta T'$

$$-0.0025A \frac{T_i - 100}{0.2} = 0.0012A(T_i - 20)$$

Luego: $T_i = 92.9°C$

b) Nuevamente el calor que se transmite por conducción es igual al calor por convección:

$$-0.0025A \frac{50 - 100}{e} = 0.0012A(50 - 20)$$

$$e = 3.47\ cm$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

01 Una muestra de 2.00 moles de helio gaseoso inicialmente a 300 k y 0,400 atm se comprime isotérmicamente a 1.20 atm. Suponiendo que el comportamiento del helio es el de un gas ideal, encuentre:

a) El volumen final del gas.
b) El trabajo realizado por el gas, y
c) La energía transferida por calor.

Rpta.: a) $0.0410\ m^3$ b) $-5{,}48kJ$ c) $-5{,}48kJ$

02 El cristal de una ventana tiene un área de $3.00\ m^2$ y un espesor de 0.600 cm. Si la diferencia de temperatura entre sus caras es de $25.0°C$, ¿cuál es la rapidez de transferencia de energía por conducción a través de la ventana?

Rpta.: $10{,}0kW$

03 A mediodía, el sol proporciona 1 000W a cada metro cuadrado de una carretera asfaltada. Si el asfalto caliente pierde energía sólo por radiación, ¿Cuál es su temperatura de equilibrio?

Rpta.: $T = 364k$

04 Cien gramos de nitrógeno líquido a 77.3K se revuelven es un vaso de laboratorio que contiene 200 g. de agua a $5.00°C$. Si el nitrógeno deja la solución tan pronto como se convierte en gas, ¿cuánta agua se congela? (El calor latente de vaporización del nitrógeno es de 48.0 cal/g. y el calor latente de fusión del agua es de 79.6 cal/g.).

Rpta.: $m = 47{,}7g$

05 Un mol de un gas ideal inicialmente a 300 K se enfría a volumen constante de modo que la presión final es un cuarto de la presión inicial. A continuación el gas se expande a presión constante hasta que alcanza la temperatura inicial. Determine el trabajo realizado por el gas.

Rpta.: $W = 1{,}87\ kJ$

06 Una máquina térmica ideal funciona según el ciclo de Carnot empleando aire caliente, el cual se toma a una presión inicial de $7\ atm$ con la temperatura de $127°C$. El volumen inicial del aire es de $2\times10^{-3}\ m^3$. Después de la primera expansión isotérmica del aire ocupó un volumen igual a $5\ l$ y después de la expansión adiabático el volumen de $8\ l$. Hallar (1) el trabajo total realizado durante el ciclo (2) el rendimiento del ciclo.

Rpta.: 1) $W = 230\ J$
2) $\eta = 0.175$

07 Un sistema termodinámica se somete a un proceso en el cual su energía interna disminuye en 500 J. Si al mismo tiempo se hacen 220 J de trabajo sobre el sistema, ¿cuál es la energía transferida a ó desde él por calor?

Rpta.: $Q = -720\ J$

08 Dos esferas metálicas, una de acero y otra de plomo, se ponen en contacto. Determine la temperatura común de los cuerpos, si hasta ese instante el medio ha absorbido 24 k J de calor.

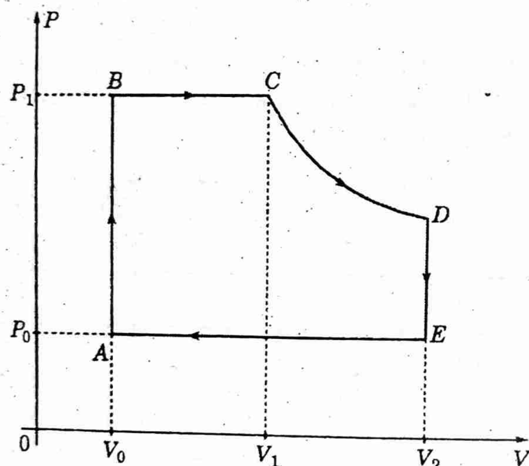
	Acero	Plomo
Masa	3kg	5kg
Calor específico	$500J/kg°C$	$140J/kg°C$
Temperatura	80°	$20°C$

Rpta.: $T = 60°C$

09 Un kilomol de gas perfecto realiza un ciclo compuesto de dos isocóras y dos isobaras. Al ocurrir esto el volumen del gas varía desde $V_1 = 25m^3$ hasta $V_2 = 50m^3$ y la presión desde $p_1 = 1atm$ hasta $p_2 = 2atm$. ¿Cuántas veces será menor el trabajo realizado con este ciclo que el que se obtiene con el ciclo de Carnot, cuyas isotermas corresponden a las temperaturas máxima y mínima del ciclo que examinaremos, si durante la expansión isotérmica el volumen del gas aumenta dos veces?

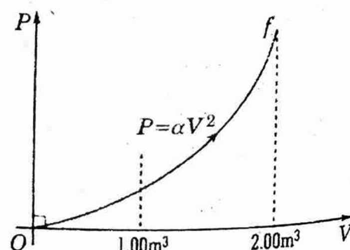
Rpta.: 2.1 veces

10 La figura, representa el ciclo de friccionamiento de una máquina de vapor ideal por el que tenemos que: cuando el vapor de la caldera comienza a entrar en el cilindro la presión en él aumenta a volumen constante V_0 desde p_0 hasta p_1 (rama AB); (b) al seguir entrando vapor en el cilindro el émbolo se mueve de izquierda a derecha (rama BC) a presión constante p_1 (c) el desplazamiento del émbolo hacia la derecha continua, pero cesa la entrada del vapor de la caldera en el cilindro, tiene lugar la expansión adiabática del vapor (rama CD), (d) cuando el émbolo llega a su posición extrema derecha el vapor del cilindro sale al condensador y la presión desciende a volumen constante V_2 hasta el valor p_0 (rama DE) y (e) al moverse el émbolo en sentido contrario le empuja al vapor que queda en el cilindro a presión constante p_0 y el volumen disminuye desde V_2 hasta V_0 (rama EA). Hallar el trabajo que realiza esta máquina en cada ciclo si $V_0 = 0.5l$, $V_1 = 1.5l$, $V_2 = 3l$, $p_0 = 1atm$, $p_1 = 12atm$, $\gamma = 1.33$.



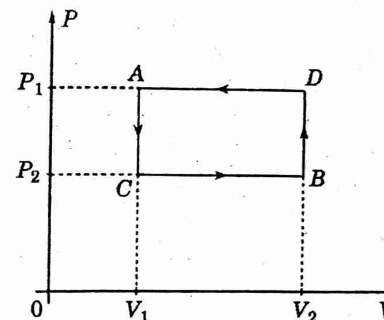
Rpta.: $W = 1920\,J$

11 Una muestra de gas ideal se expande al doble de su volumen original de $1.00\ \text{m}^3$ en un proceso cuasi-estático para el cual $P = \alpha V^2$, con $\alpha = 5.00\ \text{atm/m}^6$, como se muestra en la figura. ¿Cuánto trabajo realiza el gas en expansión?



Rpta.: $W = 1{,}18\,MJ$

12 Cierta cantidad de oxígeno ocupa el volumen $V_1 = 3\,l$ a la temperatura $t_1 = 27°C$ a la presión $p_1 = 8.2\times10^5\ N/m^2$. En un segundo estado este gas tiene los parámetros $V_2 = 4.5\,l$ y $p_2 = 6\times10^5\ N/m^2$ (a) Hallar la variación de la energía interna del gas para ACB y ADB.



Rpta.: $\Delta U = 0.63\,KJ$

13 Una barra de aluminio de 0.500 m de largo y un área de sección transversal de $2.50\ \text{cm}^2$ se introduce en un recipiente aislado térmicamente que contiene helio líquido a 4.20 K. La barra está inicialmente a 300 K.

a) Si una mitad de la barra se introduce en el helio, ¿cuántos litros de helio se evaporan durante el tiempo en que la mitad introducida se enfría a 4.20 K?

b) Si el extremo superior de la barra se mantiene a 300 K, ¿cuál es la rapidez de evaporización aproximada del helio líquido después de que la mitad inferior ha llegado a 4.20 K? (El aluminio tiene una conductividad térmica de 31.0 J/s cm. K a 4.2 K; ignore su variación de temperatura. El aluminio tiene un calor específico de 0.210 cal/g°C y una densidad de $2.70\ \text{g/cm}^3$).

La densidad del helio líquido es de $0.125\ \text{g/cm}^3$.

Rpta.: a) $16{,}8L$ b) $0{,}351L/s$

14 Una bala de plomo de 3.00 g se dispara a una rapidez de 240 m/s dentro de un gran bloque de hielo a $0°C$, en el que se incrusta. ¿Qué cantidad de hielo se derrite?

Rpta.: $m = 0{,}294\,g$

15 Un centavo de cobre de 3.00 g a 25.0°C cae desde una altura de 50.0 m en la tierra.

a) Si 60.0% del cambio en la energía potencial se emplea en aumentar la energía interna, determine su temperatura final.

b) ¿El resultado obtenido en a) depende de la masa de centavo. Explique.

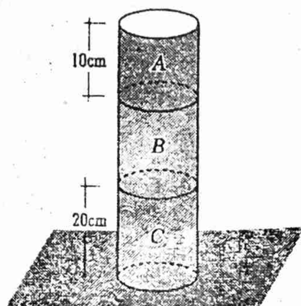
Rpta.: a) $T_f = 25{,}8°C$

b) No

16 Una máquina frigorífica ideal funciona como bomba de calor según el ciclo de Carnot inverso. Esta máquina recibe el calor del agua, que se encuentra a 2°C y lo transmite al aire, cuya temperatura es de 27°C. Hallar (1) el coeficiente n_1, es decir, la relación que existe entre la cantidad de calor cedida al aire durante un período determinado de tiempo y la cantidad de calor absorbida del agua durante este mismo período, (2) el coeficiente n_2, es decir, la relación que existe entre la cantidad de calor absorbida del agua durante un período de tiempo determinado y la energía empleada en el funcionamiento de la máquina durante este mismo período (n_2 recibe el nombre de coeficiente de funcionamiento o eficacia de la máquina frigorífica) y (3) el coeficiente n_3 es decir, la relación entre la energía empleada en el funcionamiento de la máquina durante un intervalo de tiempo determinado y la cantidad de calor cedido al aire durante este mismo tiempo (el coeficiente n_3 es el rendimiento térmico del ciclo).
Hallar n_1, n_2 y n_3.

Rpta.: $n_1 = 1.09$, $n_2 = 11$, $n_3 = 0.083$

17 Tres cilindros A, B y C del mismo material, cuyas temperaturas iniciales son 80°C, 60°C, 20°C, colocan tal como se indica. Si la temperatura final del sistema es 50°C, determine la altura del cilindro B (solamente existe transferencia de energía entre ellos).

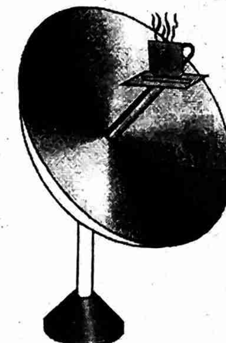


Rpta.: $h = 40$ cm

18 Dos gases distintos uno de los cuales es monoatómico y el otro diatómico, se encuentran a igual temperatura y ocupan el mismo volumen. Ambos gases se comprimen adiabáticamente de manera que sus volúmenes se reducen a la mitad. Cuál de los gases se calienta más y en cuántas veces.

Rpta.: El gas monoatómico se calienta 1.2 veces más.

19 Una "estufa" solar se compone de un gas espejo reflejante curvo que concentra la luz solar sobre el objeto que se quiere calentar (Fig. P20.63): La energía solar por unidad de área que llega a la tierra en la localidad es de $600 W/m^2$, y la estufa tiene un diámetro de 0.600 m. Suponiendo que 40.0% de la energía incidente se transfiere al agua, ¿cuánto tiempo tardarían en hervir por completo 0,500 litros de agua inicialmente a 20°C? (Ignore la capacidad calorífica del recipiente).



Rpta.: $t = 5{,}37h$

20 El diámetro del cilindro de un motor de combustión interna con carburador es de 10 cm y la carrera del émbolo es igual a 11cm. (1) Qué volumen debe tener la cámara de compresión, sabiendo que la presión inicial es de 127°C y que la presión final en dicha cámara después de la compresión es igual a 10 atm? (a) ¿Cuál será la temperatura del gas en la cámara después de la compresión? (3) ¿Qué trabajo se realiza durante la compresión. Si $\gamma = 1.3$

Rpta.: 1) $V_2 = 1.76\times10^{-4} m^3$

2) $T_2 = 407°C$

3) $W = 243 J$

21 Una burbuja de aire de 20 cm^2 de volumen se encuentra en el fondo de 40 m de profundidad en donde la temperatura es de 4°C. La burbuja se eleva hasta la superficie que esta a una temperatura de 20°C.
Considerar que la temperatura es igual a la del agua que rodea y encontrar su volumen cuando está a punto de llegar a la superficie.

Rpta.: $V = 1\times10^{-4} m^3$

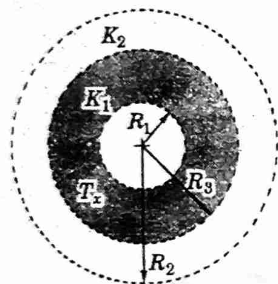
22 Un bloque de cobre de 1.00 kg a $20.0°C$ se sumerge en un gran recipiente de nitrógeno líquido a 77.3K? (El calor específico del cobre es de $0.0920 \text{cal}/g°C$. El calor latente de vaporización del nitrógeno es de $48.0 \text{cal}/g$)

Rpta.: 0,414 kg

23 En un recipiente aislada se agregan 250 g. de hielo a $0°C$ a 600 g. de agua a $18.0°C$.
a) ¿Cuál en la temperatura final del sistema?
b) ¿Qué cantidad de hielo queda cuando el sistema alcanza el equilibrio?

Rpta.: a) 0°C b) 114 g.

24 Dos esfera concéntricas huecas de radio R_1 y R_2 y temperaturas interna T_1 y externa T_2 $(T_1 > T_2)$ y conductividades térmicas K_1 y K_2 respectivamente. Hallar la temperatura entre las esferas a la distancia R_3 y el flujo calorífico, ver figura.



Rpta.: $T_x = \dfrac{AT_1 + BT_2}{A+B}$

donde: $A = R_1K_1/(R_3 - R_1)$

$B = R_2K_2/(R_2 - R_3)$

$\overset{\circ}{Q}_1 = \dfrac{4\pi K_1 R_1 R_3 B\,(T_1 - T_2)}{(R_3 - R_1)\,(A+B)}$

25 La temperatura de una barra de plata aumenta 10.0°C cuando absorbe 1.23 kJ de energía por calor. La masa de la barra es de 525 g. Determine el calor específico de la plata.

Rpta.: $Ce = 0{,}234\,\text{kJ/kg°C}$

26 Una herradura de hierro de 1.50 kg. inicialmente a $600°C$ se sumerge en una cubeta que contiene 20.0kg de agua a $25.0°C$. ¿Cuál es la temperatura final? (Ignore la capacidad calorífica del recipiente y suponga que hierve una cantidad despreciable de agua.)

Rpta.: $T = 29{,}0°C$

27 A través de un aislador cilíndrico de radio exterior R_1 que rodea a un tubo de conducción de vapor de radio exterior R_2, fluye calor radialmente hacia afuera. La temperatura de la superficie interior del aislador es T_1 y la de la superficie exterior es T_2. ¿A qué distancia contada desde el centro del tubo, es la temperatura igual justamente a la semisuma de T_1 y T_2?.

Rpta.: $R = \sqrt{R_1R_2}$

28 El agua en la parte superior de las cataratas del Niágara tiene una temperatura de $10.0°C$. El elemento cae una distancia total de 50.0 m. Suponiendo que toda su energía potencial se emplea para calentar el agua, calcule la temperatura del agua en el fondo de las cataratas.

Rpta.: $T = (10.0 + 0{,}117)°C$

29 Un calorímetro de aluminio con una masa de 100 g. contiene 250 g de agua. El calorímetro y el agua están en equilibrio térmico a 10.0°C. Dos bloques metálicos se colocan en el agua. Uno es una pieza de cobre de 50.0 g. a 80.0°C, el otro bloque tiene una masa de 70.0 g y originalmente está a una temperatura de 100.0°C.
a) El sistema completo se estabiliza en una temperatura final de $20.0°C$. Determine el calor específico de la muestra desconocida.
b) Adivine el material desconocido usando los datos proporcionados en la tabla 20.1.

Rpta.: a) $Ce = 0{,}435\,\text{cal}/g°C$ b) Berilio.

30 (a) Las temperaturas en ambas caras de un disco de extensión infinita son T_1 y T_2. ¿Cuál es la distribución de temperatura en el interior del disco en estado estacionario? (b) ¿Cuál es la distribución de temperatura correspondiente a un tubo de paredes gruesas manteniendo a temperaturas constantes en el interior y en el exterior?

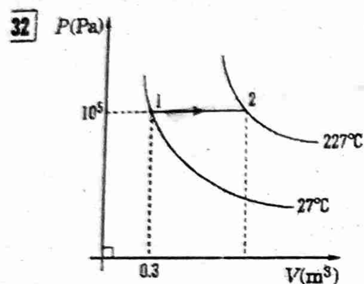
Rpta.: a) $T = \dfrac{(T_2 - T_1)}{d}x + T_1$; d : espesor de la placa

b) $T = \dfrac{(T_2 - T_1)}{\text{Ln}(r_2/r_1)}\text{Ln}(r_2/r_1) + T_1$

31 Un gas ideal se expansiona desde V_1 a V_2. La transformación puede ser isobárica, isotérmica ó adiabática. Representar gráficamente en un diagrama $p-V$ cada una de estas transformaciones. ¿En cuál de ellas es mayor Q? ¿Y menor?. ¿En cuáles W tiene el mayor y el menor valor? ¿En cuáles, U tiene el mayor y el menor valor?

Rpta.: $Q_{icobárico} > Q_{isotermico}$

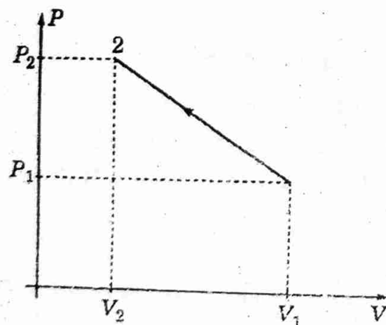
$W_{isobárico} > W_{isotermico}$

32 

Un gas ideal experimenta una expansión tal como se muestra. Si a dicho gas se le entregó la misma cantidad de calor que necesita 10 g. de agua a $80°C$ para vaporizarse completamente, ¿en cuánto varía la energía interna del gas? $(1\text{cal} = 4{,}2\text{J})$

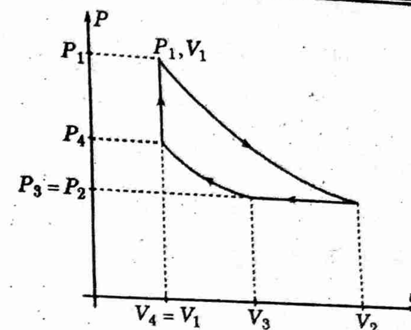
Rpta.: $\Delta W = 7{,}25\text{k J}$

33 Veinte gramos de helio, encerrados en un cilindro por un pistón se transforman de un modo infinitamente lento del estado con volumen $V_1 = 32\,l$ y presión $p_1 = 4.1\,\text{atm}$ al estado con volumen $V_2 = 9\,l$ y $p_2 = 15.5\,\text{atm}$. ¿Cuál será la mayor temperatura alcanzada por el gas en este proceso, si en el gráfico de la dependencia de la presión en función del volumen del gas el proceso está representado por una línea recta?



Rpta.: $T_{máx} = 488°K$

34 Un ciclo se compone de una transformación a volumen constante y de otra a presión constante, separados ambos por dos transformaciones adiabáticas. El estado inicial p_1, υ_1, T_1 se da, así como los grados de expansión ε y ε_1, de las transformaciones adiabáticas. Hallar el trabajo de dilatación del ciclo y el calor necesario para efectuarlo.



$$\varepsilon = \upsilon_1/\upsilon_2 \quad ; \quad \varepsilon_1 = \upsilon_4/\upsilon_3$$

Rpta.: $W = \frac{p_1\upsilon_1}{\gamma-1}\frac{1}{\varepsilon_1^{\gamma}}\left[\varepsilon^{\gamma}(\gamma\varepsilon_1^{\gamma-1}-1)-\varepsilon_1^{\gamma}(\gamma\varepsilon^{\gamma-1}-1)\right]$

$$Q = T_1\varepsilon^{\gamma}\left[Cp\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon}\right)+Cv\left(\frac{1}{\varepsilon^{\gamma}}-\frac{1}{\varepsilon_1^{\gamma}}\right)\right]$$

35 Un calentador de agua funciona por medio de energía solar: Si el colector solar. Si el colector solar tiene un área de $6.00\,\text{m}^2$ y la energía entregada por la luz solar es de $550\,\text{W/m}^2$, ¿Cuánto tarda en aumentar la temperatura de $1.00\,\text{m}^3$ de agua de $20.0°C$ a $60.0°C$?

Rpta.: $t = 50{,}7\text{ Ks}$

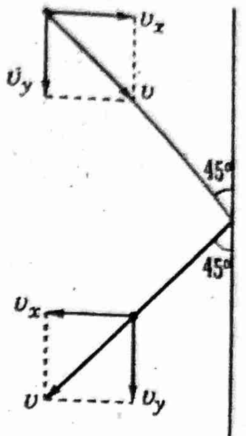
36 Si 90.0 g. de plomo fundido a $327.3°C$ se vierten en un molde de 300 g. hecho de hierro inicialmente a $20.0°C$, ¿Cuál es la temperatura final del sistema? (Suponga que no hay pérdida de energía a la atmósfera).

Rpta.: $T_f = 59{,}4\,°\text{C}$

37 Un cuerpo esférico de 1cm de diámetro está a una temperatura de 727°C. Suponiendo que irradia como si fuera un cuerpo negro. Hallar la cantidad de calor irradiada por unidad de tiempo emitida por su superficie.

Rpta.: $\overset{\circ}{Q} = 4.25\ cal/seg$

38 La masa de la molécula de H_2 es de 3.32×10^{-27} kg. Si cada segundo chocan 10^{23} moléculas de hidrógeno contra $2\ \text{cm}^2$ de pared formado un ángulo de 45° con la normal al moverse con una velocidad de 10^3 m/s. ¿Qué presión ejercerán sobre la pared?



Rpta.: $\overline{P} = 2340 N/\text{m}^2$

39 Un calorímetro de flujo es un aparato que se utiliza para medir el calor específico de un líquido. La técnica del calorímetro de flujo consiste en medir la diferencia de temperatura entre los puntos de entrada y salida de una corriente del líquido que fluye mientras se agrega energía por calor a una rapidez conocida. En un experimento particular, un líquido de $0.780\ \text{g/cm}^3$ de densidad fluye por el calorímetro a una proporción de $4.00\ \text{cm}^3/\text{s}$. En estado estable, se establece una diferencia de temperatura de $4.80°C$ entre los puntos de entrada y salida cuando la energía se suministra por calor a razón de $30.0\ J/s$. ¿Cuál es el calor específico del liquido?

Rpta.: $Ce = 2{,}00\text{kJ}/\text{kg}\,°\text{C}$

40 Un proyectil cuya temperatura es de $30°C$ y su calor específico 0.09, es detenido por una placa de acero. La velocidad del proyectil es de 500 m/s en el instante del choque, y el calor producido se divide igualmente entre el proyectil y la placa ¿Cuál es la temperatura que alcanza el proyectil?

Rpta.: $t = 192°C$

41 Un cilindro de $2cm^2$ de sección, se dispone vertical. El cilindro contiene $40cm^3$ de aire a atm, el cual será encerrado mediante un émbolo se coloca un bloque de 52 kg el cual desciende lentamente hasta quedar en equilibrio. Si el sistema es impermeable al calor. ¿Cuándo desciende el émbolo? y ¿cuánto trabajo desarrolló el aire durante el proceso?
$(Cp = 0{,}24; Cv = 0{,}16)\text{kJ}/\text{kgK}\ (g = 10\ \text{m/s}^2)$

Rpta.: $h = 14{,}22\text{cm}$; $W = -12\text{J}$

42 El calor específico verdadero del grafito, referido al átomo gramo, viene dado por la expresión:

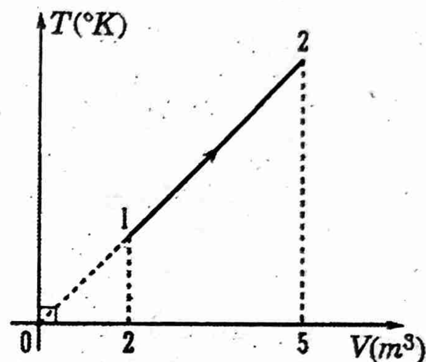
$$C = 2.67 + 2.62\times10^{-3}T - 1.17\times10^{-5}T^{-2} \text{ donde } T \text{ en } °K$$

Calcular la cantidad de calor que precisan 10 kg de grafito para elevar su temperatura de 50 a 300°C

Rpta.: $Q = 800\,Kcal$

43 Un gas ideal realiza el proceso que se muestra.

Si $P_1 = P_0$ y la variación en la energía interna es $\Delta U = 3J$; halle la cantidad de calor transferido.



Rpta.: $Q = 2(P_0 - 1)$

44 Consideremos un gas perfecto a $0°C$ y la presión de una atmósfera. Imaginemos que cada molécula está, por término medio, en el centro de un pequeño cubo.

a) ¿Cuál es la longitud de la arista de éste?

b) ¿Qué relación existe entre esta distancia y el diámetro de una molécula $(3\times10^{-8}\,\text{cm})$

Rpta.: a) $L = 3{,}3\times10^{-7}\,\text{cm}$ b) $\frac{L}{D} = 11$

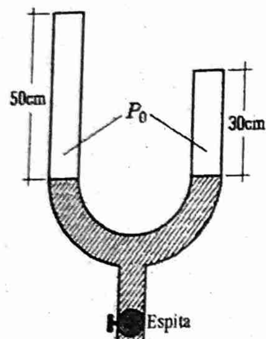
45 En un calorímetro de cobre de 25g de peso se ponen 100gr de alcohol a 10 °C, se introduce una masa de cobre de 50 g a 100 °C y la temperatura de equilibrio es 16 °C. Siendo 0.095 al calor específico del cobre, hallar el calor específico del alcohol.

Rpta.: $Ce = 0.641$

46 Calcular en número de moléculas que tienen un gas encerrado en un volumen de $1.00\,\text{cm}^3$ a una presión de $1.00\times10^2\,\text{N/m}^2$ y a una temperatura de 200k.

Rpta.: $N = 3{,}62\times10^{16}$ moléculas.

47 Un manómetro con mercurio tiene dos ramas desiguales cerradas y contiene aire a la misma presión P_0 en las dos ramas como se muestra en la figura. El área de la sección transversal de las ramas del manómetro es de 1cm^2.



Conservándose la temperatura constante, por la espita que lleva en su base, se introducen otros 10 cm^3 de mercurio; el nivel del lado izquierdo se eleva 6 cm. y el del lado derecho 4 cm.

Encontrar la presión P_0.

Rpta.: $P_0 = 1{,}5\times10^5 N/m^2$

48 Se mezclan 8 kg de agua a 100°*C* con 2 kg de hielo. (a) ¿Cuál será la temperatura de la mezcla? (b) Y si, en lugar de 2 kg, añadiéramos 15 kg de hielo? (c) Y si estos 15 kg estuvieran a 20°*C* bajo cero. *Ce* (hielo) = 0.5

Rpta.: a) $t = 64°C$.
b) Se obtendrá una mezcla de 18 kg de agua y 5 kg de hielo a 0°*C*.
c) Se obtendrá una mezcla de 16.125 kg de agua y 6.875 kg de hielo a 0°*C*.

49 Un mol de agua líquida ocupa un volumen de 18 cm^3, imaginemos que cada molécula se encuentra, por términos medio, en el centro de un pequeño cubo. ¿Cuál es la longitud de la arista de este cubo?.

Compárese esta distancia con el diámetro de una molécula: $3\times10^{-8} = cm$

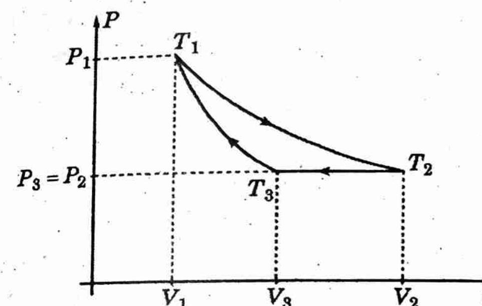
Rpta.: $L = 3{,}1\times10^{-8}\text{ cm}$

50 La velocidad del sonido en el aire a 27°*C* es alrededor de 330m/s. Compárese esta velocidad con la velocidad cuadrática media de las moléculas de nitrógeno a la misma temperatura.

Masa de un átomo de hidrógeno: $1.66\times10^{-27} kg$

Rpta.: $V_{cm} = 517$ m/s

51 Una cantidad de gas de volumen V_1 y presión p_1 realiza sucesivamente las siguientes 3 transformaciones: la primera isotérmica, con un grado de expansión $\varepsilon = V_1/V_2$; la segunda a presión constante; y la ultima adiabática. El estado final es idéntico al del principio. Calcular el trabajo de dilatación del gas y el calor puesto en juego durante el ciclo.

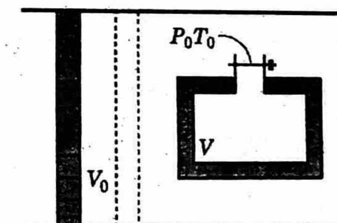


Rpta.:

$$W = p_1 v_1 \left\{ \text{Ln}(1/\varepsilon) - \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(1-\varepsilon^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)\right\}$$

$$Q = p_1 v_1 \left\{ \text{Ln}(1/\varepsilon) - \frac{\gamma}{\gamma-1}\left(1-\varepsilon^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)\right\}$$

52 En un recipiente térmicamente aislado con volumen interno *V* se ha practicado un vacío profundo. El aire circundante tiene la temperatura T_0 y presión atmosférica P_0. En cierto momento se abre el grifo, después de lo cual tiene lugar la rápida carga del recipiente con el aire.



¿Qué temperatura *T* tendrá el aire en el recipiente una vez que se llene?

Rpta.: $T < T_0$

53 Se introducen 3 litros de oxígeno medidos a 15°*C* y 760 mm con 8 litros de hidrógeno medidos a 20°*C* y 750 mm y 4 litros de nitrógeno a 12°*C* y 710 mm en un recipiente de 6 *lt* de capacidad y temperatura 16°*C*. ¿Cuál será la presión de la mezcla?

Rpta.: $P = 1847mm$.

54 Se desea insertar un anillo de 2 cm de radio interno en un tubo de 2,1 cm de radio externo. El anillo inicialmente esta a 15 °C. ¿Hasta qué temperatura se deberá calentar el anillo para lograr el objetivo?.

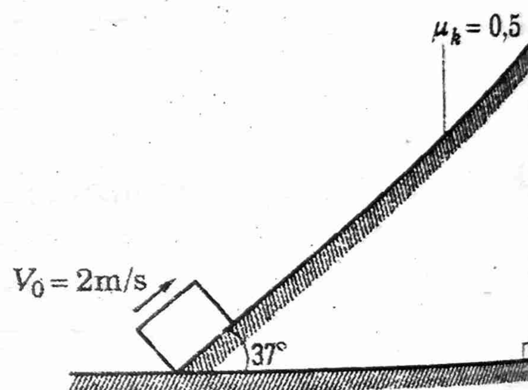
El coeficiente de dilatación lineal del anillo es 10^{-3} °C^{-1}.

Rpta.: $T = 65°C$

55 Un recipiente de vidrio de capacidad 2 000 cm^3 está lleno de mercurio. Si la temperatura se incrementa en 100 °C, el recipiente alcanza un volumen de 2010 cm^3. Calcule el volumen de mercurio que se derrama. (Coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio es $\gamma_{Hg} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}$ °C)

Rpta.: $V = 26\ cm^3$

56 En la figura se muestra un bloque de masa 2 kg que es lanzado desde la base de una rampa, con una rapidez de 2 m/s. Si la rampa es de superficie rugosa, calcule la cantidad de energía que se transforma en calor. $(1J = 0{,}24\ cal)$.



Rpta.: $Q = 0{,}384$ cal

CAPÍTULO VIII

ENTROPÍA Y LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

Definamos lo que es un foco calorífico: es un cuerpo de masa muy grande capaz de absorber o ceder una cantidad ilimitada de calor sin experimentar cambios apreciables en sus variables termodinámicas.

PROCESO REVERSIBLE

Es aquel que tiene lugar de tal modo que al finalizar el mismo tanto el sistema como el medio inmediato pueden ser reintegrados a sus estados iniciales, sin ocasionar ningún cambio en el resto del universo: es decir debe satisfacer dos requisitos:

a) Que se realice cuasi-estáticamente, y
b) Que no esté acompañado de efectos disipativos.

Un proceso que no cumple estos requisitos se dice que es irreversible, de aquí concluimos que todos los procesos naturales son irreversibles.

Ciclo de Carnot

Ciclo, es una sucesión de procesos tales que el sistema vuelva a su estado de equilibrio original, si los procesos son reversibles, entonces se trata de un ciclo reversible.

La figura 82 representa un ciclo, en el cual el sistema pasa de $a \rightarrow c$ dilatándose y el área debajo de esta curva representa el trabajo realizado por el sistema. Después el sistema pasa de $c \rightarrow a$ comprimiéndolo y el área debajo de esta curva representa el trabajo que debemos hacer sobre el sistema. Luego el área encerrada en un ciclo *abcda*, representa el trabajo efectivo realizado por el sistema.

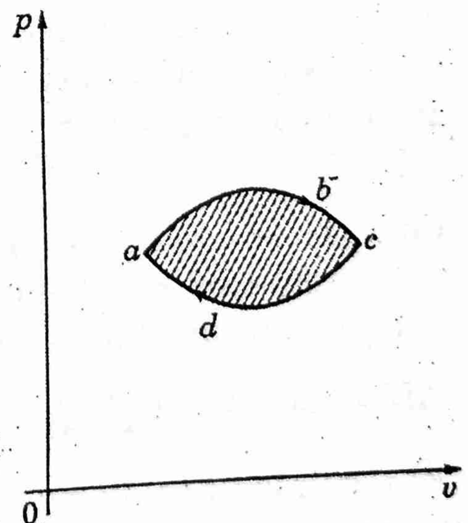


Fig. 82 *Ciclo reversible*

Durante una parte del ciclo realizado, la sustancia absorbe calor de un foco caliente y durante otra cede una cantidad menor de calor al foco frío. Por esta razón se dice que el sistema funciona entre estos dos focos.

Fue Nicolás Carnot quien se preguntó ¿Cuál es el máximo rendimiento que puede obtenerse de un motor que trabaja entre estos dos focos?

El sistema consta de una sustancia (gas) y el ciclo está formado por dos procesos isotérmicos y dos adiabáticos, figura 83, y se realizan cuatro procesos en el orden que se indica. El sistema se halla en el estado d.

i) Un proceso adiabático reversible en sentido tal que la temperatura se eleve de T_2 (foco frío) a T_1 (foco caliente).

ii) El sistema se halla en el estado a y se realiza un proceso isotérmico reversible en el sentido $a \to b$ y se absorbe calor Q_1 del foco caliente.

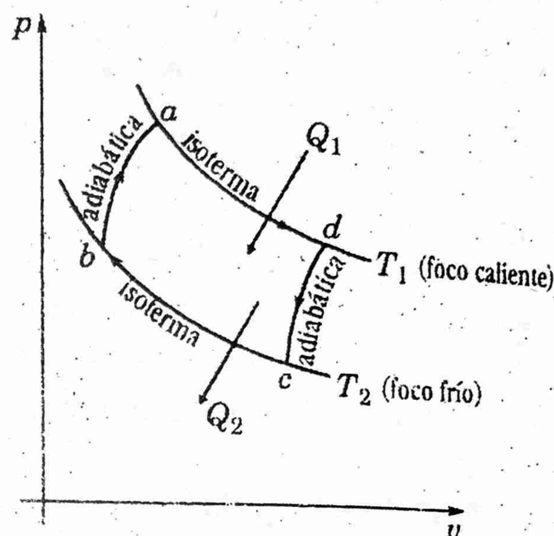


Fig. 83 *Ciclo de Carnot*

iii) Un proceso adiabático reversible $b \to c$, hasta que la temperatura descienda a T_2 del foco más frío.

iv) El sistema se mantiene en contacto con el foco de temperatura T_2 y se realiza un proceso isotérmico reversible de $c \to d$, hasta que el sistema vuelva a su estado inicial. Durante este proceso, se cede el calor Q_2 al foco frío.

El trabajo neto W efectuado por el sistema, durante el ciclo está dado por el área encerrada por la curva *abcda*. La cantidad de calor recibida por el sistema en el ciclo es: $\Delta Q = Q_1 - Q_2$

Como el estado inicial y final son los mismos, entonces no hay cambio neto en la energía interna U del sistema.

$$\Delta U = \Delta Q - W = (Q_1 - Q_2) - W = 0, \quad W = Q_1 - Q_2$$

El resultado es una conversión de calor en trabajo y se tiene el sistema que trabaja como una máquina térmica, figura 84 (a).

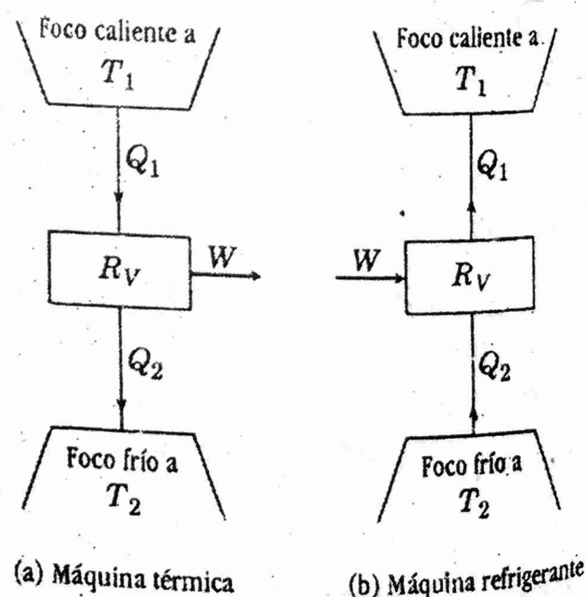


Fig. 84

Como el ciclo de Carnot, está formado por procesos reversibles, luego cuando se realiza en sentido opuesto el proceso, se tendrá una máquina frigorífica: es decir, el sistema transporta calor de un cuerpo a baja temperatura (T_2) a otro de mayor T_1 temperatura, figura 84 (b).

Eficiencia o rendimiento térmico

Se define como la relación de trabajo neto realizado W por la máquina durante un ciclo, al calor Q_1 tomado por ella de la fuente de temperatura elevada T_1 en un ciclo, es decir:

$$n = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Enunciado de Clausius y de Kelvin-Planck del Segundo Principio de la Termodinámica

En una máquina térmica real, parte del calor Q_1 se convierte en trabajo W y el resto se expulsa como calor Q_2, figura 85 (a).

En una máquina térmica ideal o perfecta, todo el calor se convierte en trabajo aprovechable, figura 85 (b).

ENUNCIADO DE KELVIN-PLANCK

Una transformación cuyo único resultado final sea transformar en trabajo calor extraído de alguna fuente que se encuentre en toda su extensión a la misma temperatura es imposible. Otra forma es: Es imposible construir un motor que funcionando según un ciclo, no produzca otro efecto que extrae calor de un foco y realizar una cantidad equivalente de trabajo.

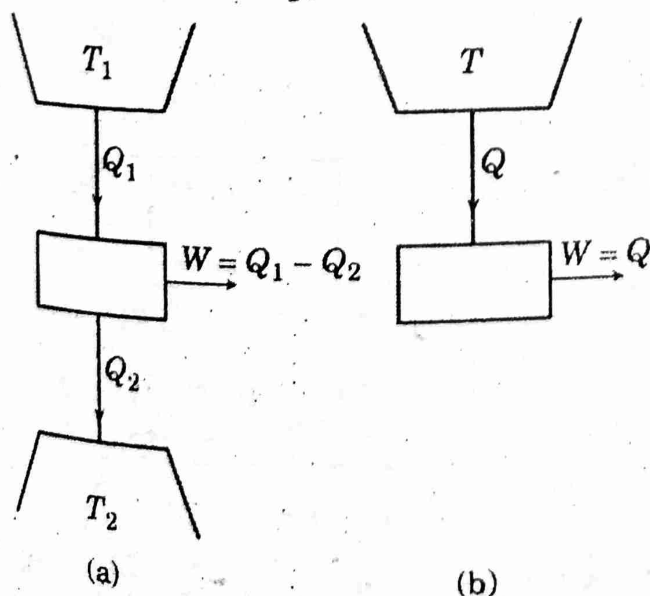


Fig. 85 a) *Máquina térmica real.*
b) *Ideal*

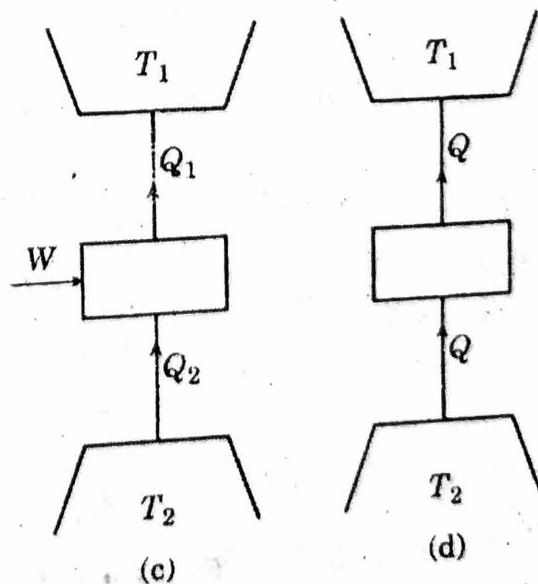


Fig. 86 a) *Máquina refrigerante real*
b) *Ideal*

En un refrigerador real, figura 86(a), se necesita un trabajo W para transportar calor de un depósito de baja temperatura T_2 a otro de elevada temperatura T_1.

En un refrigerador ideal, el calor fluiría del depósito de baja temperatura T_2 al de elevada temperatura T_1 sin que haya que hacer ningún trabajo sobre la máquina. Figura 86(b).

ENUNCIADO DE CLAUSIUS

Es imposible que una máquina cíclica produzca exclusivamente el efecto de hacer pasar calor continuamente de un cuerpo a otro que se encuentre a una temperatura más elevada. Otra forma: Es imposible construir un dispositivo que funcione según un ciclo y no produzca otro efecto que el paso de calor de un cuerpo a otro más caliente.

TEOREMA DE CARNOT

Ningún motor que funcione entre dos focos caloríficos dados puede tener un rendimiento superior al de un motor de Carnot que funcione entre los dos mismos focos.

Sea el motor de Carnot reversible (R) que absorbe calor Q_1 del foco caliente y realiza un trabajo W. Luego cede la cantidad de calor $Q_1 - W$ al foco frío. Su rendimiento será: $n_R = W/Q_1$.

El otro motor irreversible (I) absorbe calor Q_1' del foco caliente y realiza el trabajo W y cede la cantidad de calor $Q_1' - W$ al foco frío. Su rendimiento será: $n_I = W/Q_1'$.

Supongamos que $n_I > n_R$, $\frac{W}{Q_1'} > \frac{W}{Q_1}$, $Q_1 > Q_1$

Ahora según la figura 87, el motor I acciona el motor R, como una máquina refrigerante acoplados de este modo forman una máquina que extrae calor del foco frío:

$$(Q_1 - W) - (Q_1' - W) = Q_1 - Q_1'$$

Como: $Q_1 > Q_1'$, entonces $Q_1 - Q_1' > 0$

El calor neto suministrado al foco caliente es asimismo: $Q_1 - Q_1'$.

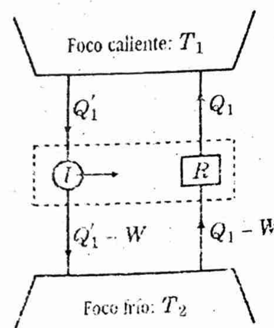


Fig. 87 *Motor I accionando una máquina frigorífica de Carnot*

Luego hemos hallado una máquina que transfiere calor $Q_1 - Q_1'$ de un foco frío a otro caliente y esto contradice el enunciado de Claussius, porque nuestra hipótesis de $n_1 > n_R$ es falsa. Debe cumplirse $n_1 < n_R$.

Entropía-Procesos reversibles (Teorema de Claussius)

Sea un proceso reversible dado por la curva de $i \to f$, según la figura. 88. Las curvas que pasan por i y f son dos adiabáticos. Trazamos una curva ab que represente un proceso isotérmico, tal que el área debajo de la curva if, sea igual al área debajo de la curva $iabf$.

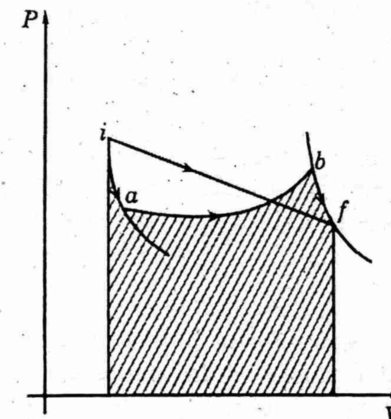


Fig. 88 *Proceso reversible*

Luego se tendrá: $W_{if} = W_{iabf}$

$$Q_{if} = (U_f - U_i) + W_{if}$$

$$Q_{iabf} = (U_f - U_i) + W_{iabf}$$

$$Q_{if} = Q_{ia} + Q_{ab} + Q_{bf}$$

como $Q_{ia} = Q_{bf} = 0$, entonces $Q_{if} = Q_{ab}$

Consideremos una curva cerrada continua que representa un ciclo reversible en el diagrama de trabajo, figura 89.

Consideremos una trayectoria quebrada formada por porciones alternos de adiabáticos y de isotermas, tales que el calor transferido durante todas las porciones isotérmicas sea igual al calor transferido durante el ciclo inicial.

Sean dos procesos isotérmicos ab a la temperatura T_1, durante el cual es absorbido el calor Q_1, y cd a la temperatura T_2 durante el cual se cede el calor Q_2.

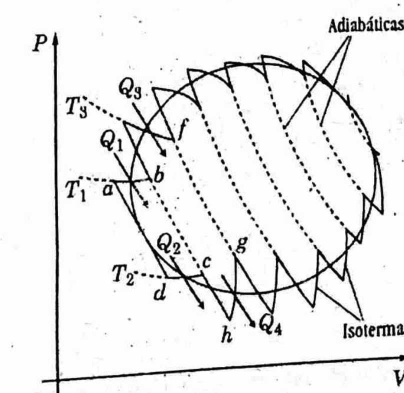


Fig. 89 *Diagrama de trabajo*

Como ab y cd están limitados por las mismas adiabáticas, $abcd$ es un ciclo de Carnot y podemos expresar la relación siguiente:

$$\frac{Q_1}{T_1} = -\frac{Q_2}{T_2} \qquad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

De igual forma para las isotermas *ef* y *gh* están limitadas por las dos mismas adiabáticas (*efgh*), también es un ciclo de Carnot, y:

$$\frac{Q_3}{T_3} = -\frac{Q_4}{T_4} \ , \ \frac{Q_3}{T_3} + \frac{Q_4}{T_4} = 0 \ , \ \Sigma\frac{Q_i}{T_i} = 0$$

donde la suma se extiende al ciclo quebrado completo.

Cuando estos procesos adiabáticos e isotérmicos, se hacen infinitesimales, en el límite, para un ciclo reversible se tiene:

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

El círculo que está junto al signo de la integral, significa que la integración se extiende a un ciclo completo, y la letra R destaca el hecho de que la ecuación es válida para un ciclo reversible. Esto constituye el *Teorema de Claussius*.

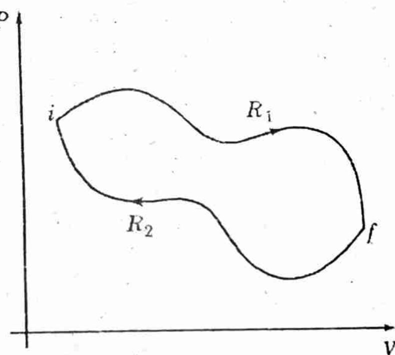


Fig. 90 *Diagrama pV de trabajo*

Sea un diagrama $p-V$ de trabajo, tal como se indica en la figura 90. Sea un estado inicial de equilibrio (i) de un sistema termodinámico y un estado final de equilibrio (f).

Ahora pasamos de (i) a (f) a lo largo de la trayectoria reversible R_1 y después regresamos a i siguiendo otra trayectoria reversible R_2. Como ambas trayectorias constituyen un ciclo reversible, y según el teorema de Claussius, se tiene :

$$R_1R_2\oint\frac{dQ}{T} = 0 \ , \ R_1\int_i^f\frac{dQ}{T} + R_2\int_f^i\frac{dQ}{T} = 0 \ , \ R_1\int_i^f\frac{dQ}{T} = -R_2\int_f^i\frac{dQ}{T}$$

Como R_2 es una trayectoria reversible: $-R_2\int_f^i\frac{dQ}{T} = R_2\int_i^f\frac{dQ}{dT}$

Luego: $R_1\int_i^f\frac{dQ}{T} = R_2\int_i^f\frac{dQ}{T}$

Esto significa que la expresión $R\int_i^f\frac{dQ}{T}$ es independiente de la trayectoria que une i con f.

Entonces existe una función de las variables termodinámicas de un sistema cuyo valor en el estado final menos su valor en el estado inicial es igual a la integral : $R\int_i^f\frac{dQ}{T}$. Esta función se denomina entropía y se designa por S. Ahora, si S_i es la entropía en el estado inicial y S_{f_o} es la entropía del estado final, se tiene : $\Delta S = S_f - S_i$.

$$\Delta S = R\int_i^f\frac{dQ}{T} \quad , \quad S_f - S_i = R\int_i^f\frac{dQ}{T}$$

Entropía y la Segunda Ley de la Termodinámica

La segunda Ley de la Termodinámica dice: Un proceso natural que comienza en un estado de equilibrio y termina en otro se desarrollará en el sentido que haga que aumente la entropía del sistema más el medio ambiente, es decir para procesos irreversibles.

$S_s + S_{ma}$: aumenta, donde S_s : entropía del sistema

S_{ma} : entropía del medio ambiente,

$\Delta S_s + \Delta S_{ma > 0}$

Para procesos reversibles que se desarrollan en cualquier dirección y enunciamos: La entropía del sistema más el medio ambiente permanece inalterados, es decir:

$$S_s + S_{ma} = \text{constante}$$

$$\Delta S_s + \Delta S_{ma} = 0$$

La entropía de un sistema es una propiedad del estado del sistema. Cuando un sistema pasa de un estado a otro la variación de su entropía es independiente de los procesos realizados.

Una transformación reversible de un sistema, aislado o no en la cual la entropía del sistema no varía, se llama transformación *isoentrópica*.

Luego, en un sistema aislado los procesos que pueden ocurrir con mayor *probabilidad* son aquellos en los cuales la entropía aumenta o permanece constante.

Por consiguiente hay muchos procesos que podrían ocurrir ya que cumplen con otra leyes tales como la conservación de la energía. Pero es improbable que ocurran porque violarían la segunda Ley o sea la exigencia $\Delta S => 0$, (donde S: entropía del sistema más la entropía del medio ambiente).

Entropía y desorden

Si se abandona a sí mismo un sistema de 10^{20} moléculas y cada uno de los cuales puede existir en un número infinito de estados de energía, sujeto únicamente a las restricciones de número constante y energía constante, llegará al estado de probabilidad más alta: este es el *estado de equilibrio*.

Como en un proceso que tiende al equilibrio, la entropía aumenta, luego debe haber alguna relación entre la propiedad macroscópica de entropía y la propiedad microscópica de probabilidad termodinámica: P. Esta relación fue enunciada por Ludwig Boltzmann y es:

$$S = K \operatorname{Ln} P \quad \text{y} \quad K = 1.38\times10^{-8}\ erg/grado$$

Tanto la entropía como la probabilidad termodinámica pueden ser consideradas desde un punto de vista algo diferente: el de *desorden molecular*.

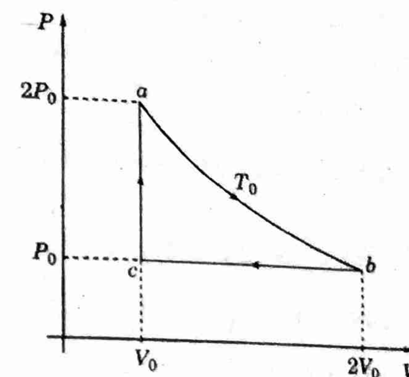
Si un gas ocupa una región restringida y no hay moléculas en otro lugar, se dice que corresponde a un estado de muy bajo desorden. Ahora, si el gas expande, este ocupa un espacio mayor y corresponderá a un estado de *mayor desorden*.

En la naturaleza hay una tendencia hacia un estado de mayor desorden: las rocas se disgregan, el hierro se oxida, las máquinas se desgastan.

La característica cuantitativa del estado termodinámico del cuerpo que define la tendencia a pasar a otros estados, es el número de las maneras microscópicas con que se puede lograr este estado. Este número se denomina peso estadístico, probabilidad del estado o probabilidad termodinámica y lo designaremos con P. El cuerpo abandonado a sí mismo tiende a pasar a un estado de mayor peso estadístico.

PROBLEMAS RESUELTOS

01 Un mol de un gas ideal efectúa un proceso cíclico $ABCA$, como se muestra en la figura PV. (a) Hallar el calor cedido al gas en el proceso AB. (b) El cambio en la entropía del gas en el proceso ACB. (c) La temperatura T_c



Solución:

a) En el proceso AB:

$$\Delta U = Q - W = 0 \text{ (isotérmico)}$$

$$Q = Q = \int p\,dV = \int_{V_0}^{2V_0} \frac{nRT_0}{V}\,dV$$

$$nRT_0\,Ln\,(2V_0/V_0) = nRT_0 Ln 2$$

Como $n=1$, $2P_0V_0 = nRT_0$ en el estado a.

Luego: $Q = 2P_0V_0 \operatorname{Ln} 2$

c) El cambio de entropía en el proceso ACB:

$$\Delta S = \int_{ac}^{cb} \frac{dQ}{T} = \int_a^c \frac{dQ}{T} + \int_c^b \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_c} \frac{nCv\,dT}{T} + \int_{T_c}^{T_0} \frac{nCp\,dT}{T} \quad \text{.........................} (\alpha)$$

$P_0V_0 = nRT_c$ (en el estado C) y $P_0V_0 = nRT_0$ (en el estado a)

Dividiendo ambas igualdades: $P_0V_0/2P_0V_0 = nRT_c/nRT_0$, $T_c = T_0/2$

b) Reemplazando en (α), el valor de T_c

$$\Delta S = nCv\operatorname{Ln}(T_c/T_0) + nCp\operatorname{Ln}(T_0/T_c)$$

$$\Delta S = nCv\operatorname{Ln}\left(\tfrac{1}{2}\right) + nCp\operatorname{Ln} 2 = nCv\operatorname{Ln}\left(\tfrac{1}{2}\right) + n(Cv+R)\operatorname{Ln} 2$$

Simplificando: $\Delta S = R \operatorname{Ln} 2$

02 El rendimiento de un motor de automóviles es de 24%. ¿Cuántos litros de gasolina se usan por hora, para que un motor desarrolle una potencia de $25Kw$? Considere el calor de combustión de la gasolina $11{,}500\ cal/g$ y su densidad $0.74\ g/cm^3$.

Solución:

Usaremos la expresión: $n \times P \times 4.166 \frac{cal}{seg} \times t(seg) = Q_0\left(\frac{cal}{seg}\right)p\left(\frac{g}{cm^3}\right)V(cm^3)$

De donde $V/t = nP\,4.186/\rho Q_c$, reemplazando valores:

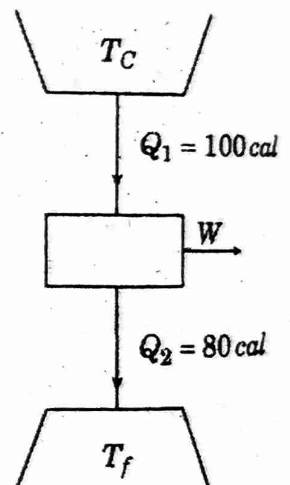
$P = 25\times10^3 W$, $Q_c = 11{,}500\ cal/g$, $\rho = 0.74\ g/cm^3$, $n = 0.24$

$V/t = 11\ lt/h$

03 Una máquina Carnot cuya fuente caliente está a $400°K$ absorbe 100 cal de calor de esta fuente en cada ciclo y desprende 80 cal para la fuente fría.

a) ¿Cuál es el rendimiento del ciclo?.

b) ¿Cuál es la temperatura de la fuente fría?



Solución:

a) Por definición:

$$n = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{100-80}{100}$$

$$n = 0.20$$

b) Para hallar la temperatura del foco frío, por definición: $n = 1 - \frac{T_F}{T_C}$

$0.20 = 1 - \frac{T_F}{400}$, $T_F = 320°K$

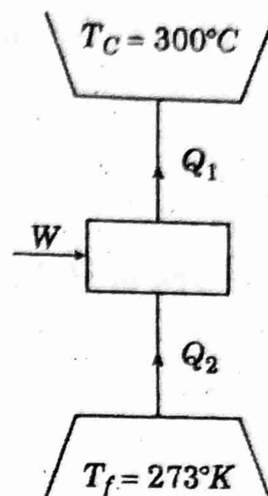
04 Un refrigerador de Carnot absorbe calor de una cierta fuente a $0°C$ y cede calor a una sala de $27°C$. Supongamos que 50 Kg de agua se convierten en hielo a $0°C$:

a) ¿Cuál es la cantidad de calor cedido a la sala.

b) ¿Cuál es la cantidad de energía que debe entregarse al refrigerador?

Solución:

a) Sabemos la relación: $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_C}{T_F}$



$$\frac{Q_1}{m L_f} = \frac{T_C}{T_F} \;,\; Q_1 = m L_f (T_C / T_F)$$

Reemplazando valores: $T_C = 27 + 273 = 300°K$

$T_F = 0 + 273 = 273°K$

Luego: $Q_1 = 50 \times 10^3 \, g \times 80 \frac{cal}{g} \times \frac{300°K}{273°K} = 4.4 \times 10^6 \, cal$

b) Hallemos la eficiencia del motor: $n = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{273}{300} = 0.09$

Luego: $0.09 = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{4.4 \times 10^6}$, $Q_2 = 4.00 \times 10^6 \, cal$

y la energía solicitada será: $W = Q_1 - Q_2 = 0.4 \times 10^6 \, cal$

Como 1 cal ------ 4.186 J, $W = 1.67 \times 10^6$ Joules

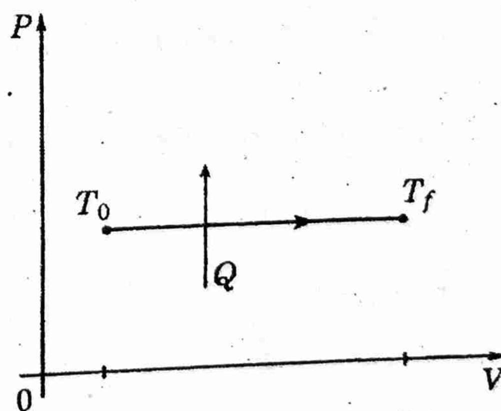
05 Determínese la variación de la entropía de un sistema gaseoso que permanece a presión constante mientras recibe calor, dando lugar a que su temperatura cambie de 26.7°C a 248.9°C, si el gas es: (a) 0.68 Kg de Argón, (b) 1.8 g de Helio, (c) 0.23 Kg de Nitrógeno.

Solución:

a) Hallemos la temperatura en °K:

$T_0 = 26.7 + 273°K = 299.7°K$

$T_f = 248.9 + 273°K = 521.9°K$



La variación de entropía:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{nCp\,dt}{T}$$

$\Delta S = nCp\text{Ln}(T_f / T_0)$

Para el Argón: $n = m/P.M. = 0.68\times10^3/40 = 226.7\ moles$

$Cp = 5\ cal/mol-°K$

$\Delta S = 226.7\times5\times \text{Ln}(521.9/299.7) = 628.7\ cal/°K$

Para el Helio: $n = m/P.M. = 1.8/4 = 0.45\ moles$

$Cp = 5\ cal/mol-°K$

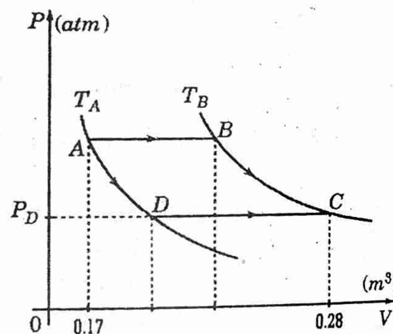
$\Delta S = 0.45\times5\times \text{Ln}(521.9/299.7) = 1.25\ cal/°K$

Para el nitrógeno: $n = m/P.M. = 0.23\times10^3/28 = 8.21\ moles$

$Cp = 7\ cal/mol-°K$

$\Delta S = 8.21\times7\times \text{Ln}(521.9/299.7) = 31.88\ cal/°K$

06 **Desde 26.7°C y 0.17m^3, 4.5 Kg de Hidrógeno cambian de estado hasta 65.5°C y 0.28 m³. ¿Cuál es el cambio de entropía?**



Solución:

Sea $m = 4.5Kg\ H_2$ y el peso molecular del gas: $2g/mol = PM$.

$Cu = 5cal/mol-°K$, $Cp = 7cal/mol-°K$

$R = 1.986cal/mol-°K$,

$n = m/PM = 2{,}25\times10^3$ moles

Se puede seguir dos procesos para ir de A a C.

$$\text{a)}\ \Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T} + \int_B^C \frac{dQ}{T} = nC_p\int_{T_A}^{T_B}\frac{dT}{T} + nR\int_{V_B}^{V_C}\frac{dV}{V}$$

Donde: $A \to B:\ dQ = nC_P dT\ ,\ V_B = (T_B/T_A)V_A = 0.192\ m^3$

$B \to C:\ dU = 0\ ,\ dQ = dW = pdV = \frac{nRT}{V}dV$

$T_A = 26.7 + 273 = 299.7°K\ ,\ T_B = 65.5 + 273 = 338.5°K$

$\Delta S = nC_P\text{Ln}(T_B/T_A) + nR\text{Ln}(V_C/V_B) \approx 3600\ cal/°K$

$$\text{b)}\ \Delta S = \int_A^D \frac{dQ}{T} + \int_D^C \frac{dQ}{T} = nR\int_A^D \frac{dV}{v} + \int_{T_D}^{T_C} nC_P\frac{dT}{T}$$

donde: $D \to C:\ dQ = nCpdT$

$A \to D:\ dU = 0\ ,\ dQ = dW = pdV = \frac{nRT}{V}dV$

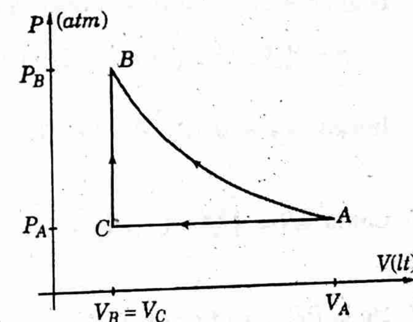
$\Delta S = nCp\text{Ln}(T_C/T_D) + nR\text{Ln}(V_D/V_A)$

Comparando el estado C y D: $P_C V_C = nRT_C$ y $P_D V_D = nRT_D$, $T_D = T_A$

$V_D = V_C(T_A/T_C)$, $\Delta S = nCp\text{Ln}(T_C/T_D) + nR\text{Ln}(T_A V_C/T_C V_A)$

Reemplazando valores: $\Delta S \approx 3600\ cal/°K$

07 Se comprime hidrógeno isentrópicamente desde $7.4\times10^5\ N/m^2$ 87 *lts* y 4.4°C hasta la presión $17.6\times10^5\ N/m^2$. Hallar (a) la temperatura y el volumen final, (b) el trabajo realizado, (c) la variación en su energía interna, (d) la variación de la entropía, (e) el flujo de calor.



Solución:

d) Por ser un proceso isentrópico $\Delta S = 0$ (la entropía permanece constante)

$$\text{a)}\ \Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^C \frac{dQ}{T} + \int_C^B \frac{dQ}{T} = 0$$

$$\int_A^C \frac{nCp\,dT}{T} + \int_C^B \frac{nCv\,dT}{T} = 0$$

$-(Cp/Cv)\text{Ln}(T_C/T_A) = \text{Ln}(T/T_C)$ $\quad T_C^{\gamma-1} = T_C^{\gamma}/T_B$ .... (α)

Donde: $P_B = 17.6\times10^5/1.013\times10^5\ atm = 17.33\ atm$

$P_A = 7.4\times10^5/1.013\times10^5\ atm = 7.3\ atm$

H_2 : gas diatómico, $Cv = 5\ cal/mol-°K$, $\gamma = 1.40$

$T_A = 4.4°C = 277.4°K$

Comparando los estados B y C: $P_AV_C = nRT_C$, $P_BV_B = nRT_B$

Dividiendo las dos últimas expresiones: $T_B = T_C(P_B/P_A)$ .... (β)

Reemplazando (β) en (α): $T_A^\gamma/T_C(P_B/P_A) = T_C^{\gamma-1}$

$T_A^\gamma = (P_B/P_A)T_A^\gamma$, $T_C^\gamma = (7.4/17.6)(277.4)^{1.4}$

$T_C = 149.39°K$ y $T_B = 149.39°K(17.31/7.3) = 355.3°K$

Hallemos el número de moles que existe:

$n = P_AV_A/RT_A = 7.4\times87/0.08207\times277.4 = 27.9\ moles$

Luego: $V_B = nR\,T_B/P_B = 27.9\times0.08207\times355.3/17.37\ lt = 46.83\ lt$

e) Como $\Delta S = \int\frac{dQ}{T} = 0$, $dQ = 0$ (proceso adiabático)

c) De la Primera Ley de la Termodinámica: $dU = dQ - dW$

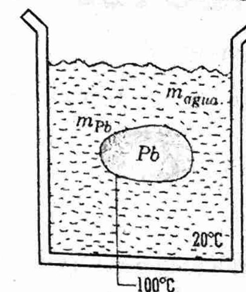
$$dU = -dW \text{ y } dU = nCv\,dT \ , \ \Delta U = nCv\int_{T_A}^{T_B} dT.$$

$\Delta U = nCv(T_B - T_A) = 27.9\times5\times(355.3-277.4) = 1.1\times10^4\ cal$

b) Como: $dU = -dW$, $\Delta U = -W = +1.1\times10^4\times4.186\ J$

$W = -4.54\times10^4$ Joules

08 En un experimento de calor específico se mezclan 100 g de plomo ($Cp_b = 0.345\ cal/g°C$) a 100°C con 200 g de agua a 20°C. Hallar la diferencia de entropías del sistema al terminar la mezcla con respecto a su valor antes de mezclar.



Solución:
Por comparación de calor ganado (por el agua) igual a calor perdido (por el plomo).

$$m_{agua}Ce_{agua}(T_x - 20) = m_{Pb}Ce_{Pb}(100 - T_x)$$

Hallando la temperatura final: $T_x = 21.3°C = 294.3°K$

Luego el cambio de entropía del plomo: $\Delta S_{Pb} = \int\frac{dQ}{T}\int_{294.3°K}^{373°K}\frac{m_{Pb}Ce_{Pb}dT}{T}$

$\Delta S_{Pb} = m_{Pb}Ce_{Pb}\text{Ln}(373/294.3) = 0.8\ cal/°K$

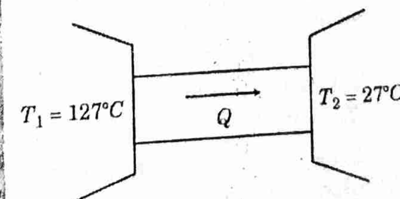
El cambio para el agua : $\Delta S_{agua} = \int\frac{dQ}{T} = \int_{293°K}^{294.3°K}\frac{m_{agua}Ce_{agua}dT}{T}$

$\Delta S_{agua} = m_{agua}Ce_{agua}\text{Ln}(294.3/293) = 0.76\ cal/°K$.

Por lo tanto el cambio total será: $\Delta S_{sistema} = \Delta S_{Pb} + \Delta S_{agua}$

$\Delta S_{sistema} = (0.8 + 0.76)\ cal/°K = 1.56\ cal/°K$

09 Una barra de latón está en contacto térmico con un depósito de calor a 127°C por uno de sus extremos y con un depósito de calor a 27°C por el otro extremo. Hallar el cambio total de entropía que resulta del proceso de conducción de 1,200 cal a través de la barra.



Solución:

Las temperaturas equivalentes son: $T_1 = 127 + 273°K = 400°K$

$T_2 = 27 + 273°K = 300°K$

El cambio de entropía en el extremo izquierdo es: $\Delta S_1 = \int_0^{-Q} \frac{dQ}{T_1} = -\frac{Q}{T_1}$

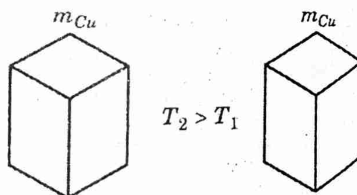
El cambio de entropía en el extremo derecho es: $\Delta S_2 = \int_0^{Q} \frac{dQ}{T_2} = \frac{Q}{T_2}$.

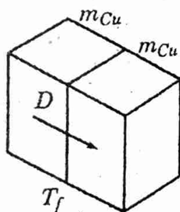
Luego, el cambio total de la entropía será: $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$

$$\Delta S = -\frac{Q}{T_1} + \frac{Q}{T_2} = -\frac{1200}{400} + \frac{1200}{300} \, cal/°K = 1 \, cal°K$$

$$\Delta S = 1 \, cal/°K$$

(10) Dos cubos e cobre de igual masa están encerrados en un recipiente perfectamente aislante. Al principio, uno de los cuerpos está a la temperatura uniforme T_2 y el otro a una temperatura uniforme más baja T_1. Inicialmente los dos bloques están separados, pero luego se pone en contacto térmico, de manera que fluye calor del objeto más caliente al más frío. Después de un cierto lapso, ambos cuerpos tendrán la temperatura final T_f. Hallar el cambio en la entropía del sistema en este proceso y el cambio de entropía de los alrededores. Se supone que el calor específico del cobre tiene el valor constante C dentro de los límites de temperatura considerados. Hallar los valores numéricos de estos cambios si $T_1 = 0°C$, $T_2 = 100°C$ y $Ce_{Cu} = 0{,}0925$ cal/g-°K, suponiendo que la masa de cada bloque es igual a 1 Kg.





Solución:

Hallemos la temperatura final al ponerse en contacto:

calor ganado = calor perdido

$$m_{Cu} Ce_{Cu} (T_f - T_1) = m_{Cu} Ce_{Cu} (T_2 - T_f)$$

$$T_f - T_1 = T_2 - T_f \ , \ T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

Luego el cambio de entropía del sistema: $\Delta S_s = \int_{T_2}^{T_f} \frac{dQ}{T} + \int_{T_f}^{T_1} \frac{dQ}{T}$

$$\Delta S_s = m_{Cu} Ce_{Cu} \int_{T_2}^{T_f} \frac{dQ}{T} + m_{Cu} Ce_{Cu} \int_{T_f}^{T_1} \frac{dT}{T}$$

$$\Delta S_s = m_{Cu} Ce_{Cu} Ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right) + m_{Cu} Ce_{Cu} Ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right)$$

Reemplazando el valor de T_f: $\Delta S_s = m_{Cu} Ce_{Cu} Ln\left(\frac{T_1 + T_2}{2T_2}\right) + m_{Cu} Ce_{Cu} Ln\left(\frac{T_1 + T_2}{2T_1}\right)$

$$\Delta S_s = m_{Cu} Ce_{Cu} Ln\left[\frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2}\right]$$

Reemplazando valores: $\Delta S_s = 1000 \times 0.0925 \, Ln\left[\frac{(273 + 373)^2}{4 \times 273 \times 373}\right]$

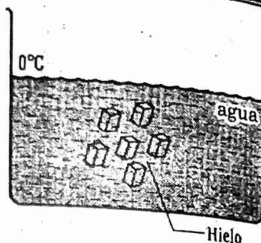
$$\Delta S_s = 2.24 \, cal/°K$$

El cambio de entropía en sus alrededores: ΔS_{alred}

$\Delta S_{alred} = \int \frac{dQ'}{T}$, como $dq' = 0$ (sistema aislado), luego $\Delta S_{alred} = 0$

Luego: $\Delta S_{total} = \Delta S_s + \Delta S_{alred} = 2.24 \, cal/°K$

(11) Hallar el cambio en la entropía de un sistema que contiene hielo y agua en equilibrio a 0°C cuando se funde 1 g de hielo introduciendo muy lentamente 80 cal desde los alrededores. (a) Hallar el cambio de entropía de los alrededores. (b) ¿Qué sucede cuando subsecuentemente se extraen con lentitud 80 cal hacia los alrededores, regresando el sistema a su estado inicial?



Solución:

a) El cambio de entropía total es cero: $\Delta S = \Delta S_s + \Delta S_{ma} = 0$

ΔS_s : cambio de entropía del sistema.

ΔS_{ma} : cambio de entropía del medio ambiente.

Por ser un proceso lento (reversible), isotérmico (agua y hielo).

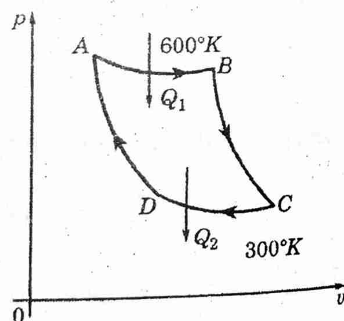
$$\Delta S_s = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{80 cal}{273°K} = 0{,}293 cal/°K$$

$$\Delta S_m = -\Delta S_3 = -0{,}293 cal/°K$$

b) En este caso: $\Delta S_s = -0.293 \ cal/°K$

$\Delta S_{ma} = 0.293 \ cal/°K$

(12) Un mol de un gas ideal monoatómico realiza un ciclo de Carnot entre 300 y 600 °K. Para el proceso isotérmico superior, el volumen aumenta desde 2 hasta 5 litros. Halle el trabajo efectuado por el gas durante un ciclo, el calor intercambiado en los dos procesos isotérmico y la eficiencia térmica.



Solución:

Hallemos la eficiencia: $n = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

$$n = 1 - \frac{300}{600} = 0.5$$

El calor $Q_{AB} = nRT \int_{V_o}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \, Ln\left(\frac{V_f}{V_o}\right)$

$$Q_1 = Q_{AB} = 1 \times 8.31 \times 600 \times \text{Ln}\left(\tfrac{5}{2}\right)$$

$$Q_1 = 4568 \text{ Joules} = 1091 \ cal$$

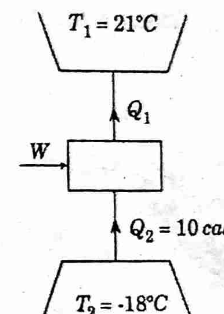
$$n = \frac{W}{Q_1} \ , \ W = nQ_1 = 0.5 \times 4568 \ J = 2284 \text{ Joules}$$

Sabemos: $\frac{Q_1}{-Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$

$$Q_2 = -Q_1 \frac{T_2}{T_1} = -4568 \times (300/600) = 2284 \text{ Joules}$$

$$Q_{CD} = Q_2 = -546 \ cal$$

(13) ¿Cuál es la mínima cantidad de trabajo necesaria para extraer 10 cal de un cuerpo a -18°C cuando la temperatura ambiente es de 21°C .



Solución:

Se tiene: $T_1 = 21°C = 21 + 273°K = 294°K$

$$T_2 = -18°C = -18 + 273°K = 255°K$$

Sabemos la relación: $Q_2/Q_1 = T_2/T_1$

$$Q_1 = Q_2 \frac{T_1}{T_2} = 10(294/255) = 11.52 \ cal$$

Luego: $W = Q_1 - Q_2 = 11.52 - 10 = 1.52 \ cal$

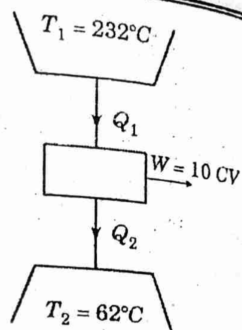
(14) La temperatura de un kilogramo de agua se lleva de la congelación hasta la ebullición. Halle el cambio en la entropía del agua.

Solución:

Por definición: $\Delta S = \int_{273}^{373} \frac{dQ}{T} = \int_{273}^{373} \frac{mCe\,dT}{T} = mC_e \int_{273}^{373} \frac{dT}{T} = mCe\,\text{Ln}(373/273)$

$$\Delta S = 10^3 \times 1 \times \text{Ln}(373/273) = 307 \ cal/°K$$

(15) Una máquina de vapor tiene una eficiencia térmica de 25% de la correspondiente a una máquina ideal de Carnot. La temperatura del vapor a la salida de la caldera es de 232°C y la del condensador de 62°C. Si la máquina entrega 10 CV, ¿cuántas calorías por segundo se absorben de la caldera?



Solución:

$T_1 = 232°C = 232 + 273 = 505°K$

$T_2 = 62°C = 62 + 273 = 335°K$

La eficiencia ideal es: $N_I = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

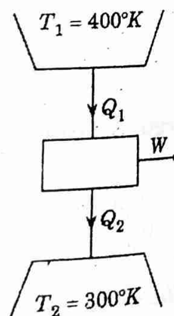
$N_I = \frac{505 - 335}{505} = 0.34$

La eficiencia térmica: $n_T = 0.25\, n_I$, $N_T = 0.085$

Luego: $n_T = \frac{W}{Q_1}$, $Q_1 = \frac{W}{n_T} = \frac{10 \times 735.3}{0.085 \times 4.186} \frac{cal}{seg}$

$Q_1 = 20{,}665.5\ cal/seg$

(16) Una máquina de Carnot recibe 12,000 J/seg de una caldera que está a 400°C y cede calor a un condensador a 40°C. Halle (a) la eficiencia del ciclo, (b) la cantidad de calor cedida al condensador por segundo.



Solución:

a) Se tiene: $T_1 = 400°C = 400 + 273°K = 673°K$

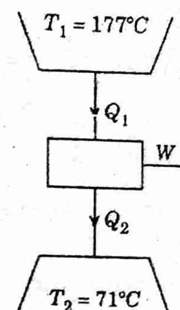
$T_2 = 40°C = 40 + 273°K = 313°K$

La eficiencia es: $n = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{673 - 313}{673} = 0.53$

b) Por definición: $n = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$ $\quad Q_2 = Q_1(1 - n)$

$Q_2 = \frac{12{,}000}{4.186}(1 - 0.53)\ \frac{cal}{seg} = 1347\ cal/seg$

(17) Halle la eficiencia térmica de un ciclo de Carnot que opera entre 71°C y 177°C. Si se quiere duplicar la eficiencia elevando la temperatura superior. ¿Qué valor debe tener esta nueva temperatura?



Solución:

$T_1 = 177°C = 177 + 273°K = 450°K$

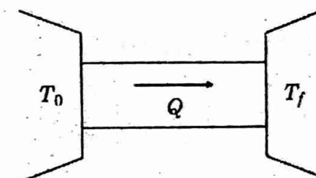
$T_2 = 71°C = 71 + 273°K = 344°K$

Hallemos la eficiencia: $n = \frac{450 - 344}{450} = 0.235$

Según la condición del problema: $2n = \frac{T_1 - 344}{T_1} = 2 \times 0.235$

$T_1 = 637°K$

(18) Calculen el cambio de entropía asociado a la conducción de 1000 cal de calor a lo largo de una banda metálica de un depósito térmico a 400°K a un segundo a 275°K. Supongan que el estado del metal no cambia con el proceso.



Solución:

Por definición: $\Delta S = S_f - S_0 = \frac{\Delta Q}{T_f} - \frac{\Delta Q}{T_0} = \frac{10^3}{275} - \frac{10^3}{400}$

$\Delta S = 1.1\, cal/°K$

(19) Hallar el aumento de entropía correspondiente a la transformación de 1 g de agua a 0°C en vapor a 100°C.

Solución:

$\overset{1gr}{\text{agua } 0°C} \rightarrow \overset{1gr}{\text{agua } 100°C} \rightarrow \overset{1gr}{\text{vapor agua } 100°C}$, $T_0 = 273°K$, $T_f = 373°K$

Los cambios de entropía: $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{273}^{373} \frac{mCe\,dT}{T} + \frac{1}{T}\int_0^Q dQ$

$$\Delta S = mCe\int_{273}^{373}\frac{dT}{T}+\frac{1}{T}Q = mCe\,\text{Ln}(373/273)+\frac{mLv}{373}$$

$$\Delta S = 1\times1\times\text{Ln}(373/273)+1\times540/373 = 1.75\ cal/°K$$

$$\Delta S = 7.4\ \text{Joules}/°K$$

(20) Cinco moles de un gas monoatómico ideal ($\gamma = 5/3$) experimentan una expansión adiabática reversible desde un volumen inicial de 24 lt y 0°C hasta 43 lt. Halle: (a) el cambio en la energía interna del gas, (b) el cambio en la energía interna de los alrededores, (c) el cambio len la entropía del gas, (d) el cambio en la entropía de los alrededores, (e) el cambio en la entropía del universo.

Solución:

a) Las condiciones son: $n = 5$ moles, $V_0 = 24\,lt$, $V_f = 43\,lt$, $\gamma = 5/3$, $T_0 = 273°K$

Sabemos por teoría: $W = \frac{nRT_0}{\gamma-1}\left[1-(V_0/V)^{\gamma-1}\right]$

$$W_g = \frac{5\times0.082\times273}{5/3-1}[1-(24/43)^{5/3-1}] = 54.0\ atm-lt$$

$$W_g = 54.08\times24.2\times4.186J = 5478\ \text{Joules}$$

Por la Primera Ley de la Termodinámica:

$dU_g = dQg - dW_g$, $\Delta U_g = WQ_g - Wg$, por ser un proceso adiabático:

$\Delta Q_g = 0$, $\Delta U_g = -W_g$

$\Delta U_g = -5478$ Joules

b) El cambio de la energía en los alrededores es ΔU_a

$\Delta U_a = \Delta Q_a - W_a = (-W_g) = W_g = 5478$ Joules

$\Delta U_a = 5478$ Joules

c) El cambio de entropía de los alrededores es ΔS_g:

$\Delta S_g + \Delta S_a = 0$, $\Delta S_g = \frac{\Delta Q_g}{T} = \frac{0}{T} = 0$

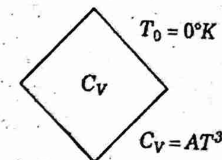
$\Delta S_g = 0$

d) El cambio de entropía de los alrededores es ΔS_a: $\Delta S_a + \Delta S_g = 0$, $\Delta S_a = 0$

e) El cambio de entropía del universo es ΔS_u: $\Delta S_u = \Delta S_g + \Delta S_a = 0$

$\Delta S_u = 0$

(21) A bajas temperaturas, muchas sustancias cristalinas tienen un calor específico dado por la ley de Debye de proporcionalidad con T^3: $Cv = AT^3$. Suponiendo que esta sustancia tiene entropía cero a $T_0 = 0°K$. Halle la entropía por mol a una temperatura finita.



Solución:

Por definición: $\Delta S = \int_{T_o}^{T}\frac{dQ}{T} = \int_{T_o}^{T}\frac{nCvdT}{T}$

$$\Delta S = nA\int_{T_0}^{T}\frac{T^3dT}{T} = nA\left.\frac{T^3}{3}\right]_{T_0}^{T}$$

$$\Delta S = \frac{nA}{3}(T^3 - T_0^3).\quad \frac{\Delta S}{n} = \frac{A}{3}(T^3 - T_0^3) = \frac{AT^3}{3}$$

(22) Al calentar 1 K mol de un gas diatómico su temperatura absoluta aumenta 1.5 veces. Hallar la variación de la entropía si el calentamiento es: (a) isócoro, (b) isobárico.

Solución:

Se tiene: $n = 10^3\,moles$, $Cv = 5\,cal/mol-°K$, $Cp = 7\,cal/mol-°K$, $T_f = 1.5T_0$

a) Proceso isócoro (a volumen constante): $\Delta S_v = \int\frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_f}\frac{nCvdT}{T} = nCv\,Ln(T_f/T_0)$

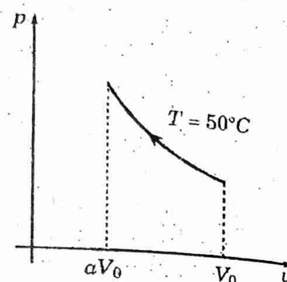
Reemplazando valores: $\Delta S_v = 10^3\times5\times\text{Ln}(1.5) = 2027\,cal/°K$

b) Proceso isóbaro (a presión constante): $\Delta S_p = \int\frac{dQ}{T} = \int_{T_o}^{T_f}\frac{nCpdT}{T} = nCp\,\text{Ln}(T_f/T_o)$

Reemplazando valores: $\Delta S_v = 10^3 \times 7 \times \text{Ln}(1.5) = 2838\, cal/°K$

(23) Suponga que se comprime isotérmicamente y en forma reversible 1 mol de un gas ideal monoatómico, a una temperatura de 50°C, desde un volumen inicial V_0 a otro final (αV_0) en donde $0 < \alpha < 1$.

(a) ¿Cuál es el cambio de entropía del gas en este proceso? (b) ¿Cuál es el cambio de entropía del depósito térmico?



Solución:

a) Por definición: $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dW}{T} = \int \frac{p\,dV}{T}$

porque: $dU = dQ - dW,\ dQ - dW = 0$

$dQ = dW = p\,dV$

Como es un gas ideal: $pV = n\,R\,T$

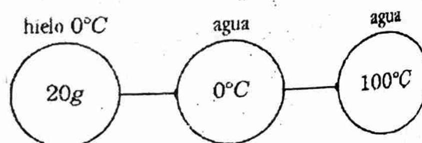
Luego: $\Delta S = \int_{V_0}^{\alpha V_0} \frac{nR\,dV}{V} = nR\text{Ln}(\alpha V_0/V_0) = nR\text{Ln}\alpha$

Como: $n = 1 mol$, $\Delta S_g = R\text{Ln}\,\alpha$

b) Por ser un proceso reversible: $\Delta S_g + \Delta S_{dt} = 0$

$\Delta S_{dt} = -\Delta S_g = -R\text{Ln}\,\alpha$

(24) Una pieza de hielo de 20 g a 0°C se arroja en un gran tazón de agua a 100°C. Suponiendo que la temperatura final del sistema sea muy cercana a 100°C. Halle el cambio en la entropía del material que originalmente era hielo.



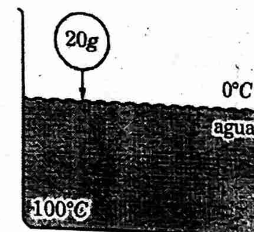
Solución:

$$\Delta S_{gh} = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_0} \frac{dQ}{T} + \int_{T_0}^{T_f} \frac{dQ}{T} = \frac{mL_f}{T_0} + mCe\int_{T_0}^{T_f} \frac{dT}{T}$$

$$\Delta S_{gh} = \frac{mL_f}{T_0} + mCe\text{Ln}(T_f/T_0) = \frac{20 \times 80}{273} + 20 \times 1 \times \text{Ln}(373/273)$$

$\Delta S_{gh} = 12.1\, cal/°K = 50.6\, J/°K$ (entropía ganada por el hielo).

(25) Para el problema anterior encuentre el cambio en la entropía del universo a causa de este proceso.



Solución:

El tazón de agua, pierde entropía: ΔS_{pa}

$$\Delta S_{pa} = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_0} \frac{dQ}{T} + \int_{T_0}^{T_f} \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T_f} + mCe\frac{T_f - T_0}{T_f}$$

$\Delta S_{pa} = [mL_f + mCe(T_f - T_0)]/T_f$, donde:

$m = 20g$, $L_f = 80\, cal/g$, $Ce = 1\, cal/g-°C$, $T_f = 100°C$ y $T_0 = 0°C$

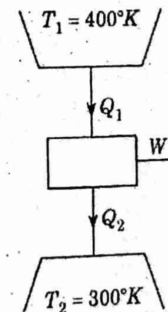
Reemplazando valores: $\Delta S_{pa} = 9.65\, cal/°K$

Luego el cambio de entropía del universo: ΔS_u

$\Delta S_u = \Delta S_{gh} + \Delta S_{pa} = 12.1 + (-9.65)\, cal/°K$

$\Delta S_u = 2.45\, cal/°K$

(26) Una máquina térmica ideal que funciona según el ciclo de Carnot recibe del foco caliente 600 cal cada ciclo. La temperatura del foco caliente es de 400°K y la del foco frío de 300°K. Hallar el trabajo que realiza la máquina cada ciclo y la cantidad de calor que cada ciclo se cede al foco.



Solución:

a) Hallemos la eficiencia para este caso:

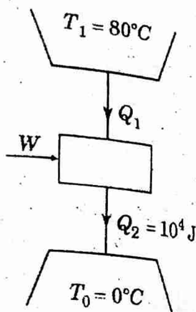
$$n = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{400} = 0.25$$

$W = nQ_1 = 0.25 \times 600 = 150\, cal = 628J$

b) Para hallar Q_2: $Q_2 = Q_1(1-n)$

$$Q_2 = 600(1-0.25) = 450\,cal = 1883\,J$$

(27) Una bomba térmica o refrigerante de Carnot opera entre un depósito térmico a baja temperatura a $0°C$ y otro de alta temperatura a $80°C$. (a) Calcule la eficiencia de la bomba. Por cada 10000 Joules absorbidos del depósito de baja. (b) Determine cuántos Joules se ceden al depósito de alta temperatura y cuánto trabajo se efectúa sobre el sistema.



Solución:

a) Las temperaturas son: $T_1 = 80°C = 80+273 = 353°K$

$$T_0 = 0°C = 0+273 = 273°K$$

La eficiencia es: $n = 1-\frac{T_2}{T_1} = 1-\frac{273}{353} = 0.227$

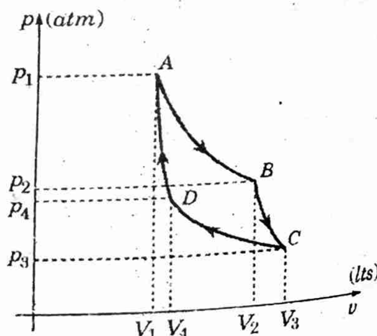
b) Se tiene: $n = 1-\frac{Q_2}{Q_1}$, $Q_1 = Q_2/(1-n) = 10{,}000/(1-0.227)$

$$Q_1 = 12{,}937 \text{ Joules}$$

Como: $n = W/Q_1$. $W = nQ_1 = 0.227\times 12{,}937\,J = 2937\,J$

(28) Una maquina térmica ideal funciona según el ciclo de Carnot empleando aire caliente, el cual se toma a una presión inicial de 7 atm con la temperatura de $127°C$. El volumen inicial del aire es de $2\times10^{-3}\,m^3$.

Después de la primera expansión isotérmica el aire ocupó un volumen igual a 5 lt y después de la expansión adiabática el volumen de 8 lt. Hallar: (a) las coordenadas de los puntos de intersección de las isotermas y las adiabáticas, (b) el trabajo correspondiente a cada rama del ciclo, (c) el trabajo total realizado durante el ciclo, (d) el rendimiento del ciclo, (e) la cantidad de calor que se toma del foco caliente cada ciclo, y (f) la cantidad de calor que se cede al foco frío cada ciclo.



Solución:

Se conoce: $P_1 = 7\,atm$, $V_1 = 2\,lt$, $V_2 = 5\,lt$, $V_3 = 8\,lt$ y $\gamma = 1.4$

$$T_1 = 127°C = 127+273°K = 400°K = 400°K$$

Proceso AB: (isotérmico) $p_1V_1 = p_2V_2$, $p_2 = p_1(V_1/V_2)$

$$p_2 = 2.8\,atm$$

Proceso BC: (adiabático) $p_2V_2^{\gamma} = p_3V_3^{\gamma}$, $p_3 = p_2(V_2/V_3)^{\gamma} = 1.44\,atm$

Proceso CD : (isotérmico) $p_3V_3 = nRT_2 = p_4V_4$, $nRT_1 = p_1V_1$, $T_2 = p_3V_3/nR$

$$T_2 = (p_3V_3)/(p_1V_1/T_1) = T_1(p_3V_3/p_1V_1) = 330°K$$

Proceso DA: (adiabático) $T_2V_4^{\gamma-1} = T_1V_1^{\gamma-1}$, $V_4 = V_1(T_1/T_2)^{1/(\gamma-1)} = 3.22\,lt$

$$p_4 = p_3V_3/V_4 = 3.5\,atm$$

b) El trabajo: $W_{AB} = \int p\,dV = \int_{V_1}^{V_2}\frac{nRT_1}{V}dV = p_1V_1 Ln(V_2/V_1)$

$$W = 7\times2\times \text{Ln}(5/2)\times24.2\times4.186\,J = 1{,}300 \text{ Joules}$$

$$W_{BC} = \frac{nRT_1}{\gamma-1}[1-(V_2/V_3)^{\gamma-1}] = \frac{p_1V_1}{\gamma-1}[1-(V_2/V_3)^{\gamma-1}]$$

$$W_{BC} = \frac{7\times2}{1.4-1}[1-(5/8)^{0.4}]\times24.2\times4.186\,J$$

$$W_{BC} = 607\,J$$

$$W_{CD} = nRT_2\,\text{Ln}(V_4/V_3) = p_3V_3\text{Ln}(V_4/V_3)$$

$$W_{CD} = 1.44\times8\text{Ln}(3.22/8) = -1062\,J$$

$$W_{DA} = \frac{nRT_2}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_3V_3}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$$

$$W_{DA} = \frac{1.44\times8}{1.4-1}\left[1-(8/5)^{0.4}\right] = -607\,Joules$$

c) El trabajo en un ciclo: $W_{ciclo} = 1300 + 607 - 1062 - 607\ J$

$W_{ciclo} = 238 \text{ Joules} = 56.8\ cal$

d) El rendimiento del ciclo: $n = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0.175$

e) Sabemos: $n = \frac{W}{Q_1}$, $Q_1 = \frac{W}{n} = \frac{238}{0.175} J = 1360 J$

$Q_1 = 325\ cal$

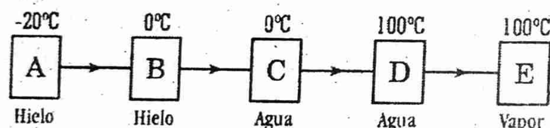
f) Por teoría: $W = Q_1 - Q_2$, $Q_2 = Q_1 - W = 325 - 56.8\ cal$

$Q_2 = 268.2\ cal$

(29) Hallar la variación que experimenta la entropía al transformarse 10 g de hielo a -20°C en vapor a 100°C.

Solución:

El proceso se indica en el gráfico:



El cambio de entropía es: $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{mC_{eHi}dT}{T} + \int_B^C \frac{dQ}{T_0} + \int_C^D \frac{mC_{ea}dT}{T} + \int_D^E \frac{dQ}{T_{100}}$

$$\Delta S = mCe_{Hi}\text{Ln}\frac{273}{253} + \frac{mL_f}{273} + mC_{ea}\text{Ln}\frac{373}{273} + \frac{mLv}{373}$$

Como: $T_0 = 273°K$, $L_f = 80\ cal/g$, $Lv = 540\ cal/g$

$\Delta S = 10 \times 0.5 \times \text{Ln}(273/253) + (10 \times 80/273) + 10 \times 1 \times \text{Ln}(373/273) + (10 \times 540/373)$

$\Delta S = 0.38 + 2.93 + 3.12 + 14.47 = 20.9\ \frac{Cal}{°K}$

(30) Hallar la variación que experimenta la entropía cuando 8 g de oxígeno que ocupaban el volumen de 10 lt a la temperatura de 80°C pasan a ocupar el volumen de 40 lt a la temperatura de 300°C

Solución:

Para hallar la entropía, usaremos la trayectoria: ABC

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T} + \int_B^C \frac{dQ}{T}$$

El proceso AB es isócoro : $dQ = nCvdT$

El proceso BC es isotérmico : $dU = 0$

$dU = dQ - dW$, $dQ = dW = pdV$

$$dQ = \frac{nRT\,dv}{V}$$

Luego: $\Delta S = \int_A^B \frac{nCvdT}{T} + \int_B^C \frac{nRTdV}{TV}$

$$\Delta S = nCv\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + nR\int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = nCv\text{Ln}(T_2/T_1) + nR\text{Ln}(V_C/V_B)$$

donde: $T_1 = 80 + 273°K = 353°K$ $\quad T_2 = 300 + 273°K = 573°K$

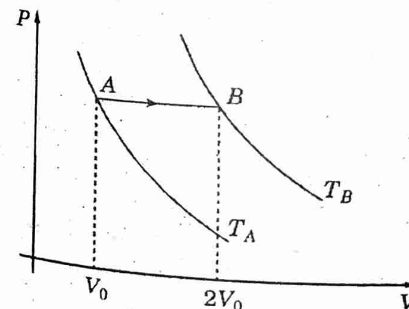
$n = m/PM = 8/32 = 0.25\ g/mol$ $\quad Cv = 5\ cal/mat - °K$

$R = 1.986\ cal/mol - °K$

Reemplazando valores: $\Delta S = 1.293\ cal/°K$

(31) 6.6 g de Hidrógeno se expanden por vía isobárica hasta duplicar su volumen. Hallar la variación que experimenta la entropía al producirse esta expansión.

Solución:



Hallemos el número de moles:

$n = 6.6\ g/2g/mol$

$n = 3.3\ g/moles$

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$$

$$\Delta S = \int_A^B \frac{nCpdT}{T}$$

$$\Delta S = nCp\text{Ln}(T_B/T_A) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Por ser gas ideal: $p_A V_0 = nRT_A \qquad T_B = 2T_A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$

$$p_A 2V_0 = nRT_B$$

De (2) en (1): $\Delta S = nCp\text{Ln}(2T_A/T_A) = nCp\text{Ln}2$

$$\Delta S = 3.3 \times 7\ \text{Ln}2(cal/°K)$$

$$\Delta S = 16\, cal/°K$$

32) La variación de la entropía en el espacio comprendido entre las dos adiabáticas de un ciclo de Carnot es igual a 1 $Kcal/°K$. La diferencia de temperatura entre las dos isotermas es igual a 100°K ¿qué cantidad de calor se transforma en trabajo en este ciclo?

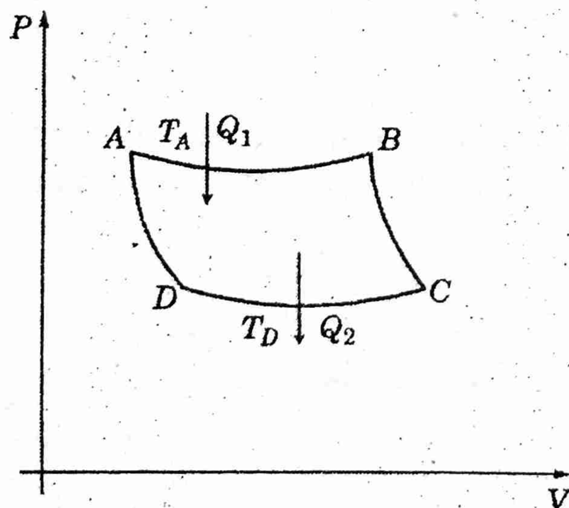
Solución:

Sabemos: $\Delta S_{AB} = 10^3\ cal/°K$

$$\Delta T = T_A - T_D = 100°K$$

El calor que se convierte en trabajo es: $\Delta Q = Q_1 - Q_2$

Por teoría: $\dfrac{T_D}{T_A} = \dfrac{Q_2}{Q_1}$



$$\frac{T_A - T_D}{T_A} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\Delta Q}{Q_1};$$

$$\Delta Q = \frac{Q_1}{T_A}(T_A - T_D) = \frac{Q_1}{T_A}\Delta T \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Por definición de entropía:

$$\Delta S_{AB} = \int \frac{dQ_1}{T_A}$$

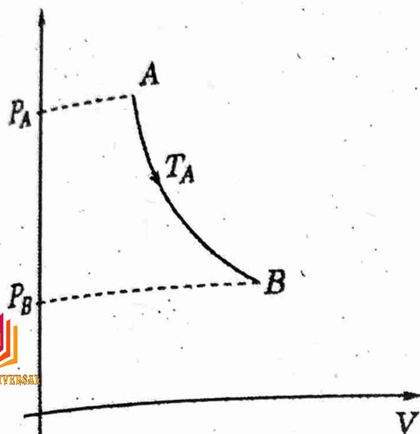
$$\Delta S_{AB} = \frac{1}{T_A}\int dQ_1 = \frac{Q_1}{T_A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De (2) en (1): $\Delta Q = (\Delta S_{AB})\Delta T = 10^3\ \frac{Cal}{°K} 100°K$

$$\Delta Q = 10^5\, cal = 4.186 \times 10^5\, J$$

(33) Hallar la variación de la entropía correspondiente a la expresión isotérmica de 6 g de hidrógeno desde 10^5 hasta $0.5\times10^5\ N/m^2$.

Solución:



Por definición: $\Delta S = \frac{dQ}{T}$

$du = dQ - pdv = 0$, por ser un proceso isotérmico

$dQ = pdv$, $\Delta S = \int \frac{pdv}{T_A} = \int \frac{nR}{V} dV$

$\Delta S = nR\text{Ln}(V_B/V_A)$

Por ser un gas ideal: $\frac{V_B}{V_A} = \frac{p_A}{p_B}$

$P_A V_A = nRT_A$

$P_B V_B = nRT_A$

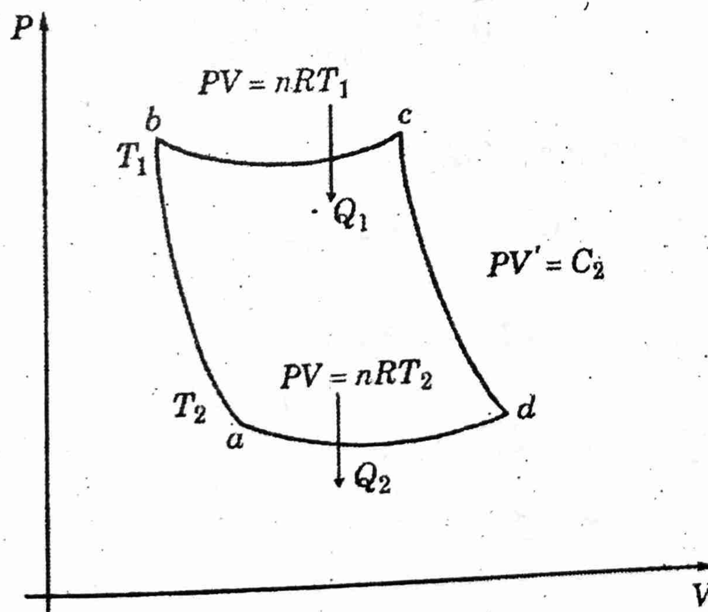
Luego: $\Delta S = nR\text{Ln}(P_A/P_B)$

$$\Delta S = \left(\tfrac{6}{2} moles\right)\left(1.986 \frac{cal}{mol-°K}\right) Ln\left(\frac{1\times10^5}{0.5\times10^5}\right)$$

$$\Delta S = 4.13\, cal/°K$$

(34) Demostrar que la eficiencia de una máquina de Carnot que utilice como sustancia de trabajo un gas ideal: $n = (T_1 - T_2)/T_1$.

Solución:



Por definición de eficiencia: $n = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ .... (α)

donde Q_1 : es el calor que absorbe el sistema en el proceso: bc

Q_2 : es el calor que cede el sistema en el proceso: da

Proceso bc: Es isotérmico, $\Delta U = 0$

$$\Delta U = Q - W\ ,\ Q_1 = W = \int pdV$$

$$Q_1 = \int_{V_b}^{V_c} nRT_1 \frac{dV}{V} = nRT_1 \operatorname{Ln}(V_c/V_b) \quad \text{.................} \quad (1)$$

Proceso da: Es isotérmico , $\Delta U = 0$

análogamente: $Q_2 = -nRT_2 \operatorname{Ln}\left(\frac{Va}{V_d}\right)$

$$-Q_2 = -nRT_2 \operatorname{Ln}(V_d/V_a)$$

Considerando solo el valor absoluto de:

$$Q_2 = nRT_2 \operatorname{Ln}(V_d/V_a) \quad \text{....................................} \quad (2)$$

reemplazando (1) y (2) en (α): $n = 1 - \frac{nRT_2 \operatorname{Ln}(V_d/V_a)}{nRT_1 \operatorname{Ln}(V_c/V_b)}$

$$n = 1 - \frac{T_2 \operatorname{Ln}(V_d/V_c)}{T_1 \operatorname{Ln}(V_c/V_b)} \quad \text{..........................} \quad (3)$$

Proceso ab: Es adiabático $\Delta Q = 0$

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = -\Delta W = -pdV$$

Como $\Delta U = nCvdT$

Luego $nCvdT = -pdV$

$$nCvdT = -\frac{nRT}{V} dV$$

$$-\frac{Cv}{R} \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T} = \int_{V_a}^{V_b} \frac{dV}{V}$$

$$\frac{Cv}{R} \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T} = \int_{V_b}^{V_a} \frac{dV}{V} = \operatorname{Ln}\left(\frac{Va}{V_b}\right)$$

$$\frac{Cv}{R} \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T} = \operatorname{Ln}(V_a/V_b) \quad \text{...} \quad (4)$$

Proceso cd: Es adiabático $\Delta Q = 0$

Por analogía: $\Delta U = -\Delta W = -pdV$

$$\frac{-Cv}{R} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_{V_c}^{V_d} \frac{dT}{V} = \operatorname{Ln}\left(\frac{V_d}{Vc}\right)$$

$$\frac{Cv}{R} \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T} = \operatorname{Ln}(V_d/V_c) \quad \text{.................................} \quad (5)$$

De (4) y (5): $\operatorname{Ln}(V_a / V_b) = \operatorname{Ln}(V_d / V_c)$

$$\operatorname{Ln}(V_d / V_a) = \operatorname{Ln}(V_c / V_b) \quad \text{.....................................} \quad (6)$$

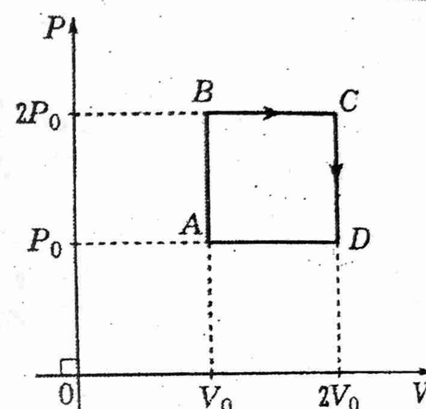
De (6) en (3), se obtiene: $n = 1 - \frac{T_2}{T_1} \frac{\operatorname{Ln}(Vc/V_b)}{\operatorname{Ln}(Vc/V_b)} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

01 Un motor A que funciona según el ciclo de Carnot opera entre una fuente que está a $1\,200°K$ y el medio ambiente a $27°C$. Otro motor térmico B que también realiza el mismo ciclo opera entre una fuente que está a $600°K$ y el mismo medio ambiente disipando igual cantidad de calor que el motor A. ¿En qué relación se encuentran las potencias mecánicas de los motores A y B? (Ambos motores desarrollan un ciclo en el mismo tiempo)

Rpta.: 3:1

02 Un motor térmico realiza el ciclo mostrado en la gráfica, con una sustancia de trabajo que es un gas ideal, cuyo calor específico a volumen constante es $C_V = \frac{8}{5}R$. ¿Qué eficiencia térmica tiene dicho motor?



Rpta.: 14.7%

03 Un reservorio térmico de $1\,435°K$, transfiere 35 kJ de calor a una máquina térmica de Carnot, durante un ciclo termodinámico. Si el trabajo neto de la máquina es 2.5×10^4 J; la temperatura del reservorio térmico de baja temperatura en $°K$ es

Rpta.: $410°K$

04 Una máquina térmica que trabaja entre un foco de $527°C$ y un sumidero de $27°C$. Si el calor que recibe en el primer tiempo (proceso isotérmico) es 16 K cal; ¿cuál es el calor que pierde el sumidero en el tercer tiempo (proceso isotérmico)?

Rpta.: 6 K cal.

05 Un congelador conserva los alimentos a $-12°C$. Si la temperatura del medio ambiente es $20°C$, determine el mínimo trabajo que se debe desarrollar para extraer 50 cal del congelador.

Rpta.: 25,6 J

06 Después de haber sido calentados 22 g de nitrógeno su temperatura absoluta aumentó 1.2 veces y la entropía en $4.19\ J/°K$. En qué condiciones se llevó a cabo el calentamiento (a volumen o a presión constante).

Rpta.: A presión constante

07 Un congelador ideal (de Carnot) en una cocina tiene una temperatura constante de 260 K, mientras que el aire en la cocina tiene temperatura constante de 300K. Suponga que el aislamiento del congelador no es perfecto, de modo que un poco de energía fluye hacia su interior razón de 0.150W. Determine la potencia promedio que el motor del congelador necesita para mantener constante la temperatura en su interior.

Rpta.: 23.1 mW

08 Un carro de 1 500 kg se mueve a 20.0m/s. El conductor frena hasta detenerse. Los frenos se enfrían a la temperatura del aire circundante, que se mantiene casi constante en $20°C$. ¿Cuál es el cambio total en entropía?

Rpta.: $1.02\ kJ/K$.

09 Un metro cúbico de aire que se encuentra a la temperatura de $0°C$ y a la presión de $2kg\,f/cm^2$ se expande isotérmicamente desde el volumen V_1 hasta el volumen $V_2 = 2V_1$. Hallar la variación de la entropía que origina esta transformación.

Rpta.: $\Delta S \cong 500\ J/°K$

10 Un gas se expansiona hasta que su volumen se duplica. ¿En mayor el trabajo realizado por el gas si la transformación es isotérmica a si es adiabática? Explicarlo.

Rpta.: Las pendientes de la curva adiabáticas es mayor que las curvas isotérmicas.

11 Hallar el aumento de entropía correspondiente a la transformación de $1\,g$ de agua a $0°C$ en vapor a $100°C$.

Rpta.: $\Delta S = 7.4\ J/°K$

12 Determine la variación de la entropía (en $Kcal/°K$) cuando 10 kg de agua se vaporizan a $100°C$ y cuando se calienta de $98°C$ a $100°C$.

Rpta.: 14,5 ; 0,054

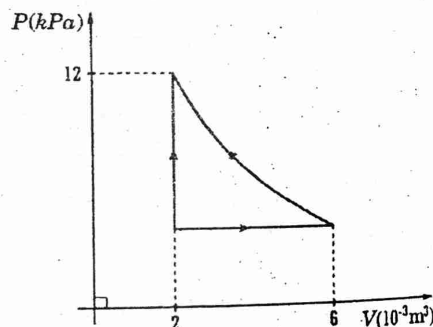
13 Un motor de gasolina de 1.60 litros con una relación de compresión de 6.20 tiene una salida de potencia de 103 hp. Si el motor opera en un ciclo idealizado de Otto, encuentre la energía absorbida y expulsada cada segundo. suponga que la mezcla aire-combustible se comporta como un gas ideal, con $\gamma = 1.40$

Rpta.: $146KW$, $70,8KW$

14 6.6 g de hidrógeno se expanden por vía isobárica hasta duplicar su volumen. Hallar la variación que experimenta la entropía al producirse esta expansión.

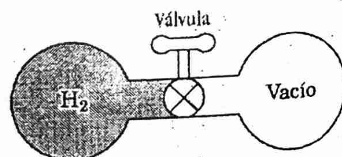
Rpta.: $\Delta S = 15.8 cal/°K$

15 Un gas ideal experimenta un ciclo termodinámico, el cual se representa en la gráfica adjunta. Determine el trabajo realizado por el gas ideal en un ciclo, sabiendo que en el proceso isotérmico absorbió 80 J de calor.



Rpta.: $W = 80$ J

16 Un mol de gas H_2 está contenido en el lado izquierdo del recipiente mostrado en la figura el cual tiene volúmenes iguales a la izquierda y a la derecha. En el lado derecho se ha hecho vacío. Cuando la válvula se abre el gas fluye hacia el lado derecho.
¿Cuál es el cambio de entropía final del gas?
¿Cambia la temperatura del gas?



Rpta.: $5.76 J/K$. La temperatura es constante si el gas es ideal.

17 Cinco moles de un gas ideal $C_v = 3$ experimentan una expansión isotérmica reversible desde un volumen inicial de 24 lt hasta un volumen final de 20 lt a la temperatura de $300°K$. Halle (a) el cambio en la energía interna del gas (b) el cambio en la energía interna de los alrededores, (c) el cambio en la entropía del gas (d) el cambio en la entropía de los alrededores (e) el cambio en la entropía del universo.

Rpta.: a) $\Delta U_g = 0$

b) $\Delta U_a = 0$

c) $\Delta S_g = 2.21 cal/°K$

d) $\Delta S_a = 2.21 cal/°K$

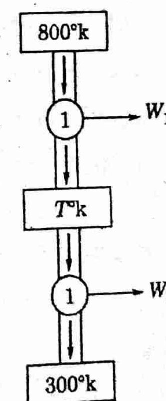
18 Determine qué porcentaje del calor recibido se gasta para desarrollar trabajo durante la expansión isobárica de una gas monoatómico.

Rpta.: 40%

19 Durante un proceso de expansión con suministro de 240 kJ. ¿En cuánto se elevará la temperatura del aire en este proceso? El calor específico del aire a volumen constante es $0,722 kJ/kg°K$.

Rpta.: $83°C$

20 La figura muestra dos máquinas térmicas que desarrollan el ácido de Carnot. Si la eficiencia de la primera es el doble de la segunda, halle la temperatura del foco T.



Rpta.: $T = 500°K$

21 Demuestre que un proceso a volumen constante, $dS/DU = 1/T$ y (b) Que en un proceso en que no cambia la energía interna del sistema $dS/dV = P/T$

22 Una atleta con 70.0 kg de masa debe 16 oz (453.6 g) de agua refrigerada. El agua está a una temperatura $35.0°F$.

a) Ignorando el cambio de temperatura de su cuerpo que resulta de la ingesta de agua (es decir, el cuerpo se considera como un depósito que siempre está $98.6°F$), encuentre e incremento en entropía del sistema entero.

b) Suponga que todo el cuerpo se enfría por la bebida y que el calor específico del agua líquida.

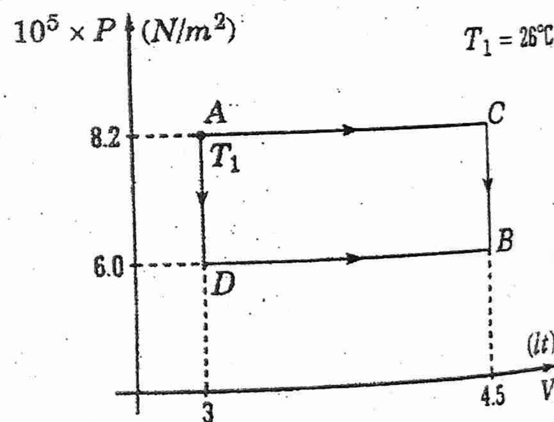
Despreciando cualquier otra energía transferida por calor y cualquier liberación metabólica de energía, encuentre la temperatura de la atleta de que ella bebió el agua fría, dada una temperatura corporal inicial de $98.6°F$. Bajo esta suposiciones, ¿cuál es el incremento en entropía del sistema completo? Compare este resultado con el obtenido en la parte a).

Rpta.: a) 3.19 cal/K
b) $98.19°F, 2.59\ cal/K$

23 Calcule el aumento en la entropía del Universo cuando usted añade 20.0 g de crema a $5.00°C$ a 200 g de café a $60.0°C$. Suponga que los colores específicos de la crema y el café son ambos de $4.20\,J/g°C$.

Rpta.: 1.18 J/K

24 Hallar la variación que experimenta la entropía al pasar un gas del estado A al estado B en las condiciones que se indican, si la transformación se efectúa: (1) Por el camino ACB y (2) Por el camino ADB.



Rpta.: 1) $\Delta S = 5.45\,J/°K$
2) $\Delta S = 5.45\,J/°K$

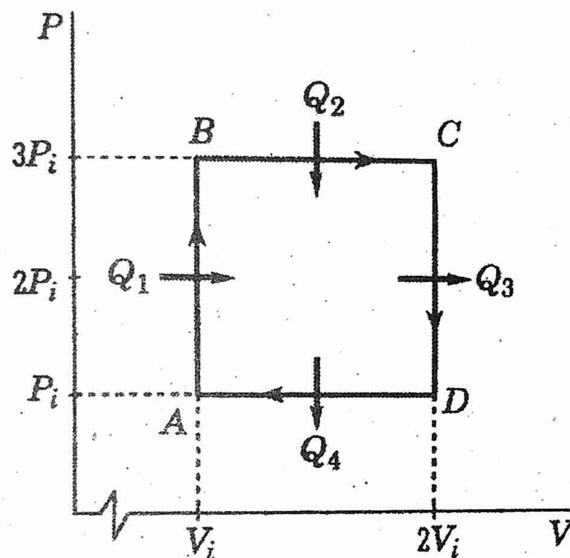
25 Una máquina térmica funciona entre $500°K$ y $300°K$ y se determina que disipa por el sumidero 12 K cal en 2 ciclos. Si la máquina recibe el 80% de la máxima cantidad de calor que podría recibir, determine su eficiencia.

Rpta.: 25%

26 Una máquina térmica que funciona entre dos temperaturas t_1 y t_2 puede, teóricamente convertir en trabajo útil la cuarta parte del calor que se le suministra. Si la temperatura t_1, correspondiente el foco caliente, disminuye de $60°C$, el rendimiento teórico de la máquina es la mitad del anterior. Hallar los valores de t_1 y t_2.

Rpta.: $t_1 = 147°C$, $t_2 = 42°C$

27 Un mol de un gas monoatómico ideal se somete a ciclo que se muestra en la figura. En el punto A, las presión, el volumen y la temperatura son P_i, V_i y T_i, respectivamente. En función de R y T_i encuentre.



a) La energía total que entra al sistema por calor por ciclo.
b) La energía total que sale del sistema por calor por ciclo.
c) La eficiencia de una máquina que opera en este ciclo, y
d) La eficiencia de una máquina que opera en un ciclo de Carnot entre las mismas temperaturas extremas.

Rpta.: a) $10.5\,nRT_i$ b) $8.50\,nRT_i$
c) 0.190 d) 0,833

28 Se tienen dos motores acoplados:

El motor 1 opera entra las fuentes $1200°K$ y $900°K$, el motor 2 opera entre las fuentes $900°K$ y $1600°K$. Sabiendo que a 1 se le suministra 1 600 J de calor, determine el trabajo que realiza cada motor.

Rpta.: $W_1 = 500\ \text{J}$; $W_2 = 200\ \text{J}$

29 Un recipiente de 2 litros tiene un separador que lo divide en dos partes iguales, como se muestra en la figura. El lado izquierdo contiene gas H_2 y el lado derecho gas O_2. Ambos gases están a temperatura ambiente ya presión. El separador se quita y se deja que los gases se mezclen. ¿Cuál es el aumento de entropía del sistema?

0.044 mol H_2	0.044 mol H_2

Rpta.: $O_1$507 J/K

30 Pruebe que el cambio en la entropía de un gas monoatómico ideal entre el estado inicial (P_0, V_0, T_0) en que la entropía es S_0 y un estado final (P, V, T) en que la entropía es S está dado por:

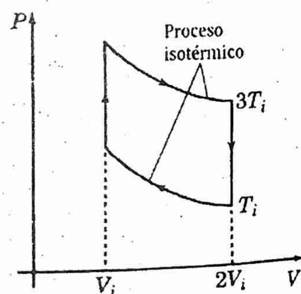
$$S - S_0 = 3/2\, n R \operatorname{Ln}(T/T_0) + n R \operatorname{Ln}(V/V_0)$$

en donde n es el número de moles de gas.

31 ¿Cuál es el coeficiente de realización de un refrigerador que opera con una eficiencia de Carnot entre las temperaturas $-3.00°C$ y $+27°C$?

Rpta.: 9.00

32 La figura representa a moles de un gas ideal monoatómico que sigue un ciclo compuesto de dos procesos isotérmicos a temperaturas $3T_i$ y T_i y dos procesos a volumen constante. En la función de n, R y T_i, determine para cada ciclo.



a) La energía neta transferida mediante calor al gas.

b) La eficiencia de una máquina que opere en este ciclo.

Rpta.: a) $2nRT_i \ln 2$
b) 0.273

33 Una bolsa que contiene 75 kg de arena se deja caer hasta el suelo desde una plataforma de 4 metros de altura. La temperatura en el exterior es de $30°C$. Suponiendo que no se transfiere energía al piso. Halle el aumento en la entropía de la bolsa de arena.

Rpta.: $\Delta S = 2.31$ cal/°K

34 Una máquina de Carnot tiene una salida de potencia de 150KW. La máquina opera entre dos depósitos a $20.0°C$ y $500°C$.

a) ¿Cuánta energía absorbe por hora?

b) ¿Cuánta energía pierde por hora en su salida?

Rpta.: a) 869 MJ
b) 330 MJ

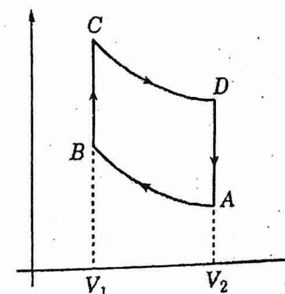
35 Una máquina térmica funciona entre $500°K$ y $300°K$ y se determina que disipa por el sumidero 12 K cal en 2 ciclos. Si la máquina recibe el 80% de la máxima cantidad de calor que podría recibir, determine su eficiencia.

Rpta.: 25%

36 Calcular el incremento de la entropía de $\nu = 2$ moles de gas perfecto cuyo exponente adiabático $\gamma = 1.3$, si como resultado de cierto proceso el volumen del gas aumentó en $\alpha = 2$ veces y su presión disminuyó en $\beta = 3$ veces.

Rpta.: $\Delta S = (\gamma \operatorname{Ln} \alpha - \operatorname{Ln} \beta)\, \nu R/(\gamma - 1) = -11 J/°K$

37 La gráfica nos muestra el ciclo termodinámico que desarrollan los motores gasolineros (ciclo de Otto). Determine la eficiencia de dicho ciclo $\left[\gamma = \frac{C_P}{C_V}\right]$



Rpta.: $\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma - 1}$

38 El calor específico medio del cobre es $0.093\ cal/g°C$ entre los límites de temperatura de $0°C$ a $100°C$. Halle el cambio total en la entropía para los siguientes casos:

a) Un bloque de cobre de 500 g a la temperatura de $90°C$ se coloca en un lago cuya temperatura es de $10°C$.

b) Se deja caer el objeto al lago desde un helicóptero situado a 20 m de altura.

c) Se unen dos bloques de cobre de 500 g uno a $10°C$ y el otro a $90°C$, dentro de un recipiente aislado de los alrededores.

Rpta.: a) $\Delta S = -11.57\ cal/°K$
b) $\Delta S = -11.51\ cal/°K$
c) $\Delta S = -0.72\ cal/°K$

39 Una de las máquinas más eficientes jamás construida (eficiente real: 42.0%) opera entre $430°C$ y $1\,870°C$.

a) ¿Cuál es su máxima eficiencia teórica?

b) ¿Cuánta potencia entrega la máquina si absorbe del depósito caliente $1.40\times10^{5}1$ de energía cada segundo?

Rpta.: a) 67,2%
b) 58,8KW

40 En un cilindro de un motor de automóvil, justo después de la combustión, el gas se confirma en un volumen de $50.0\ cm^3$ y tiene una presión inicial de $3.00\times10^{6}\ Pa$. El pistón se mueve hacia afuera a un volumen final de $300 cm^3$ y el gas se expande sin pérdida de energía por calor:

a) Si $y = 1.40$ para el gas, ¿cuál es la presión final?

b) ¿Cuánto trabajo realiza el gas al expandirse?

Rpta.: a) 244KPa
b) 192J

41 Un mol de gas perfecto efectúa un proceso en el transcurso del cual la entropía del gas varía en función de la temperatura T según la ley $S = aT + C_v \text{Ln}T$, donde a es una constante positiva, C_v la capacidad calorífica molar del gas a

volumen constante. Hallar la dependencia entre la temperatura del gas y su volumen en este proceso, si cuando $V = V_0$ la temperatura $T = T_0$.

Rpta.: $T = T_0 + (R/a)\text{Ln}(V/V_0)$

42 Hallar, calculando para un mol, el incremento de la entropía del gas carbónico con el aumento de su temperatura absoluta en $n = 2$ veces, si el proceso de calentamiento es: (a) isócoro (b) isobárico

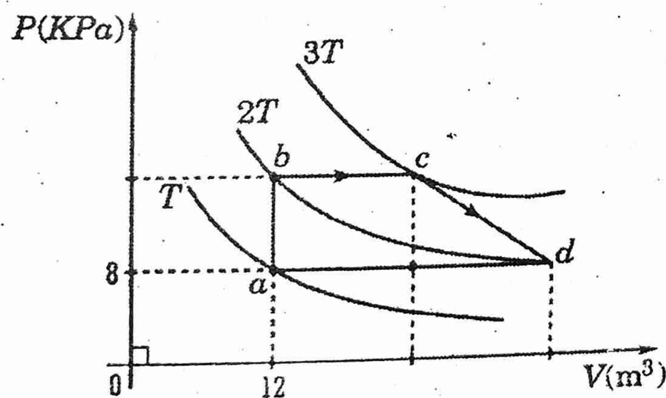
Rpta.: a) $\Delta S = R\text{Ln}\frac{n}{(y-1)} = 19J/\text{mol}-°K$

b) $\Delta S = R\text{Ln}\frac{n}{(y-1)} = 25J/\text{mol}-°K$

43 Calcule la eficiencia térmica de un motor térmico que opera según el ciclo de Carnot entre $27°C$ y $127°C$; si se quiere duplican la eficiencia elevando la temperatura del foco caliente manteniendo constante la temperatura del sumidero. ¿Qué valor tendrá esta nueva temperatura?

Rpta.: 25%, $600°K$

44 El ciclo mostrado es realizado por una máquina térmica con un gas ideal. Calcule el trabajo neto realizado por ciclo



Rpta.: 81KJ

45 En cuántas veces es necesario aumentar isotérmicamente el volumen de $v = 4$ moles de gases perfecto, para que su entropía experimente un incremento $\Delta S = 23\ J/°K$

Rpta.: $n = e^{\Delta S/VR} = 2$

46 Un gas ideal se somete a un ciclo de Carnot. La expansión isotérmica ocurre a $250°C$, y la comprensión isotérmica tiene lugar a $50.0°C$. Suponiendo que el gas absorbe 1 200 J de energía del depósito caliente durante la expansión isotérmica, encuentre.

a) La energía expelida al depósito frío en cada ciclo, y b) el trabajo neto realizado por el gas en cada ciclo.

b) El trabajo neto realizado en cada ciclo.

Rpta.: a) 741 J
b) 459 J

47 640 g de plomo derretido a la temperatura de fusión se vierten sobre hielo a $0°C$. Hallar la variación que experimenta la entropía durante esta transformación.

Rpta.: $\Delta S = 63\,J/°K$

48 Dos moles de hielo se encuentran inicialmente a la temperatura de 27°C y ocupan un volumen de 20 litros. El gas se expande primero a presión constante hasta duplicar el volumen, y después adiabáticamente hasta que la temperatura vuelve a su valor inicial.

a) Dibújese un diagrama del proceso en el plano $p-V$.
b) ¿Cuál es el calor total suministrado durante el mismo?
c) ¿Cuál es la variación total de energía interna del helio?
d) ¿Cuál el trabajo total realizado por el gas?
e) ¿Y el volumen final?

Rpta.: b) $Q = 3{,}00$ cal c) $\Delta U = 0$
d) $W = 12{,}55\,J$ e) $V = 113$ litros.

49 Una planta eléctrica, que tiene una eficiencia de Carnot, produce 100MW de energía eléctrica a partir de turbinas a las que llega el vapor a 500K y que expulsan agua a 300K hacia la corriente de un río. Suponiendo que el agua corriente abajo está 6.00K más caliente debido a la salida de la planta eléctrica, determine la relación de flujo del río.

Rpta.: $5{,}97 \times 10^4\,kg/s$

50 Se ha propuesto una central eléctrica que aprovecharía el gradiente de temperatura del océano. El sistema operará entre $20.0°C$ (temperatura del agua superficial) y $5.00°C$ (temperatura del agua a una profundidad cercana a un km.).

a) ¿Cuál es la eficiencia máxima de un sistema con estas características?

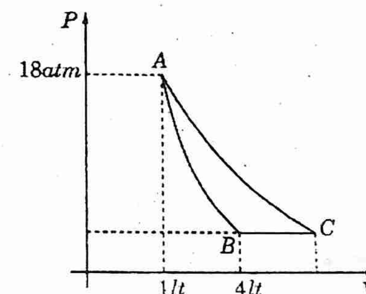
b) Si la salida de potencia de la planta es de 75.0KW, ¿cuánta energía se absorbe por hora?

c) ¿En vista de su respuesta a la parte a), ¿usted cree que tal sistema vale la pena (considerando que no se tiene que pagar el combustible)?

Rpta.: a) 5,12%
b) 5.275J/h

51 La figura muestra tres procesos realizados por un gas perfecto. La temperatura es el punto A, es de $600°K$, la presión 16 atm y el volumen 1 litro. En el punto B, el volumen es de 4 litros.

Uno da los procesos AB ó AC es isotérmico y el otro adiabático. $Y = 1.5$



a) ¿Cuál de los procesos AB ó AC es isotérmico y cuál es adiabático? ¿ En qué se basa su respuesta?
b) Calcúlese la presión en los puntos B y C.
c) Hállese las temperaturas en B y C.
d) Obténgase el volumen en el punto C.

Rpta.: a) $AB \rightarrow$ adiabático b) $P_C = P_B = 2$ atm
c) $T_C = T_A = 600°K$ d) $V_C = 8$ litros.
$T_B = 300°K$

52 En un cilindro se tiene cierta cantidad de gas tapado por un émbolo de 10KN a la presión atmosférica. ¿Qué masa de carbón se debe quemar para incrementar en 10kJ la energía interna del gas, si el émbolo de $0{,}5m^2$ de sección sube lentamente $50cm^2$. El poder calorífico del carbón es 20kJ/kg y su eficiencia de combustión es 80%.

Rpta.: $m = 5\text{kg}$.



EXÁMENES DE FÍSICA II

(Tipo de respuesta múltiple)

EXAMEN (I)

01 De las siguientes afirmaciones:

I) En el análisis de deformaciones se puede trasladar la fuerza deformadora a lo largo de su línea de acción.

II) La fragilidad es una propiedad opuesta a la plasticidad y consiste en la capacidad del material de destruirse sin deformaciones residuales apreciables.

III) La deformación por tracción o compresión se caracteriza porque el volumen permanece constante y la forma del cuerpo varía.

¿Cuál es verdadera?

a) I, II b) I, II, III c) II d) III e) N.A.

02 En un MAS siempre existe una relación lineal entre una coordenada de posición de la partícula y su:

a) Período b) Frecuencia c) Constante de fase
d) Velocidad e) N.A.

03 Si el módulo de Poisson es igual a 0.5 entonces la variación del volumen del cuerpo es:

a) Ligeramente menor que V_0 b) Ligeramente mayor que V_0
c) Igual a cero d) Faltan datos
e) N.A.

04 Una barra de longitud L, sección transversal uniforme A y módulo de elasticidad E, está sometida en sus extremos a dos fuerzas de tracción iguales y opuesta F. ¿Cuál de los siguientes enunciados es correcto?

a) Deformación Longitudinal $2FL/EA$
b) Deformación Longitudinal FL/EA
c) Esfuerzo tangencial constante F/A
d) Esfuerzo normal $2F/A$
e) N.A.

05 En un MAS, cuál expresión es falsa o verdadera:

I) Cuando la aceleración es máxima, también lo es la velocidad.
II) Cuando la velocidad es máxima la aceleración es cero.
III) La aceleración es directamente proporcional y del mismo sentido que la elongación.
IV) La energía mecánica total es igual a la energía cinética máxima.

a) VVFF b) VFVF c) FFVV d) FVVV e) N.A.

06 Un depósito cerrado grande con agua hasta una altura H, contiene aire por encima del agua a una presión manométrica Pm. El agua sale por un orificio pequeño, practicado en una de las paredes laterales a una profundidad h por debajo del nivel del agua. La velocidad con la cual sale el agua por este orificio es: (γ : peso específico del agua. P_0 : presión atmosférica).

a) $\sqrt{2gh}$ b) $\sqrt{2g[h-(P_m/\gamma)]}$ c) $\sqrt{2g[h+(P_m/\gamma)]}$

d) $\sqrt{2g\left[h+\left(\frac{P_m-P_0}{\gamma}\right)\right]}$ e) N.A.

07 ¿Cuál expresión es verdadera?:

I) La ecuación de Poiseuille es usada en los fluidos reales.
II) El número de Reynolds es directamente proporcional al radio de la tubería.
III) La ley de Stockes es proporcional a la densidad del fluido.

a) VVV b) VVF c) VFV d) FVF e)

08 La ecuación fundamental de la hidrodinámica se llama: ....
.... y esta dada por: ....
....

09 La ley de Stokes es válida para cualquier objeto que se mueve dentro de un fluido, esta expresión es:

a) cierto b) Falso c) Faltan datos d) N.A.

10 A la expresión: "Un fluido transmite en todas direcciones el exceso de la presión externa que se ejerce sobre él", se le conoce como ....

EXAMEN (II)

01 Diga cuál expresión es incorrecta:

I) La elasticidad depende del material.
II) Los sólidos se caracterizan por tener forma y volumen constante.
III) El módulo de compresibilidad nos da el cambio de forma.
IV) El coeficiente de Poisson nos da la información sobre la contracción lateral de la muestra.

a) I b) II c) III d) IV e) N.A.

02 Diga si la siguiente expresión: "*Cuando se define la presión se utiliza la fuerza normal a la superficie*" es.

a) cierto b) falso c) Faltan datos d) N.A.

03 Diga cuál expresión es falsa:

I) El empuje varía con la profundidad.
II) La presión de un líquido sobre una cara lateral de un cubo es constante.
III) La presión sobre una cara horizontal de un cubo es constante.
IV) La presión variable en un fluido se transmite sin variación a todas partes del fluido.

a) I b) II c) III d) IV e) N.A.

04 La razón del esfuerzo aplicado a un material a la correspondiente deformación unitaria sin sobrepasar el límite de elasticidad, se denomina: ....
....

05 Para aumentar la superficie de un líquido se requiere de una cantidad de trabajo, que se convierte en ....

06 Indique el enunciado correcto:

a) El barómetro de mercurio cumple la relación $P_0 = \rho g V$
b) La presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin disminución sólo a las paredes del recipiente.
c) El empuje se supone aplicado a un punto llamado centro de masa.
d) La viscosidad de los gases aumenta cuando la temperatura se eleva.

07 Una vasija con agua se encuentra en uno de los platillos de una balanza. Si colocamos un corcho sobre el agua, cuál expresión es correcta.

a) La balanza marca lo mismo
b) La balanza marca menos
c) La balanza marca más
d) Faltan datos
e) N.A.

08 Las unidades de la viscosidad en el sistema CGS, son: ....

09 Diga cuál expresión es falsa:

a) El número de Reynolds es adimensional
b) La fuerza de viscosidad es directamente proporcional al gradiente de velocidad.
c) La velocidad límite alcanzada por una esfera es igual al peso del cuerpo menos la fuerza de viscosidad.
d) La presión dinámica de la ecuación de Bernoulli es $\frac{1}{2}\rho v^2$.

10 Diga cuál expresión es verdadera:

a) La presión manométrica puede tomar valores negativos
b) La presión manométrica es siempre positiva
c) La presión absoluta es siempre positiva
d) La presión absoluta puede tomar valores negativos.

EXAMEN (III)

01 ¿Cuál expresión es verdadera?

a) Las presiones pueden tomar valores negativos.
b) Un manómetro sólo mide presiones absolutas.
c) El principio de Arquímedes no es una consecuencia de la estática de los líquidos.
d) Toda presión está relacionada con una fuerza, y toda fuerza está relacionada con la presión.

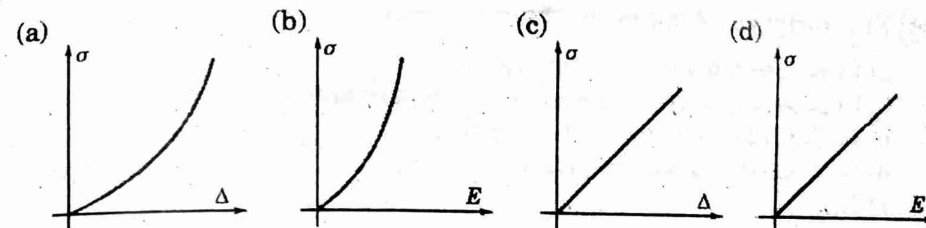
02 Cuál expresión es falsa o verdadera:

I) El esfuerzo por tracción o compresión es $\sigma = E\Delta L$. (E: el módulo de Young, def. longitudinal: ΔL)

II) La constante de elasticidad para un resorte está dado por $K = S/EL_0$.
III) La fatiga constante se refiere cuando actúa perpendicularmente a la superficie.

a) VVV b) VFV c) FVV d) FVF e) N.A.

03 Cuál de los gráficos representa mejor el esfuerzo de tracción aplicado a una barra de longitud L.



04 Una carga P se cuelga de un alambre de longitud L y radio r. Cuánto es el trabajo de tracción del alambre efectuado por la carga.

a) $PL/2\pi r^2E$ b) $P^2L/2\pi r^2E$ c) $P^2L/2\pi Er$
d) 0 e) N.A.

05 Una fuerza $F = (9,9,16)$ dinas actúa sobre un área cuadrada de lado 5 cm en el plano YZ. El esfuerzo cortante ($dinas/cm^2$) es:

a) 1 b) 0.36 c) 0.64 d) 0.51 e) N.A.

06 ¿Cuáles expresiones son correctas?:

I) La ley de Hooke es válida hasta el punto de plasticidad.
II) Todo material frágil carece de comportamiento plástico.
III) La dureza del material es una propiedad escalar.

a) I b) II c) III d) I y III e) II y III

07 Un peso de 5 kg. f cuelga de un alambre de acero vertical de 60 cm de longitud y 0.625 mm^2 de sección transversal. Se cuelga de la parte inferior del peso, un alambre análogo que soporta un peso de 2.5 kg f. Despreciando los pesos de los alambres, el alargamiento del alambre superior es: ($E = 2\times10^4\ Kg/mm^2$).

a) 0.12 mm b) 0.24 mm c) 0.36 mm d) 0.48 mm e) N.A.

08 ¿Cuál expresión es verdadera?:

I) La presión se transmite en líquidos, sólidos y gases.
II) La presión manométrica se usa para medir presiones de fluidos encerrados en recipientes, estos pueden estar en reposo o movimiento.
III) Las unidades de presión son cm. de mercurio.

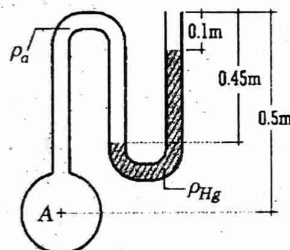
a) VVF b) VFF c) FVF d) FVV e) N.A.

09 El Principio de Arquímedes sirve sólo para calcular:

a) El volumen del cuerpo sumergido
b) El peso del cuerpo sumergido total o parcialmente
c) La densidad del líquido desconocido.
d) La masa de líquido desplazado.
e) N.A.

10 La figura muestra un manómetro de mercurio que está conectado a una vasija. La presión manométrica en la vasija es: $(x10^5\ N/m^2)$

a) 3.22
b) 0.47
c) 1.36
d) 2.58
e) N.A.



$\rho_a = 1$

$\rho_{Hg} = 13.6$

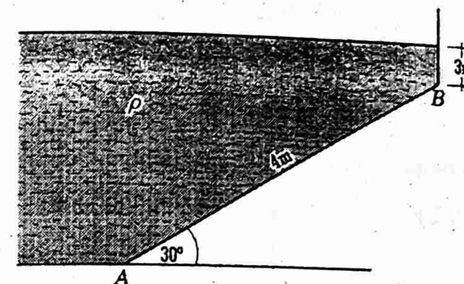
EXAMEN (IV)

01 Un tubo en *U* cuya secciones 1 cm², contiene *Hg*. Si por uno de sus extremos se introduce 20 cm³ de agua, entonces el desnivel entre las dos ramas será (cm):

a) 18.53 b) 1.47 c) 8.36 d) 0.12 e) N.A.

02 En la figura *AB* es la proyección frontal de un dique, cuyas dimensiones son : $4 \times 10 m^2$. Hallar la fuerza total (*kg f*) debida a la presión del agua sobre dicha superficie rectangular inclinada *AB*.

a) 2×10^5
b) 72×10^3
c) 12×10^4
d) 0.25×10^4
e) N.A.



03 Diga cuál expresión es falsa o verdadera:

I) Un fluido es capaz de resistir fuerzas tangenciales.
II) Los gases son incompresibles.
III) Los líquidos tienen superficie libre.

a) VVV b) VVF c) VFV d) FFV e) N.A.

04 Diga cuál expresión es falsa o verdadera:

I) La densidad relativa no tiene dimensiones.
II) La densidad de un fluido no depende de la presión y temperatura.
III) El peso específico de un cuerpo es mayor que su densidad.

a) VVV b) VFF c) FVV d) FFV e) N.A.

05 Que diámetro máximo pueden tener los poros de la mecha de una hornilla de petróleo ($\sigma = 0.03$ N/m) para que este último suba desde el fondo del depósito hasta el mechero de la hornilla $h = 10\ cm$?. Considerar que los pozos son tubos cilíndricos y que el petróleo moja perfectamente (mm).

a) 0.01 b) 2.7 c) 0.15 d) 0.98 e) N.A.

06 Dos barras metálicas de coeficiente de dilatación α_1 y α_2 tienen a 0°*C* longitudes L_1 y L_2 respectivamente. Para que a cualquier temperatura estas barras presentan la misma diferencia de longitud, se debe cumplir.

a) $\alpha_1 = \alpha_2$ b) $L_1\alpha_1 = \alpha_2 L_2$ c) $L_1\alpha_2 = L_2\alpha_1$ d) N.A.

07 ¿Cuál será la velocidad máxima que puede alcanzar una gota de lluvia de radio 0.15 mm si la viscosidad del aire es de $1.2 \times 10^{-4}\ g/cm\,seg$ (en m/s).

a) 0.67 b) 1.8 c) 4.1 d) 6.4 e) N.A.

08 Cuál expresión es falsa o verdadera:

I) El ángulo de contacto depende del recipiente que contiene a los medios de contacto.
II) Si el menisco es cóncavo el ángulo de contacto es agudo.
III) El ángulo de contacto depende de la fuerza de la gravedad.

a) VVV b) VVF c) FVF d) FFF e) N.A.

09 La ecuación de la continuidad:

a) Nos dice que la velocidad del flujo varía en razón directa al área de la sección transversal de la tubería.
b) Define la conservación de la energía para cualquier tipo de flujo.
c) Expresa la conservación de la masa en un flujo de fluidos sin importar el tipo de flujo.
d) Define el flujo de volumen por unidad de tiempo en cualquier sección de la tubería.

10 Cuál expresión es falsa o verdadera:

a) La viscosidad de los gases aumenta cuando la temperatura se eleva.
b) La ley de Poiseuille es válida para fluidos ideales en movimiento.
c) La ecuación de continuidad se determina a partir de la conservación de la masa.
d) Cuando la velocidad media es la mitad de la velocidad máxima se tiene flujo turbulento.

a) VVVV b) VVFF c) FFFF d) FVFV e) N.A.

EXAMEN (V)

01 Cuál respuesta es correcta

a) Si dos sistemas se encuentran a diferentes temperaturas y en contacto, entonces estos sistemas llegarán a un equilibrio térmico.
b) La caloría es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura a un grado centígrado a un gramo de agua.
c) El *BTU* es la cantidad de calor que se suministra a un Kg de agua para elevar su temperatura en un grado Fahrenheit.

a) VVV b) VVF c) FVV d) VFV e) N.A.

02 Diga cuál expresión es falsa o verdadera:

a) Un termómetro mide la cantidad de calor que poseen los cuerpos.
b) Cuando un sólido se dilata su masa aumenta.
c) Cuando una sustancia absorbe calor siempre eleva su temperatura.

a) VVF b) FVV c) FFV d) FFF e) N.A.

03 Dos sólidos de masas diferentes a partir de una misma temperatura inicial reciben iguales cantidades de calor y entonces la temperatura final de los sólidos es la misma. Luego:

a) Sus densidades son iguales
b) Sus conductividades térmicas son iguales
c) Sus masas son directamente proporcionales a sus calores específicos
d) N.A.

04 Cuál expresión es correcta:

I) El trabajo que realiza un sistema es siempre positivo.
II) Toda transformación adiabática tiene que ser rápida para evitar que el calor se pierda.
III) Toda transformación isotérmica tiene que ser lenta para conseguir que el calor sea eliminado y en consecuencia no haya aumentado su temperatura.

05 Cuál de las siguientes expresiones es falsa:

I) La ley de Boyle-Mariotte en un cierto rango de presiones se puede utilizar para un gas ideal.
II) La energía interna de un mol de gas sujeta a la ecuación PVT^{-1} = constante no depende del número de átomos que forma cada molécula.
III) Si un refrigerador funciona con su puerta abierta en una sala cerrada, la temperatura del ambiente tiende a aumentar.

06 Cuál de las expresiones es falsa:

I) Las máquinas térmicas son dispositivos que convierten energía calorífica en energía mecánica.
II) Los motores térmicos trabajan bajo un ciclo cerrado en el Plano PV.
III) La entropía es directamente proporcional a la temperatura.
IV) No es posible disminuir la entropía de un sistema.

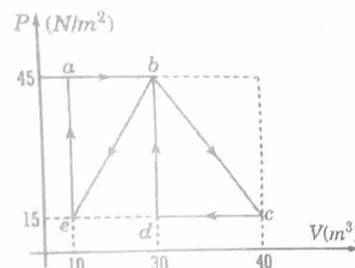
07 La masa de agua a 100°C que debe mezclarse con dos litros de agua a 4°C para que la temperatura final de la mezcla sea de 20°C (en g) :

a) 3.2 b) 400 c) 40 d) 2 e) N.A.

08 La cantidad de calor que se requiere para incrementar 1 mol de helio a 100°K manteniendo constante el volumen es 300 cal. Entonces el calor necesario para incrementar la temperatura de 1 mol a 100°K manteniendo constante la presión es en cal: ($\gamma = 1.67$)

a) 180 b) 501 c) 310 d) 510 e) N.A.

09 Un gas efectúa un proceso cíclico $abcd$ sea, como se muestra en la figura. El trabajo neto realizado por el gas en joule es:



a) 0 b) 900 c) 450
d) 1650 e) N.A.

10 Un gas ideal con $\gamma = 1.4$ realiza cinco expansiones adiabáticas consecutivas de modo que en cada expansión ha duplicado su volumen. Si P_0 es la presión inicial, entonces la presión final será:

a) $P_0/10$ b) $P_0/32$ c) $P_0/64$ d) $P_0/128$ e) N.A.

EXAMEN (VI)

01 "Un sólido amorfo tiene sus átomos dispuestos en forma periódica", esta expresión es:

a) Falsa b) Cierta c) N.A.

02 Cuál expresión es falsa o verdadera:

I) En la elasticidad los procesos son reversibles.
II) La deformación sólo se relaciona con el cambio de las dimensiones.
III) Para cuerpos porosos μ es cero.

a) VVV b) VVF c) VFF d) FFV e) N.A.

03 Cuál respuesta es correcta:

I) En los puntos de máxima oscilación la energía cinética es cero.
II) La energía potencial tiene su valor máximo en los puntos de máxima oscilación.
III) En el centro de oscilación la energía cinética es igual a la energía total

a) VVF b) FVV c) VVV d) FFF e) N.A.

04 Cuál expresión es falso o verdadera:

I) Las presiones absolutas pueden tomar valores negativos.
II) Un manómetro que lee presiones por debajo de la atmósfera se llama de vacío.
III) Los términos fluido y viscosidad son opuestos.

a) VVF b) VFF c) VVV d) FVF e) N.A.

05 Cuál expresión es verdadera o falso:

I) Algunos fluidos son incapaces de resistir fuerzas normales y desplazarse
II) Los fluidos son incapaces de resistir fuerzas normales sin desplazarse.
III) Los fluidos son capaces de resistir fuerzas normales sin desplazarse.

a) VVV b) VFF c) FVF d) FFF e) N.A.

06 La magnitud que determina cuántas veces por segundo se repite el movimiento se llama .... y su unidad es ....

07 La superposición de dos MAS perpendiculares de la misma frecuencia da lugar a una polarización ...., cuando la diferencia de fase es $\pm\pi/2$ y las amplitudes son iguales.

08 El hielo tiene una densidad respecto al agua de mar de 0.9 que fracción de iceberg está sumergida:

a) 0.9 b) 0.1 c) 0.3 d) 0.8 e) N.A.

09 Dadas las siguientes afirmaciones:

I) La presión sobre una superficie se define como el módulo de la fuerza perpendicular a la superficie por unidad de área.
II) En ausencia de la gravedad, la presión en un fluido en reposo es la misma en todos los puntos.

III) La presión en un punto de un fluido perfecto, en cualquier dirección, tiene la misma magnitud a pesar de que dicho punto se halla acelerado.

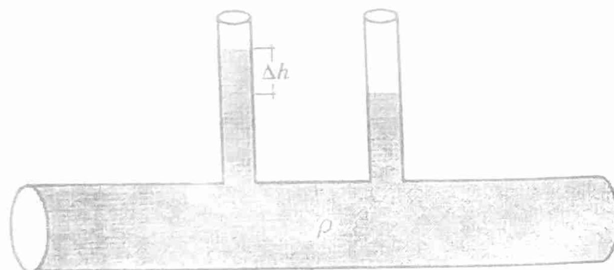
a) Sólo I y II son verdaderas
b) Sólo I es verdadero
c) Todas son verdaderas
d) Todas son falsas
e) Sólo II es verdadera

10 Un bloque de madera de volumen V flota en agua con la mitad de su volumen sumergido. ¿Qué porción de su volumen permanecerá sumergido en agua, en la superficie de la luna donde las cosas pesan 1/6 de lo que pesan en la tierra?

a) V/12 b) V/4 c) V/6 d) V/3 e) V/2

EXAMEN (VII)

01 En la figura se tiene un flujo en régimen estable, laminar, de un líquido cuya viscosidad dinámica es 8 poises. El radio del tubo es de 20 cm y por el pasan 8 litros/seg. En la parte superior de su pared se encuentra acoplados dos tubitos los cuales tienen una diferencia de niveles tal como se muestra, siendo la distancia entre dichos tubitos igual a 10 π cm. La diferencia de presiones que existe entre las secciones del tubo, que se hallan al lado de los tubitos, esta dado por: $(dinas/cm^2)$.

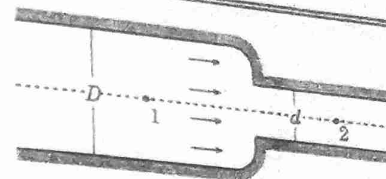


a) 64 b) 16 c) 32 d) 0 e) N.A.

02 En el problema anterior la corriente va de:

a) Izquierda a derecha
b) Derecha a izquierda
c) Nada se puede afirmar del sentido de la corriente
d) De acuerdo a la figura puede ser en cualquier sentido
e) N.A.

03 Por la tubería horizontal indicada en la figura, circula agua. Los diámetros de las secciones transversales de la tubería son D y d. Con relación a las presiones en los puntos 1 y 2, podemos afirmar que:



a) $p_1 < p_2$, si $v_2 > v_1$
b) $p_1 = p_2$, si $v_2 > v_1$
c) $p_1 > p_2$, si $v_2 > v_1$
d) $p_1 = p_2$ para cualquier valor de velocidad
e) N.A.

04 ¿Cuál es el gasto a través de un orificio circular de 2 mm de diámetro, localizado a 5 m por debajo de la superficie del líquido? (en m^3/s)

a) 31.4 b) 126 c) 3.14×10^{-5} d) 12.56×10^{-5} e) N.A.

05 Los diámetros de las ramas de un tubo capilar de vidrio en U son diferentes. Si se echa agua (moja al vidrio) en dicho tubo, entonces el nivel será más alto en:

a) La rama delgada
b) La rama gruesa
c) Los niveles son iguales
d) Faltan datos para decidir
e) N.A.

06 Es falso que el ángulo de contacto θ:

a) Depende solamente de la naturaleza de los medios en contacto.
b) Es independiente de la forma del recipiente.
c) No depende de la aceleración de la gravedad.
d) Definido por $\cos\theta$ positivo produce un mojado parcial.
e) Sólo una anterior es falsa.

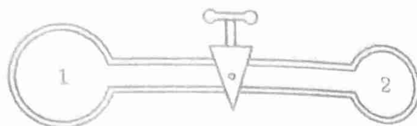
07 El coeficiente de tensión superficial también se puede expresar en:

a) Kg/seg b) $Kg \cdot seg$ c) Kg/seg^2 d) $dina/cm^2$ e) N.A.

08 Un vaso sanguíneo capilar posee un radio de $2\times10^{-6}\,m$. Suponiendo que la sangre moja perfectamente las paredes del capilar, la altura en metros, que tendrá que ascender por efecto de capilaridad es:
$(\rho = 1050\ Kg/m_3\ ,\ \sigma = 0.0525\,N/m)$

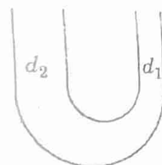
a) 0.5 b) 1.0 c) 5 d) 10 e) N.A.

09 En la figura se ve dos burbujas conectadas (gotas esféricas huecas llenos de aire) en cierto instante, la burbuja 2 es más pequeña que la burbuja 1. Cuando se abre la llave, respecto a estas burbujas se puede decir correctamente que:



a) La burbuja 2 aumentará de tamaño hasta igualarlo a 1.
b) Los tamaños serán invariables en el tiempo.
c) La burbuja 2 disminuirá y simultáneamente la 1 aumentará de tamaño.
d) Faltan datos para responder correctamente
e) N.A.

10 La figura muestra dos tubos de vidrio comunicantes entre sí cuyos diámetros internos son $d_1 < d_2$, que en conjunto forman un solo tubo en U. Si en dicho tubo se deposita un líquido que moja al vidrio, entonces:



a) El nivel que alcanza el líquido es más alto en la rama de diámetro d_2.
b) El nivel que alcanza el líquido es más alto en la rama de diámetro d_1.
c) El líquido alcanza el mismo nivel en ambas ramas.
d) Falta información para decidir.
e) N.A.

EXAMEN (VIII)

01 Un tren cuya masa es 2000 toneladas frena con una aceleración de 0.3 m/s^2 y se detiene luego de 50 seg. contando a partir del instante en que empieza a frenar. La cantidad de calor en Joules que se desprende durante este tiempo es aproximadamente ($\times 10^8$)

a) 2.25 b) 9.63 c) 7.43 d) 5.52 e) N.A.

02 Una bala de plomo que lleva la velocidad de 400 m/s choca con una pared y penetra en ella. Suponiendo que el 10% de la energía cinética de la bala se invierte en calentarla. Calcular cuántos grados se elevará su temperatura. El calor específico del plomo es igual a 4.18 en unidades cgs (en °C)

a) 6 b) 66 c) 420 d) 10 e) N.A.

03 Cuando preparaba las preguntas para el examen, tenía un termómetro de dos escalas frente a mi en el cual observé que la temperatura llega a 78.2 °F, cuál habrá sido aproximadamente la temperatura en °C más cerca:

a) 25.8 b) 25.6 c) 26.1 d) 26 e) N.A.

04 Un pedazo de metal y uno de madera están a la misma temperatura, si con un dedo tocamos simultáneamente ambos. Observamos que se siente más frío el pedazo de metal que el de madera, esto es debido a la:

a) Radiación de calor.
b) Transferencia de calor por convección.
c) Pérdida de calor por conducción del metal.
d) Pérdida de calor del dedo, por conducción.
e) N.A.

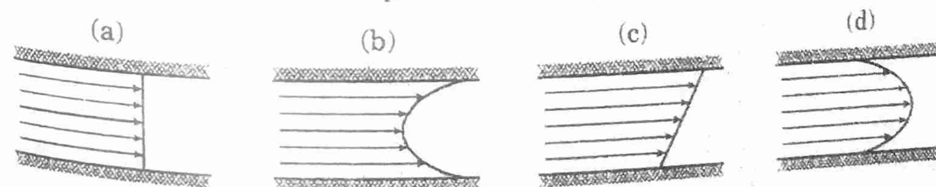
05 Una araña de agua de 2 g de masa está apoyada sobre la superficie del agua. Suponiendo que cada pata soporta (1/8 del peso de la araña y el ángulo de contacto es 60°. Entonces el radio de la depresión semiesférica hecha por cada pata es: $(\times 10^{-4}\, m)$ Si $\sigma = 0.071\, N/m$

a) 224 b) 50 c) 112 d) 64 e) N.A.

06 Un balón de jebe se infla hasta un radio de 0.10 m. La presión interior del balón es: $1.001 \times 10^5\, N/m^2$ y la presión exterior al balón es de $10^5\, N/m^2$. Entonces el valor del coeficiente de tensión superficial del jebe del balón es en N/m.

a) 2.5 b) 0.5 c) 0.001 d) 5 e) N.A.

07 Para un fluido viscoso incompresible que circula en régimen laminar por una tubería horizontal de radio R, la distribución de velocidades de las partículas de fluido en una sección cualquiera de la tubería tiene la forma aproximada:



08 Un fluido circula entre dos secciones de una misma tubería. En la sección 1 se tiene $S_1 = 0.90 m^2$, $\upsilon_1 = 30\, m/s$ y la densidad es $0.24\, Kg/m^2$. En la sec-

ción 2 se tiene $S_2 = 0.24\,m^2$ y la densidad es $3.33\ Kg/m^3$.. Entonces la velocidad del fluido en la sección 2 es en m/s:

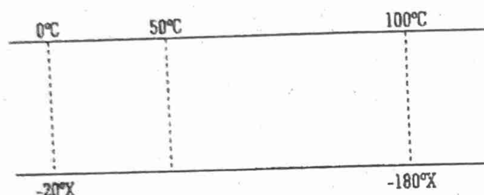
a) 8 b) 112 c) 30 d) 156 e) N.A.

09 Las unidades del número de Reynolds en el sistema *CGS* es:

a) dinas-seg/cm^2 b) poise c) cm^3/seg d) Stoke e) N.A.

10 De las escalas termométricas que se dan a continuación, la temperatura en la escala °X que corresponde a 50°C es:

a) 90
b) 100
c) 120
d) 80
e) N.A.



EXAMEN (IX)

01 ¿Cuál expresión es falsa o verdadera?

I) La temperatura es una magnitud independiente de la masa del cuerpo y caracteriza el estado térmico del cuerpo.
II) La temperatura es una magnitud que depende de la masa del cuerpo y caracteriza el estado térmico del cuerpo.
III) Los sólidos se dilatan más que los sólidos.

a) VVF b) VVV c) FFF d) VFF e) N.A.

02 El hecho que las sustancias difieran unas de otras en la cantidad de calor necesario para producir una elevación de temperatura depende:

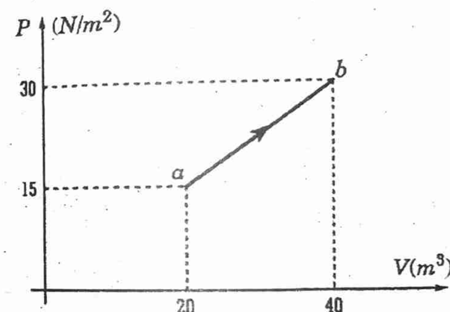
a) Del coeficiente de conductibilidad térmica.
b) De las diferencias iniciales de temperatura entre puntos extremos de la muestra.
c) Del equivalente mecánico del calor que posee cada una de ellos.
d) De la capacidad calorífica de cada sustancia.
e) N.A.

03 De las afirmaciones que se dan a continuación elija la respuesta correcta:

I) El trabajo que realiza un sistema siempre es positivo.
II) Toda transformación adiabática tiene que ser rápida para evitar que el calor se escape.
III) Toda transformación isotérmica tiene que ser lenta para conseguir que el calor sea eliminado y en consecuencia no haya aumento de temperatura.

a) VFV b) VVV c) VVF d) VFF e) N.A.

04 Un gas ideal que contienen moles efectúa el proceso $a \to b$ que se muestra en el diagrama *P-V* de la figura.



La relación entre la temperatura *T*, el volumen *V*, el número de moles *n*, la constante universal de los gases es *R* es:

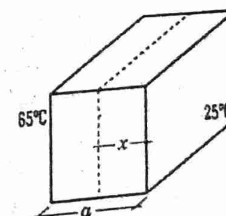
a) $T = 3V^2/4nR$
b) $T = 22.5\ V/nR$
c) $T = 3V^2/2nR$
d) $T = 4V^2/3nR$
e) N.A.

05 Cuál expresión es verdadera o falsa:

I) Un sistema puede tener varios isotermas.
II) Una pared diatérmica, permite el paso del flujo calorífico.
III) Los termómetros que miden temperaturas elevados se llaman pirómetros.

a) VVV b) VVF c) FVV d) FFF e) N.A.

06 En una losa de metal de $a = 500$cm de grosor y cuyas otras dimensiones son mucho mayores, una cara se mantiene a 25°*C* y la otra a 65°*C*, como se muestra en la figura. La temperatura *t* a una distancia $x = 200$cm, medida a partir de la cara de menor temperatura es en °C.



a) 40 b) 41 c) 61 d) 31 e) N.A.

07 Cuál expresión es falsa o verdadera:

I) Cuando un cuerpo se dilata su masa varía.
II) Un líquido no posee coeficiente de dilatación lineal.
III) Cuando se estudia dilatación, no se considera cambios de estado.

a) VVV b) VVF c) VFF d) FFF e) N.A.

08 Cuál expresión es falsa o verdadera:

I) Para los gases monoatómicos, la energía cinética sólo considera movimiento de traslación.
II) Las unidades de la capacidad calorífica son Cal/°C.
III) La evaporización se da a cualquier temperatura.

a) VVV b) VVF c) FFV d) FFF e) N.A.

09 Según la teoría del calorífico, el calor es un fluido, formado por partículas ponderables.

a) Cierto b) Falso c) Faltan datos d) N.A.

10 Cuál expresión es falsa o verdadera:

I) La condición necesaria y suficiente para que un proceso sea reversible es la de ser una sucesión de estados de equilibrio.
II) La entropía no puede ser destruida pero si puede ser creada en cualquier proceso que realice un sistema aislado.
III) Un proceso irreversible el sistema que lo experimenta no puede regresar a su estado inicial.

a) VFV b) FVF c) VVF d) VVV e) N.A.

EXAMEN (X)

01 ¿Cuál expresión es falsa o verdadera?

I) Cuando se hace un enfoque macroscópico corresponde al estudio de la termodinámica.
II) Las planchas metálicas corresponde a una pared adiabática.
III) La densidad de un cuerpo varía inversamente proporcional con la temperatura.

a) VVV b) VFF c) FFF d) FVF e) N.A.

02 Un termómetro correcto graduado en la escala centígrada, señala una temperatura de 30°C. en el mismo lugar un termómetro incorrecto graduado en la escala Fahrenheit indica 87.1°F. Entonces la corrección que debe aplicarse a la lectura dada por el termómetro Fahrenheit es en °F .

a) 0.2 b) 0.1 c) –1.1 d) –2.1 e) N.A.

03 Se tiene dos esferas de cobre de radio R a una temperatura de 50°C, una de las esferas es sólida y la otra es hueca. Si ambas esferas experimentan el mismo cambio de temperatura, entonces el cambio de volumen que experimentan es:

a) Mayor en la esfera sólida, solamente si el cambio de temperatura es positivo.
b) Mayor en la esfera hueca solamente si el cambio de temperatura es negativo.
c) Es el mismo en ambas esferas ya sea el cambio de temperatura positivo o negativo.
d) Mayor en la esfera sólida, ya sea el cambio de temperatura positiva o negativa.
e) Faltan datos para averiguar cómo se relacionan los cambios de volumen.

04 Diga cual expresión es falsa o cierta:

I) Para los gases poliatómicos, la energía que se considera para definir el calor es el de traslación, rotación y vibración.
II) El cambio de estado de vapor a gas es evaporación.
III) El flujo calorífico es directamente proporcional al gradiente de temperatura.

a) VVV b) VFF c) FFF d) FVF e) N.A.

05 La masa de agua a 100°C que debe mezclarse con dos litros de agua a 4°C, para que la temperatura final de la mezcla sea de 20°C es en gramos.

a) 3.2 b) 400 c) 40 d) 2 e) N.A.

06 Completar el siguiente enunciado:

Para conocer el estado de equilibrio de un sistema es necesario tener en cuenta dos condiciones:

a) ....

b) ....

07 Cuál expresión es falsa o verdadera:

I) El asbesto corresponde a una pared diatérmica.
II) Para construir las escalas de temperatura es necesario conocer dos puntos de referencia.
III) Un sólido posee coeficiente de dilatación superficial.

a) VVV b) VVF c) FFF d) VFV e) N.A.

08 En una barra de cobre cuya conductibilidad térmica es de 0.92 cal/cm seg °C, el gradiente de temperatura es de 2.5 °C/cm. Entonces la diferencia de temperatura entre dos puntos de la barra separados 5 cm es en °C.

a) 125 b) 12.5 c) 2.3 d) 25 e) N.A.

09 Una varilla de cobre aislada térmicamente por su superficie lateral está en contacto térmico con un foco calorífico a 227 °C en un extremo y con otro foco calorífico a 27°C en el otro extremo. El cambio total de entropía del universo (focos caloríficos más varilla) en cal/°K, debido al proceso de conducción de 1,200 cal a través de la varilla vale:

a) 6 b) 0 c) 3 d) 1.6 e) N.A.

10 Indique cuales son los procesos para construir un termómetro:

a) ....
b) ....
c) ....
d) ....
e) ....

EXAMEN (XI)

01 Un cubo de 5 cm de lado se somete a una fuerza deformadora de 8000 N. Si la parte superior del cubo se desplaza 5×10^{-4} radianes con respecto a la base, entonces el módulo de rigidez del material del cubo es de N/cm^2.

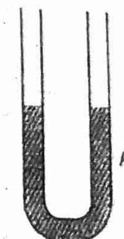
a) 64×10^4 b) 320×10^4 c) 1600×10^4 d) 64×10^4 e) N.A.

02 ¿Cuál es la expresión correcta?

I) En la deformación por tracción o compresión la forma del cuerpo varía mientras que el volumen permanece constante.
II) En la deformación por cizalladura la forma del cuerpo permanece constante, mientras que el volumen varía.
III) Las vigas se deforman por flexión.

a) VVV b) VFF c) FFF d) VVF e) N.A.

03 Una columna de líquido de densidad ρ y longitud L está en un tubo en U el que tiene una sección recta uniforme como se muestra en la figura. Si se agita el líquido y se la hace oscilar dentro del tubo, entonces la frecuencia de oscilación del líquido es en Hz.



a) $\sqrt{g/2L}/2\pi$ b) $\sqrt{g/L}/2\pi$ c) $\sqrt{2g/L}/\pi 2$
d) $2\pi\sqrt{g/L}$ e) N.A.

04 Al componer los movimientos armónicos simples en la misma dirección $X_1 = 3\,\text{sen}\,5t$ y $X_2 = 3\,\text{sen}\,10t$, se encuentra que la frecuencia del movimiento resultante es en Hz:

a) $5/2\pi$ b) $10/2\pi$ c) $15/2\pi$ d) N.A.

05 La densidad del hielo es 920 Kg/m^3 mientras que la densidad del agua de mar es 1025 Kg/m^3. Entonces un iceberg se sumergirá en el agua de mar un porcentaje de él igual a (en %):

a) 11.4 b) 9.2 c) 10.25 d) 89.8 e) N.A.

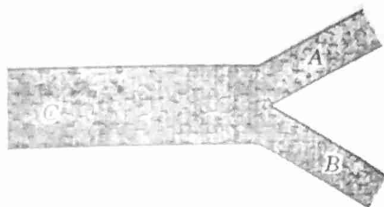
06 En la superficie libre de un estanque se forma una burbuja semiesférica de 0.8 cm de diámetro. Si la tensión superficial es 75 $dinas/cm$, entonces la fuerza que impide que la burbuja se desprende es en dinas.

a) 188.5 b) 376.99 c) 753.9 d) 94.2 e) N.A.

07 El trabajo que es necesario efectuar para extraer de una solución jabonosa un alambre de platino de 10 cm de longitud de peso despreciable de modo que forme una película de 2 cm de altura es en ergios, si $\sigma = 35$ $dinas/cm$.

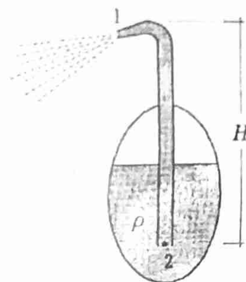
a) 1400 b) 700 c) 140 d) 70 e) N.A.

08 Se tiene un fluido ideal circulando por una tubería horizontal C de radio R a una velocidad de 20 m/s. Esta tubería se divide en dos ramales A y B también horizontales como se muestra en la figura, los radios de estas ramales son $R_A = R_B = R/4$. Entonces la velocidad del fluido en m/s en la rama A vale:



a) 160 b) 40 c) 320 d) 80 e) N.A.

09 La presión en los puntos 1 y 2 del pulverizador que se muestra en la figura son p_0 y $2p_0$ respectivamente. El valor de H para que la velocidad de salida del líquido sea igual a $\sqrt{2gH}$ es:



a) $p_0/5\rho g$ b) $p_0/2\rho g$ c) $2p_0/\rho g$

d) $p_0\rho g$ e) N.A.

10 Una bolita de acero de 1 mm de diámetro cae con una velocidad constante de 0.185 cm/s en un gran recipiente lleno de aceite de ricino. Hallar la viscosidad del aceite de ricino (en g/cm-seg):

a) 20 b) 18.29 c) 20.39 d) 22 e) N.A.

EXAMEN (XII)

01 ¿Cuál de las siguientes expresiones es falsa o verdadera?

I) La ley de Poiseuille está relacionada con la fuerza que ejerce un fluido viscoso sobre los cuerpos que se mueven en su seno.

II) La viscosidad de un líquido crece cuando la velocidad del cuerpo que se mueve dentro de él, también aumenta.

III) La fórmula de Stokes es válida para cualquier objeto que se mueve dentro de un fluido con una velocidad menor que la velocidad crítica.

a) VVV b) VVF c) FVV d) FFV e) N.A.

02 ¿Cuál de las siguientes expresiones es falsa o verdadera?

I) Un termómetro mide la cantidad de calor que poseen los cuerpos.

II) En todo proceso termodinámico si el sistema pierde calor, su temperatura baja.

III) En un proceso isobárico la energía de un sistema depende del volumen.

a) VVV b) VVF c) FVV d) FFV e) N.A.

03 ¿Cuál de las siguientes expresiones es falsa o verdadera?

I) Es posible tener una transformación termodinámica adiabática a temperatura constante.

II) Una cantidad dada de energía calorífica se puede convertir completamente en energía mecánica.

III) La capacidad calorífica por unidad de masa es el flujo de calor.

a) VVV b) VFF c) FVV d) VFV e) N.A.

04 A qué temperatura las escalas Kelvin y Celsius tienen el mismo valor numérico:

a) 0° b) –40° c) –273° d) 273° e) N.A.

05 Se tiene una máquina térmica ideal que funciona entre dos focos a temperaturas T_1 y $T_2 (T_1 > T_2)$ siendo su rendimiento r_1. Si la temperatura de cada foco pudiera aumentarse en la misma cantidad su rendimiento será r_2, y si la temperatura de cada foco pudiera disminuirse en la misma cantidad anterior su rendimiento será r_3. En consecuencia podemos afirmar que :

a) $r_1 > r_2 > r_3$ b) $r_1 = r_2 = r_2$ c) $r_2 > r_1 > r_3$

d) $r_2 < r_1 < r_3$ e) N.A.

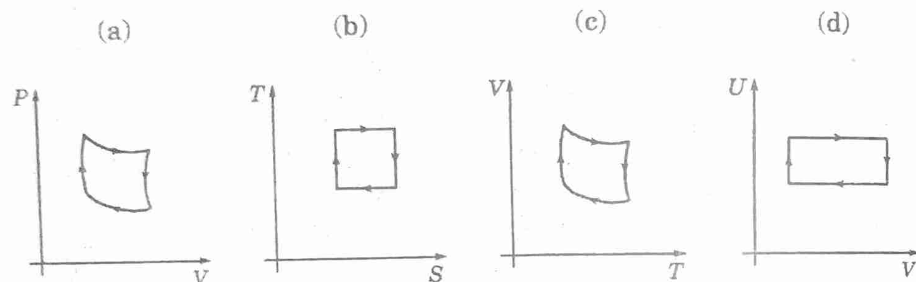
06 Supóngase que se encuentra que el calor específico de una sustancia varía en la forma $C = A + BT^3$ siendo A y B constantes y T la temperatura Celsius. Hállese la diferencia del calor específico medio de la sustancia en un intervalo de temperatura desde $T = 0$ hasta $T = T$ con el calor específico en el punto central $T/2$.

a) $BT^3/6$ b) $BT^2/12$ c) $BT/3$ d) BT e) N.A.

07 Calcule el número de moléculas en el gas contenido en un volumen de $2\ cm^3$ a una presión de 10^{-4} *atm* y a una temperatura $(-50°C)$ es $(\times 10^{15})$:

a) 4.58 b) 320 c) 6.58 d) 6.20 e) N.A.

08 Cuál de los diagramas no corresponden al ciclo de Carnot.



09 Un kilogramo de agua a la temperatura de 280°K se mezclan con dos Kg de agua a la temperatura de 310°K en un recipiente térmicamente aislado. Entonces la variación de la entropía del universo en $J/°K$ es:

a) 563 b) 15 c) 13 d) 14.3 e) N.A.

10 La cantidad de calor que se requiere para incrementar 1 *mol* de helio en 100°K manteniendo el volumen constante es 300 cal. Entonces el calor necesario para incrementar la temperatura de 1 *mol* de helio a 100°K manteniendo la presión constante es en cal ($\gamma = 1.67$):

a) 180 b) 501 c) 510 d) 310 e) N.A.

EXAMEN (XIII)

01 ¿Cuál de las siguientes expresiones son falsas o verdaderas?

I) Flujo uniforme es cuando se mueve en forma de láminas o capas tangenciales entre las capas del fluido.
II) En un flujo estacionario las líneas de corriente coinciden con las del flujo.
III) El tubo de Pitot es un dispositivo que se utiliza para medir la velocidad de un gas en un tubo.

a) VVF b) VVV c) FVV d) FFF e) N.A.

02 La energía interna de un sistema aislado:

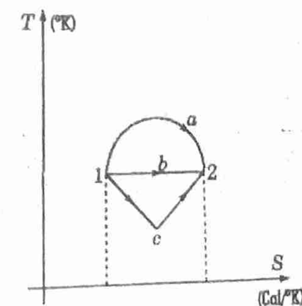
I) Permanece constante.
II) Varía con el calor absorbido.
III) Varía con un aumento de volumen.
IV) Varía debido al trabajo realizado.
V) N.A.

03 ¿Cuál de las siguientes expresiones son falsas o verdaderas?

I) Las máquinas térmicas son dispositivos que se utilizan para convertir la energía calorífica en energía mecánica.
II) La energía mecánica se puede convertir completamente en energía calorífica.
III) El calor que vierte al exterior una máquina frigorífica es igual al calor que absorbió del foco de baja temperatura.

a) VVV b) VVF c) FFF d) FVV e) N.A.

04 En el diagrama temperatura y S entropía se mantienen tres procesos termodinámicos: $1a2$, $1b2$, $1c2$. Si ΔU_{1a2}, ΔU_{1b2} y ΔU_{1c2} representan los cambios respectivos de energía interna para cada uno de los procesos mencionados. Entonces podemos afirmar:



a) $\Delta U_{1a2} > \Delta U_{1b2} > \Delta U_{1c2}$
b) $\Delta U_{1a2} = \Delta U_{1b2} = \Delta U_{1c2}$
c) $\Delta U_{1a2} < \Delta U_{1b2} < \Delta U_{1c2}$
d) $\Delta U_{1a2} > \Delta U_{1b2} < \Delta U_{1c2}$
e) N.A.

05 Una turbina de vapor de mercurio trabaja en serie con otra de vapor de agua que recibe el calor que desprende la primera. Si la turbina de mercurio recibe el calor a 480°C y lo desprende a 240°C y la de vapor de agua lo recibe a ésta temperatura y lo desprende a 40°C en el condensador. Se encuentra que la eficiencia de la combinación es en %.

a) 5.7 b) 70.85 c) 17.54 d) 58.4 e) N.A.

06 Una llanta de auto tiene un volumen de 4×10^4 cc y contiene aire a una presión de 2 atm y una temperatura de 50°F. En qué cantidad habrá aumentado

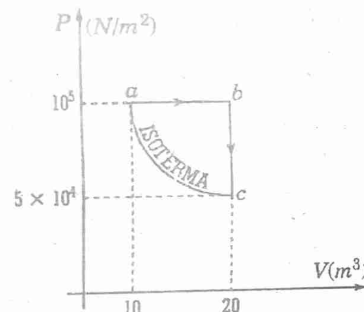
la energía del aire en la llanta, como resultado de este proceso de calentamiento a 100°F al haber recorrido una distancia determinada (joules).

a) 1200 b) 400 c) 800 d) 2000 e) N.A.

07 La variación de la entropía (cal/°C) de 10 g de agua cuando se le comunica calor variando su temperatura desde 27°C hasta 93.5°C es:

a) 0.2 b) 1.24 c) 2 d) 12.4 e) N.A.

08 Un gas ideal monoatómico ($Cp = 5/2R$) realiza un ciclo como se muestra en la figura. La variación de la energía interna (Joule):



a) 10^6 b) 1.5×10^6

c) 5×10^6 d) 2.5

e) N.A.

09 Diga cuál de la siguiente expresión es falsa o verdadera:

I) La conducción se debe a los electrones libres.
II) Para gases, el calor específico se expresa en átomo-gramo.
III) El flujo calorífico entre dos cilindros coaxiales es directamente proporcional al coeficiente de conductividad térmica.

a) VVV b) VVF c) FVV d) FFF e) N.A.

10 Diga cuál de la siguiente expresión es falsa o verdadera:

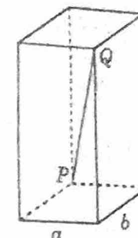
I) En el proceso de convección, la sustancia se desplaza.
II) La convección natural, se debe a una diferencia de densidades.
III) La convección puede ser natural o forzada.

a) VVV b) FFV c) VFV d) FFF e) N.A.

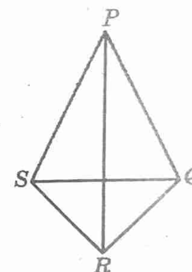
EXÁMENES SOBRE ELASTICIDAD

01 Un bloque rectangular, de aristas que están en la relación: $a:b:c$; 1:2:3, se deforma, conservando la perpendicularidad entre las caras. Las deformaciones unitarias de las aristas tienen valores de 1/20, 1/40 y 1/45. Hallar la deformación unitaria de la diagonal PQ por aproximación.

Rpta.: $\Delta J \cong 0.025$



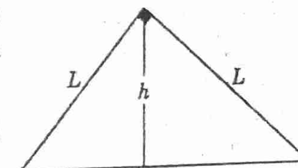
02 Las diagonales de un cuadrado, experimentan una deformación unitaria. $\overline{SQ}$: (Δd_1) y $\overline{PR}$: $(-\Delta d_2)$



Hallar la deformación unitaria del lado $\overline{PQ}$ por aproximación:

Rpta.: $\Delta_{PQ} \cong \frac{1}{2}(\Delta d_1 - \Delta d_2)$

03 Se tiene un triángulo rectángulo isósceles, sus catetos sufren una deformación unitaria Δ_1 y la hipotenusa la deformación unitaria $(-\Delta_2)$.
Hallar la deformación unitaria de la altura del triángulo por aproximación.



Rpta.: $\Delta h \cong 2\Delta_1 + \Delta_2$

04 Un cubo está sometido a una presión de $10\ N/m^2$ y su volumen disminuye en $1/2\times10^5$. Hallar el coeficiente de Poisson.

Rpta.: $\mu = 1/3$

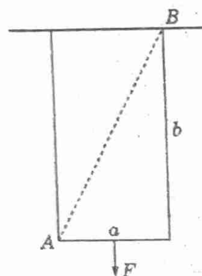
05 Sobre un cuerpo isótropo, actúan los esfuerzos $\sigma_x = 100\ atm$, $\sigma_Y = -20\ atm$, si la dilatación cúbica es nula. Hallar σ_z.

Rpta.: $\sigma_z = -80\ atm$

06 Un cuerpo prismático de 50 cm de longitud y 2 mm de ancho, experimenta un alargamiento de 5 mm. Se conoce el módulo de Young $1.6\times10^{10}\ N/m^2$ y el módulo de rigidez $0.57\times10^5\ N/cm^2$. Hallar la deformación del ancho.

Rpta.: $\Delta a = 0.008$

07

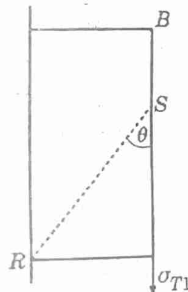


Un prisma rectangular a, b y c está sometido a una fuerza de tracción F. Hallar los esfuerzos normal σ_N y tangencial σ_T en el plano diagonal señalado con puntos suspensivos AB.

$\sigma_N = Fa/c(a^2+b^2)$

$\sigma_T = Fb/c(a^2+b^2)$

08 En el extremo de una viga que se halla empotrada en una pared, actúa un esfuerzo tangencial σ_{T1}. Hallar el esfuerzo resultante en un plano cualquiera definida por el ángulo θ y su inclinación respecto a $\overline{RS}$.



$p=\sqrt{\sigma_N+\sigma_T}=\sigma_{T1}$; $\alpha = 2\theta$

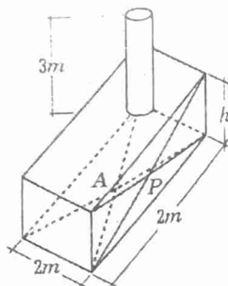
EXAMEN (XIV)

01 Si de un cuerpo uniforme tomamos 20 g y el volumen que desaloja, cuando está sumergido totalmente es de $2cm^3$. Si tomamos 0.10 g el volumen que le corresponde en cm^3 es:

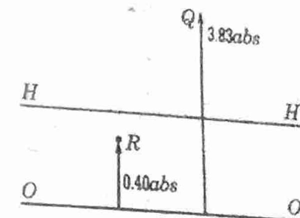
a) 10^{-2} b) 10^{-3} c) 4×10^{-1} d) 10^{-1} e) N.A.

02 En el recipiente de la figura adjunta, está lleno de agua. ¿Cuál es el valor de h, para que la fuerza en el fondo (A) sea igual en el punto P de la cara lateral.

a) 3.6 m b) 2.6 m c) 2.2 m
d) 8.1 m e) N.A.



03 La longitud HH' nos indica la presión atmosférica normal $(1.033\ kg/cm^2)$ y la horizontal $00'$ nos indica, el uso absoluto. ¿Cuánto vale la presión manométrica?.



en Q : ....

en R : ....

04 Porqué el agua que se encuentra dentro de un tubo capilar no se eleva más que hasta cierta altura: ....

....

....

....

05 Se eleva el nivel del mercurio contenido en un tubo capilar? ¿Porqué?

....

....

....

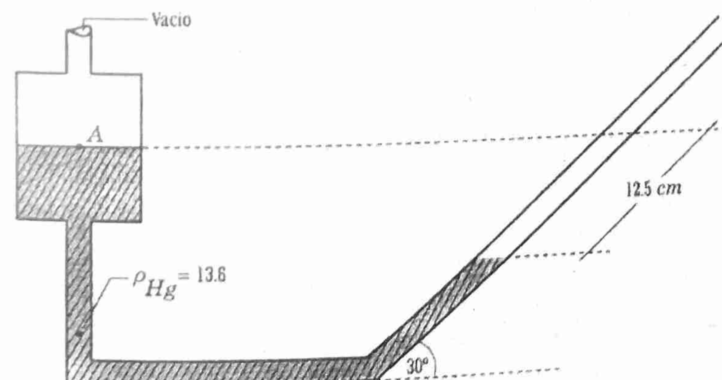
06 No es fácil separar dos láminas de vidrio y unidas por sus caras. Puedes decir que tipo de fuerza es la que se opone a la separación?

....

....

07 Hallar la presión absoluta (k/cm^2) en el punto A para el manómetro inclinado. Si $P_0 = 1\,Kg/cm^2$

a) 0.915
b) 0.315
c) 1.168
d) 1.492
e) N.A.



08 Un cuerpo de 50 kgs sumergido en agua tiene un peso aparente de 10 $kg\ f$. El volumen (en m^3) que este cuerpo ocupa es:

a) 0.04 b) 0.05 c) 0.10 d) 0.4 e) N.A.

09 Cuanto desciende la columna de Hg de tubo Torricelli cuando se eleva este a 400 m sobre el nivel del mar.

a) 4.8 cm b) 3.8 cm c) 2.8 cm d) 1.8 cm e) N.A.

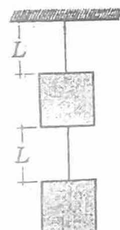
10 Un cuerpo de un Kg de masa y 10 cm^3 de volumen. ¿Qué porcentaje de su peso real pierde en la atmósfera de la tierra si se toma como densidad de esta 1.29 kg/m^3?

a) 0 b) 0.1 c) 0.01 d) 1 e) N.A.

EXAMEN (XV)

01 En la figura se tiene dos pesos idénticos conectados a dos hilos metálicos idénticos. Si $d(mm)$ es la deformación del hilo superior, la deformación del hilo inferior será:

a) 0 b) $2d$ c) d
d) $d/2$ e) N.A.



02 Dos cuerpos de igual masa están suspendidos de resortes independientes cuyas constantes son K_1, $K_2 (K_2 > K_1)$. Ambos cuerpos oscilan con amplitudes tales que sus velocidades máximos son iguales. ¿Qué relación es correcta?

a) $A_1 > A_2$ b) $A_1 < A_2$ c) $A_1 = A_2$ d) Faltan datos e) N.A.

03 Un cubo de sólido (E, μ) es sometido a esfuerzos normales de tracción a dos caras opuestas. La deformación unitaria volumétrica está dado por: (si $\mu = 0.30$)

a) σ/E b) $2\sigma/5E$ c) $-2\sigma/5E$ d) $-\sigma/E$ e) N.A.

04 ¿Cuál es la expresión falsa o verdadera para un MAS?:

I) En los puntos de máxima oscilación la energía cinética es cero.

II) La energía potencial tiene su valor máximo en los puntos de máxima oscilación.

III) En el centro de oscilación la energía cinética es igual a la energía total.

a) FVV b) VVV c) FFF d) VVF e) N.A.

05 La ecuación del movimiento de un punto tiene la forma: $X = \text{sen}(\pi/6)t$. Hallar los instantes (seg) en que las velocidades son máximas:

a) 1,2,3 ... b) 0,2,4... c) 0,4,8... d) 0,6,12 e) N.A.

06 Un bloque de madera tiene un volumen de 150 cm^3. Para mantenerlo sumergido completamente en agua, hace falta ejercer sobre él una fuerza hacia abajo de 60 gf. Su peso específico en g/cm^3 es:

a) 0.8 b) 0.5 c) 0.3 d) 0.4 e) N.A.

07 Es mayor la fuerza que ejercen las moléculas del agua sobre la suciedad que la que ejercen entre sí:

a) No b) Si c) Faltan datos d) a y c e) N.A.

08 ¿Cuales de las siguientes expresiones son falsas o verdaderas?

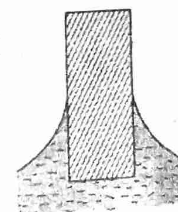
I) La energía de las moléculas que se encuentran en la superficie de un líquido son diferentes a la energía de las moléculas del interior.

II) La superficie de un líquido almacena energía potencial y es igual al trabajo realizado.

III) Para aumentar el tamaño de una burbuja es necesario aumentar la presión en su interior.

a) VVV b) VVF c) FVV d) FFV e) N.A.

09 Una barra se moja como se observa en la figura, ¿cuáles de las siguientes expresiones son falsas o verdaderas?



I) La fuerza de tensión superficial está dirigida hacia arriba.

II) La fuerza de tensión superficial puede hundir a la barra, incluso si la densidad de la barra es menor que la densidad del líquido.

III) La curvatura de la superficie del líquido ligado al mojado sustenta a la barra.

a) VVV b) VVF c) FVV d) FFV e) N.A.

10 Para extraer de una solución jabonosa $\alpha = 50\ dinas/cm$. Un alambre de $10\ cm$ de longitud, de modo que se forme una película de $5\ cm$ de altura se debe hacer un trabajo (en ergios) de: (no considere el peso del alambre).

a) 250 b) 500 c) 2500 d) 5000 e) N.A.

EXAMEN (XVI)

01 En la recta obtenida al graficar el cuadrado del período de oscilación T^2 en función de las masas suspendidas el valor de su pendiente es:

a) $\pi^2/4k$ b) $4\pi/k$ c) π^2/k d) $4\pi/k^2$ e) N.A.

02 El período T de la oscilación de la masa es $T = 2\pi\sqrt{mlk}$. Una masa de $(0.8 \pm 0.002)\ kg$ se utilizó para medir el valor de k y se encontró el valor de T como (1.550 ± 0.001) seg. El error porcentual cometido al hallar el valor de k es:

a) 1.3 b) 0.9 c) 60 d) 6 e) N.A.

03 Un depósito parcialmente con agua se coloca sobre una balanza de resorte, que señala un peso total W_T. Una piedra de peso W se suspende de una cuerda y se introduce completamente en el agua sin que toque las paredes ni el fondo del depósito. La indicación ahora en la escala de la balanza será:

a) $W_T + W$ b) $W_T + E$ c) $W_T - E$ d) $W_T - W$ e) N.A.

04 Según el principio de Arquímedes se puede deducir que un cuerpo que se encuentra en el aire sufre un empuje hacia arriba que:

a) Es menor que el peso del cuerpo.
b) Depende de la densidad del cuerpo.
c) Es mayor mientras más alto esté el cuerpo.
d) Depende del volumen del cuerpo.
e) Todas las anteriores son correctas.

05 El agua jabonosa produce películas delgadas (no obstante que su coeficiente de tensión superficial es menor que la del agua) y el agua no.

Esto se debe a:

a) Que el radio de acción molecular en el agua jabonosa es mayor que el agua pura.
b) El agua pura es menos viscosa que el agua jabonosa.
c) Que cuanto menor sea el coeficiente de tensión tanto más fácil es obtener películas delgadas.
d) Que el coeficiente de tensión superficial del agua jabonosa depende menos que la temperatura que la del agua pura.
e) N.A.

06 Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

a) La tensión superficial influye en los fenómenos capilares.
b) La tensión superficial depende de la temperatura.
c) La tensión superficial es cero, cuando el líquido adquiere temperatura crítica.
d) La tensión superficial depende de la densidad.
e) Sólo una anterior es falsa.

07 Un viscosímetro se calibró mediante el benceno, el cual a 20°C tiene un coeficiente de viscosidad de 0.652 *cp* y una densidad de $0.8790\ g/cm^3$. Se encontró así que el tiempo de flujo del benceno era de 183 segundos. Si el tiempo de flujo para el etanol absoluto fue de 378 segundos, también a 20°C, donde su densidad es $0.7893\ g/cm^3$. La viscosidad absoluta del etanol en *cp* es:

a) 1.3053 b) 1.2093 c) 1.1348 d) 1.4282 e) N.A.

08 En la experiencia de viscosidad el líquido se escurre por el capilar debido a:

a) Su peso.
b) Al aire que se insufla por la rama ancha.
c) La gravedad.
d) La diferencia de presiones entre las superficies libres de viscosímetro.
e) N.A.

09 Consideremos un fluido viscoso que circula por una tubería de sección transversal A y que en un determinado tiempo pasa por esta sección un volumen V. Se cumple que:

a) Su velocidad es la misma en todos los puntos de una sección transversal.
b) La fuerza de viscosidad se opone al movimiento y es radial.
c) El flujo de volumen es igual a AV.
d) Su velocidad varia si cambiamos la posición del tubo.
e) Ninguna es cierta.

10 Una bomba eleva agua de un lago a razón de 0.6 m^3/min, a través de una tubería de 5 cm de diámetro descargándola en un punto al aire libre a 20 m sobre la superficie libre del mismo. Hallar la potencia desarrollada por la bomba (CV). 1 CV = 75 kgm/s.

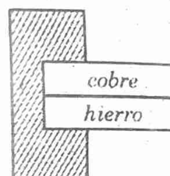
a) 0.033 b) 2.67 c) 8.09 d) 0.25 e) N.A.

EXAMEN (XVII)

01 ¿Cuál de las siguientes expresiones es falsa o verdadera:

a) La viscosidad de los gases aumenta cuando la temperatura se eleva.

b) Cuando se calienta la lámina bimetálica del esquema se encorvará hacia arriba ($\alpha_{Cu} > \alpha_{Fe}$)



c) Cuando un sólido se dilata su masa aumenta.

d) Un termómetro mide la cantidad de calor que poseen los cuerpos.

e) Cuando una sustancia absorbe calor siempre aumenta su temperatura.

02 Que expresiones son falsas o verdaderas:

a) La única manera de propagarse el calor es por conducción.

b) El flujo calorífico $\dot{Q}$ es un vector cuyo sentido es de la región menor a mayor temperatura.

c) El $\dot{Q}$, en un régimen estacionario, es constante en todos las secciones transversales.

d) La propagación del calor para convección se aplica a los fluidos.

03 Cuáles de las siguientes expresiones son falsas o verdaderas:

a) En toda compresión isobárica el sistema aumenta de temperatura.

b) Es posible realizar un proceso adiabático a temperatura constante.

c) Para los gases ideales la energía interna depende exclusivamente de la temperatura T.

d) En todo proceso termodinámico, cuando se pasa de un estado inicial a otro final el ΔU depende solamente de U_i y U_f.

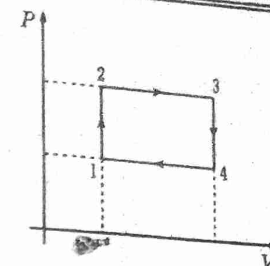
04 Cuáles de las siguientes expresiones son falsas o verdaderas:

a) En un diagrama P–V el área encerrada por un ciclo termodinámico, representa el calor absorbido.

b) Un ciclo de Carnot está constituido por 2 isotermas y 2 adiabáticos.

c) En todo proceso adiabático, la variación del calor registrado en el sistema es siempre diferente de acero.

d) En el gráfico, se muestra el ciclo 1-2-3-4.



El gas ideal recibe calor cuando va de 2 → 3.

05 El cambio de volumen en (cc) de un cubo de acero ($\alpha = 10^{-5}{}^\circ C^{-1}$) de 8 cm de lado cuando se calienta de 10°C a 88.2°C es:

a) 0.002 b) 0.4 c) 1.2 d) 5 e) N.A.

06 Una capa esférica de Aluminio muy delgada tiene un radio de 15 cm. Si su temperatura se eleva en 20°K. Hallar el cambio de volumen (cc).

$\alpha_{Al} = 2.2 \times 10^{-5}{}^\circ K^{-1}$

a) 8 b) 19 c) 2 d) 12 e) N.A.

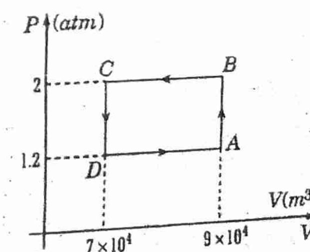
07 Un calorímetro contiene 100 g de agua a 20°C. se introduce en él un cilindro de cobre de 1 kg y otro de plomo de 1 kg, ambos a 100°C. La temperatura final en °C si no hay pérdida de calor al medio ambiente es:

a) 30 b) 40 c) 35 d) 38 e) N.A.

08 Suponga que añade 10g de vapor de agua a 98°C a 200 g de agua a 10°C. Si la temperatura de mezcla es 40°C. Qué valor debe tener el calor latente de vaporización del agua? (cal/g).

a) 610 b) 540 c) 600 d) 270 e) N.A.

09 Se toma un gas en torno del ciclo $ABCD$ de la figura. Qué cantidad de calor se debe agregar al gas en este proceso (Joules).



a) 610 b) 540 c) 600
d) 270 e) N.A.

10 ¿Cuáles de las siguientes expresiones son falsas o verdaderas:

I) Proceso reversible es aquel en el cual el sistema pasa por una sucesión de estados en equilibrio, realizándose con gran lentitud.
II) Los motores térmicos trabajan bajo un ciclo cerrado donde la variación de la energía interna es nula durante el proceso.
III) El ciclo de Carnot está limitado por una expansión adiabática y una compresión isotérmica.

a) VVV b) VVF c) FFV d) VFV e) N.A.

EXAMEN (XVIII)

01 Para deformar un sólido es necesario cambiar su:

a) ....

b) ....

02 La elasticidad depende de tres factores:

a) ....

b) ....

c) ....

03 Cuáles expresiones son falsas o verdaderas:

I) En la deformación por cizalladura la fuerza es tangencial a la superficie
II) En la deformación por cizalladura el volumen no cambia.
III) En la deformación longitudinal el volumen varía.

a) VVV b) VFF c) FFF d) FVV e) N.A.

04 Un cubo se encaja en un hueco de paredes rígidas y sobre la cara libre se aplica un esfuerzo σ_y. Hallar la relación (σ_z/σ_y):

a) 2μ b) $1-\mu$ c) $1-\mu/\mu$ d) $\mu/1-\mu$ e) N.A.

05 En un MAS, la energía mecánica en función de la amplitud es:

....

06 Se tiene una masa de 2 kg y está sometido a una fuerza de $F=-12x$ y oscila con MAS. Hallar el período del movimiento.

a) 2 b) 2.5 c) 1.5 d) 0.5 e) N.A.

07 Un péndulo simple de longitud L, es llevado a la región de la Sierra, que sucede con su período.

a) Aumenta b) Disminuye c) sigue igual d) N.A.

08 Se tiene dos MAS: $x_1=6\,sen(2t+3\pi/2)$, $x_2=2\,sen(2t+5\pi/2)$ estos movimientos se encuentran en:

a) Fase b) Cuadratura c) oposición d) N.A.

09 Para una masa de 10 kg que oscila con MAS, se tiene su ecuación diferencial:

$$10\frac{d^2x}{dt^2}+20x=0$$

su frecuencia $f(seg^{-1})$ es:

a) 1.35 b) 0.22 c) 2.35 d) N.A.

10 Cuál de las siguientes expresiones es falsa o verdadera:

I) La ley de Hooke sólo es válida en la región plástica.
II) El esfuerzo normal, relaciona la fuerza normal a la superficie.
III) El punto de ruptura es el límite de la región elástica.

a) VVV b) VVF c) FFF d) FFV e) N.A.

LABORATORIOS

EXAMEN (XIX)

01 En un resorte vertical fijo en uno de sus extremos se cuelgan masas de 200, 300, 400, 500 g que producen estiramientos en el resorte de 4.9, 7.35, 9.8 y 12.25 cm. La constante del resorte es ($x10^2$ $dinas/cm$)

a) 40.8 b) 400 c) 200 d) 20.4 e) N.A.

02 De la pregunta anterior si hacemos oscilar una masa de 1 kg, el período de oscilación es: (seg)

a) 10 b) $10\pi^2$ c) $10\,\pi$ d) aprox $100\,\pi^2$ e) N.A.

03 El período T de la oscilación de la masa es $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Una masa de (0.8 ± 0.002) Kg se utilizó para medir el valor de T como $(1.550 \pm 0.001)seg$. El error porcentual cometido al hallar el valor de K es (%).

a) 60 b) 1.3 c) 0.9 d) 6 e) N.A.

04 Dos cm^3 de Cu y 2 cm^3 de Pb son pesados en el aire y luego en el agua. El peso aparente del Cu respecto al del Pb es:

a) 3/4 b) 1/2 c) 1/4 d) 1 e) N.A.

05 Un cuerpo de densidad ρ reposa en el fondo de un recipiente que contiene líquido de densidad ρ'. Se cumple que:

a) $\rho < \rho'$
b) Peso del cuerpo es igual al empuje
c) No existe empuje
d) El peso del cuerpo es menor que el empuje
e) N.A. es cierta

06 Un cuerpo de 1 Kg de masa y de $10cm^3$ de volumen, que porcentaje de peso real, pierde aproximadamente en la atmósfera de la tierra si se toma como densidad del aire 1.29 Kg/m^3

a) 0 b) 0.1% c) 1% d) 10% e) N.A.

07 Consideremos un fluido viscoso que circula por una tubería de sección transversal A y que en un determinado tiempo pasa por esta sección un volumen V del fluido. Se cumple que:

a) Su velocidad es la misma a todos los puntos de la sección transversal.
b) La fuerza de viscosidad se opone al movimiento y es radial.
c) El flujo de volumen es AV.
d) Su viscosidad varía si cambiamos la posición del tubo.
e) Ninguna es cierto.

08 Se entiende por viscosidad:

a) La fuerza para hacer deslizar una capa líquida sobre otra.
b) La fuerza de rozamiento interno de un fluido.
c) La fuerza para hacer descender un fluido por un capilar.
d) N.A.

09 En la experiencia de la (viscosímetro de **OSTWALD**) y viscosidad de un líquido, el líquido se escurre debido a:

a) $P = mg$
b) el aire que se insufla por la rama ancha
c) gravedad
d) presión
e) N.A.

10 El agua jabonosa produce películas delgadas (no obstante que su coeficiente de tensión superficial es menor que la del agua) y el agua no. Esto se debe a:

a) Que el radio de acción molecular en el agua jabonosa es mayor que el agua pura.
b) El agua pura es menos viscosa que el agua jabonosa.
c) Que cuanto menor sea el coeficiente de tensión superficial, tanto más fácil es obtener películas delgadas.
d) Que el coeficiente de tensión superficial del agua jabonosa depende menos de la temperatura que la del agua pura.

11 Cuál de las siguientes expresiones es falsa:

a) La tensión superficial influye en los fenómenos capilares.
b) La tensión superficial depende de la temperatura.
c) La tensión superficial será cero cuando el líquido adquiere su temperatura crítica.
d) La tensión superficial depende de la densidad.
e) Sólo una anterior es falsa.

12 La cantidad de calor que se debe comunicar a 0.10 kg de hielo a $(-10°C)$ para convertirlo en agua a $10°C$ es: (calorías)

a) 8000 b) 1480 c) 9480 d) 10^4 e) N.A.

EXAMEN (XX)

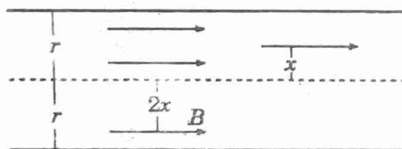
01 En el viscosímetro de Ostwald, se usó para hallar viscosidades, la densidad de la acetona y del agua a 20°C están en la relación de (7/9) y los tiempos respectivos (1/3), si la viscosidad del agua es n_1. La viscosidad de la acetona será:

a) $0.9\,n_1$ b) $0.5\,n_1$ c) $0.2\,n_1$ d) $0.1\,n_1$ e) N.A.

02 Si la relación de los tiempos empleados por el agua y la mezcla fue de (3/2). La viscosidad de la mezcla es:

a) $0.8\,n_1$ b) $0.1\,n_1$ c) $0.5\,n_1$ d) $0.6\,n_1$ e) N.A.

03 En el cilindro como indica la figura circula agua en la dirección que se da, A y B son dos puntos que se desplazan, situados a la distancia x y $2x$ del eje del cilindro. ¿Cuál de las siguientes expresiones es verdadera?

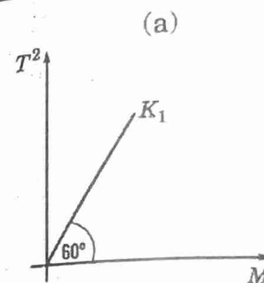


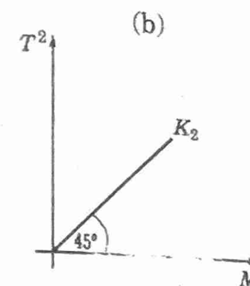
a) $V_A > V_B$ b) $V_B > V_A$ c) $V_B = V_A$

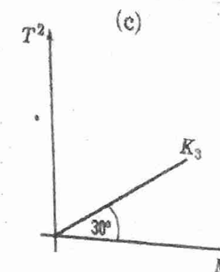
04 Se hace oscilar un cuerpo de masa M por medio de un resorte de constante K_1, se cuelga una masa $2M$ del resorte de constante K_2. ¿Cuál es el valor de (K_1/K_2) para que los períodos sean iguales.

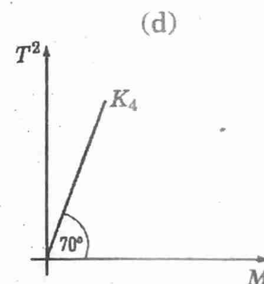
a) 2 b) 1/2 c) 1 d) 3 e) N.A.

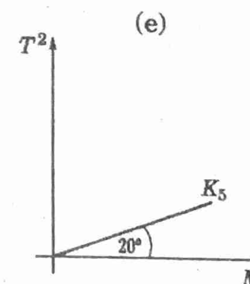
05 Al graficar $T^2 = f(M)$ para varios resortes, cuál de los gráficos corresponde al resorte de menor constante.











06 Si 1 kg de X y 1 kg de Y están sumergidos en agua y las densidades de estos cuerpos están relacionados $\rho_y > \rho_x$. Si P_{ax} y P_{ay}: son los pesos aparentes del cuerpo X y peso aparente del cuerpo Y respectivamente.

a) $P_{ax} = P_{ay}$ b) $P_{ax} > P_{ay}$ c) $P_{ax} < P_{ay}$ d) N.A.

07 Si Pc es el peso del cuerpo en el aire y Pca: es el peso del cuerpo en el agua y están relacionados por (Pc = 1.25 Pca) ¿Cuál es la densidad relativa del cuerpo?

a) 1 b) 0.2 c) 2 d) 5 e) N.A.

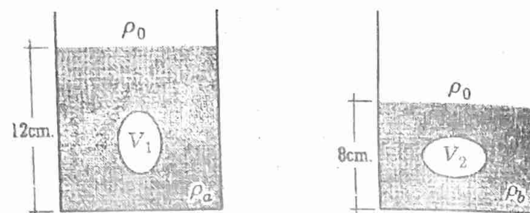
08 En el siguiente gráfico se tiene dos recipientes de igual base y de altura del líquido A: 12 cm y el líquido B: 8 cm, sus densidades respectivas están relacionadas $\rho_a = 0.8\rho_b$. Si E_a es el empuje en el recipiente A y E_b es el empuje en el recipiente B, sobre el cuerpo $V_1 = 2cm^3$ y $V_2 = 1cm^3$ respectivamente. ¿Cuál expresión es correcta?

a) $E_a = E_b$

b) $E_a > E_b$

c) $E_a < E_b$

d) N.A.



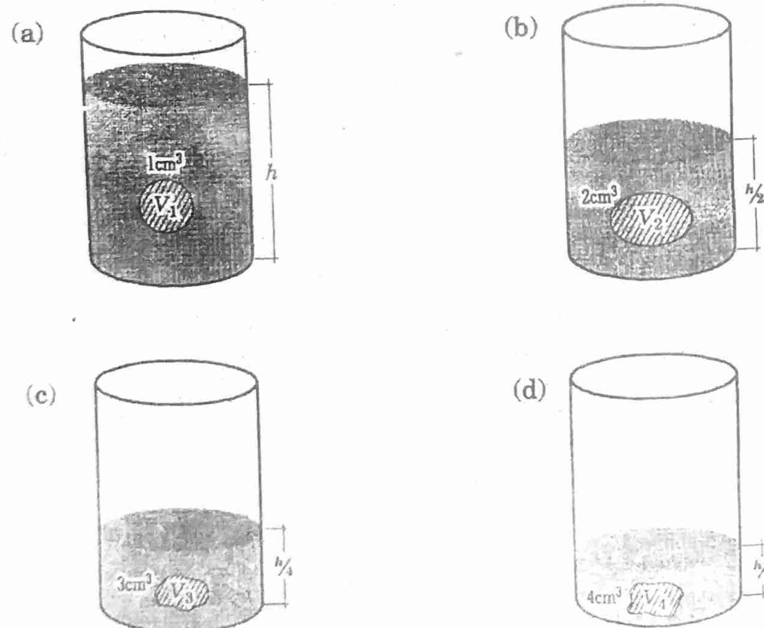
09 

En la figura adjunta, se tiene un cuerpo que flota como se indica en la figura. El volumen del cuerpo es $10\,cm^3$ y la densidad del agua es $1\,g/cm^3$. ¿Cuánto vale el empuje? (gr).

a) 10 b) 0.1 c) 0

d) 1 e) N.A.

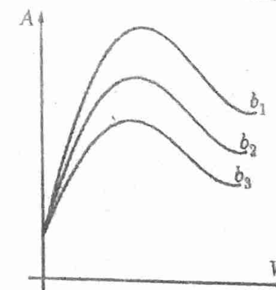
10 En los siguientes gráficos representan varios recipientes cilíndricos de igual base pero diferentes alturas de agua; en cada uno de ellos se introduce cuerpos de la misma densidad pero diferentes volúmenes V_1, V_2, V_3 y V_4 cm^3. En cuál de ellos el empuje es mayor?



EXAMEN (XXI)

01 La expresión: "Las oscilaciones forzadas no están amortiguadas" es una expresión falsa o verdadera, porque: ....

02 Para el gráfico adjunto de amplitud con la frecuencia en un movimiento de oscilaciones forzadas, cuál de ellos corresponde a menor constante de amortiguamiento: b



a) $b_1 < b_2 < b_3$ b) $b_3 < b_2 < b_1$

c) $b_3 > b_1 > b_2$ d) $b_3 < b_1 < b_2$

e) N.A.

03 En el calorímetro de mezclas la relación de las masas del Cu, Al y H_2O es de 1:1:10 y la masa total es de $120\,g$. La temperatura del Cu es 100°C la del agua y del aluminio es $20°C$. Si $C_{eCu} = 0.093$, $C_{eAl} = 0.22\,cal/g-°C$. La temperatura de equilibrio estará comprendido entre los valores.

a) 100 y $80°C$ b) 50 y $40°C$ c) 80 y $60°C$ d) 40°C y 20°C

04 Un cuerpo de masa m_1 se le suministra calor Q_1, si se duplica la masa y se le suministra la mitad del calor anterior. ¿Cuál es la relación de los incrementos de temperatura suministrados y para un intervalo de tiempo dado para ambos.

a) 1/2 b) 1/4 c) 2 d) 4 e) N.A.

05 Si la masa del calorímetro del agua y del sólido son iguales y la temperatura del H_2O y el calorímetro es de t_i' y del sólido es t_i. Cuál será la temperatura de equilibrio para que el calor específico del sólido sea igual a la suma de los calores específicos del agua y del calorímetro.

a) $t_{eq} = t_i + t_i'$ b) $t_{eq} = \frac{t_i + t_i'}{3}$ c) $t_{eq} = \frac{t_i - t_i'}{2}$ d) $t_{eq} = \frac{t_i + t_i'}{2}$ e) N.A.

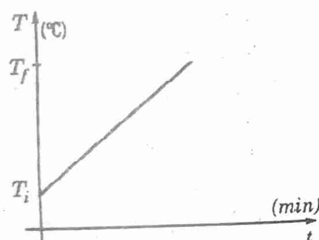
06 Se usó 100 g de un líquido y durante 10 min se redujo a 80 g si el calor suministrado en medio minuto es de 500 calorías. ¿Cuál es el calor latente de vaporización del líquido? (en c/g).

a) 200 b) 250 c) 500 d) 600 e) N.A.

07 La cantidad de calor proporcionada a una masa en medio minuto fue de 20 cal, la masa que se evaporó en diez minutos fue de 10 g, si se le suministra doble cantidad de calor a otro cuerpo en diez minutos y se evaporó 5 g, el calor latente de este último cuerpo será:

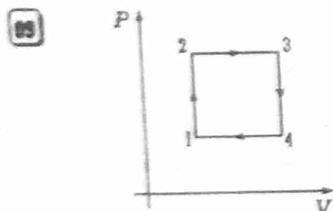
a) mayor que el primero
b) menor que el primero
c) igual que el primero
d) faltan datos
e) N.A.

08 Para un sistema cuyo calor específico se conoce, su masa se puede determinar de la siguiente gráfica, conociendo:



a) La cantidad de calor que absorbe.
b) La variación de temperatura que experimenta cuando se le suministra calor.
c) La cantidad de calor absorbida en cada unidad de tiempo.
d) La temperatura inicial del sistema.
e) La temperatura final del sistema.

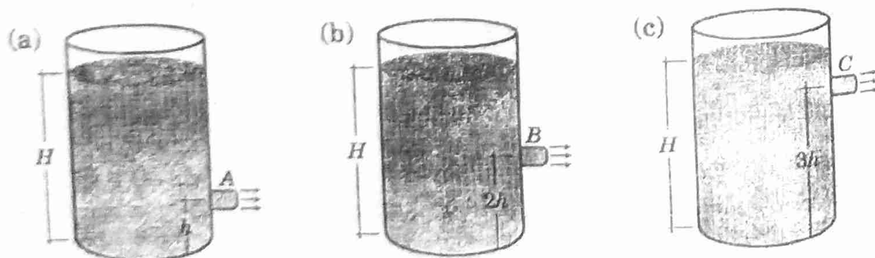
09



En la figura se muestra el ciclo 1-2-3-4. En que proceso o procesos el sistema que es un gas ideal, recibe calor:

a) 1-2 y 2-3 b) 2-3 y 3-4
c) 3-4 y 4-1 d) 4-1 y 1-2

10 Se tiene 3 recipientes con agua de altura H. Se realiza 3 orificios a las alturas h, $2h$ y $3h$, respectivamente. En cuál de ellos la velocidad es mayor al salir por los orificios A, B y C.



11 En el viscosímetro de Ostwald se mezcla alcohol (OH) con agua y la relación de los tiempos del agua y de la mezcla es de 1/3. La mezcla posee dos volúmenes de agua con uno de alcohol ($V_a = 2V_{OH}$). La densidad del alcohol es 0.8 veces la densidad del agua. Si la viscosidad del agua es n_a. ¿Cuál será la viscosidad de la mezcla?

a) $1.6n_a$ b) $4.8n_a$ c) $2.8n_a$ d) $3.8n_a$ e) N.A.

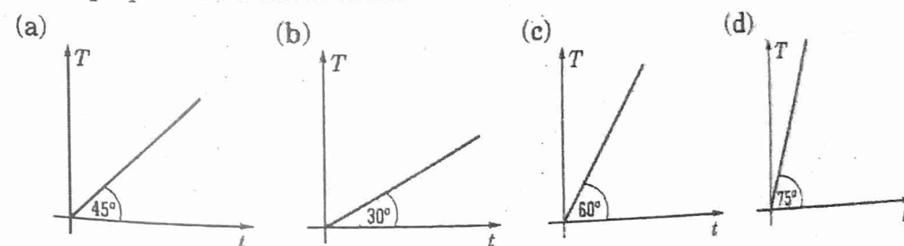
12 Se tiene dos tuberías cilíndricas el primero es de radio 1 m y longitud 2 m, el segundo es de radio 2 m y longitud 16 m, se hace circular acetona en ambos tubos, con la misma variación de presión. ¿Cuánto vale la relación de los caudales o gastos del primero al segundo (Q_1/Q_2).

a) 0.25 b) 0.5 c) 1 d) 1.5 e) N.A.

13 Sea m_1 y m_2 dos masas iguales de líquido de diferente calor específico ($C_{em1} > C_{em2}$). Si se grafica $T = T(t)$ (temperatura en función del tiempo) para cada masa, la pendiente de m_1 es:

a) Igual a m_2 b) mayor que m_2 c) menor que m^2
d) Faltan datos e) N.A.

14 Suponiendo condiciones ideales de trabajo ($\dot{Q}$, Ce: constantes para un intervalo de temperatura) se obtuvieron gráficos de temperatura $T = f(t)$ en función del tiempo para diferentes masas. ¿Cuál de ellos le corresponde menor masa?



15 Dos termómetros son calibrados en la escala Celsius uno y el otro len Fahrenheit se usan para medir la misma temperatura, la lectura de grados que se hace en el termómetro Celsius es:

a) Proporcional a la lectura en el termómetro Fahrenheit.
b) Mayor que la del termómetro Fahrenheit.
c) Menor que la del termómetro Fahrenheit.
d) Puede ser mayor o menor que la del termómetro Fahrenheit

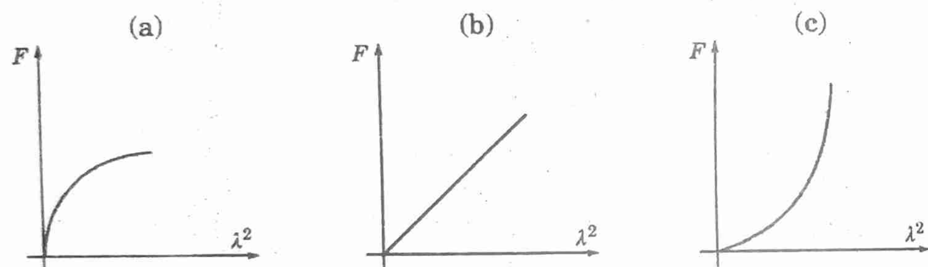
EXAMEN (XXII)

01 Cuando dos trenes de onda son directamente opuestos, se superponen formando zonas alternadas una de vibración nula llamadas: .... y la otra de máxima vibración se llama: ....

02 Las ondas en la cuerda vibrante son:

a) Longitudinales b) Transversales c) Faltan datos
d) Algunas longitudinales y parte transversales e) N.A.

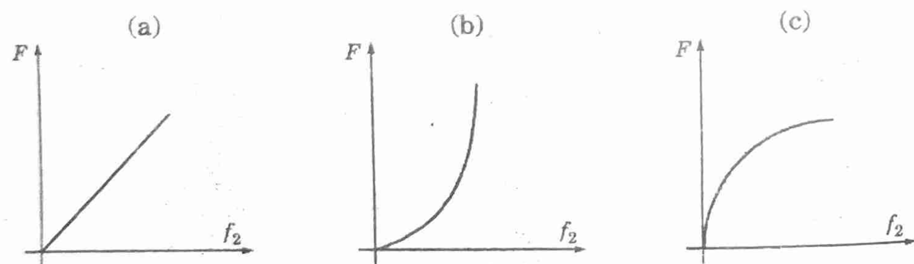
03 En la experiencia de Melde (cuerda vibrante), cuál de los gráficos es correcto.



donde F : fuerza de extensión de la cuerda

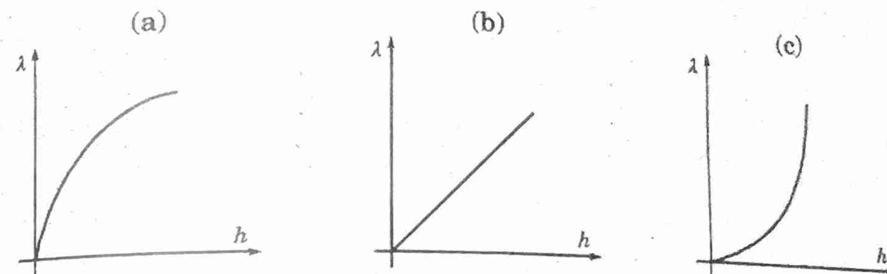
γ : longitud de onda

04 En la experiencia de Melde, cuál de los gráficos es correcto:



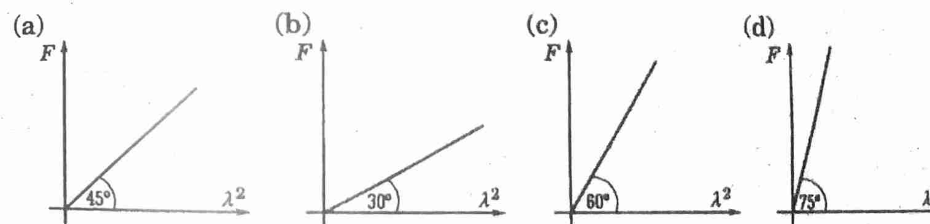
donde f : frecuencia

05 Si γ es la longitud de onda y h es la columna de aire donde se produce resonancia ¿Cuál de los gráficos es correcto?:



06 En la experiencia de Melde, se concluye que el número de crestas es .... proporcional a la velocidad de propagación, además .... proporcional a la tensión.

07 Se usó la misma cuerda en la experiencia de Melde pero con diferentes vibradores. Cuál de los gráficos nos indica el de menor frecuencia.



08 A dos cuerdas $\mu_1 = 2\mu_2$ (μ : densidad lineal de masa) se le aplica igual tensiones $T_1 = T_2$ y se usa el mismo vibrador. ¿Cuál es la relación de sus longitudes?

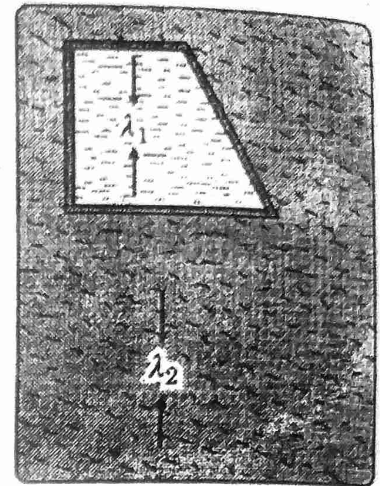
a) $\lambda_1 = \lambda_2/2$ b) $\lambda_1 = \lambda_2/\sqrt{2}$ c) $\lambda_2 = \lambda_1/\sqrt{2}$ d) $\lambda_2 = \lambda_1/2$

09 La intensidad del sonido alcanza .... cuando la .... del aire se pone en .... con el diapasón

10 En un tubo de agua se obtuvo $\lambda_1 = 2\lambda_2$ usándose dos diapasones f_1, f_2 cuál es la relación de sus frecuencias y de sus velocidades, cuando las columnas de aire están en resonancia con el diapasón:

a) $f_2 = f_1/2$, $\upsilon_1 = 2\upsilon_2$ b) $f_2 = 2f_1$, $\upsilon_1 = \upsilon_2$
c) $f_2 = 2f_1$, $\upsilon_1 = \upsilon_2/2$ d) N.A.

11 En un recipiente con agua se coloca un vidrio de un cierto espesor h, la figura muestra una vista superior del diagrama. Si λ_1 es la longitud de onda en la región de menor profundidad y λ_2 es la longitud de onda en la región de mayor profundidad. Si la frecuencia en ambos medios son iguales ¿qué expresión es correcta?

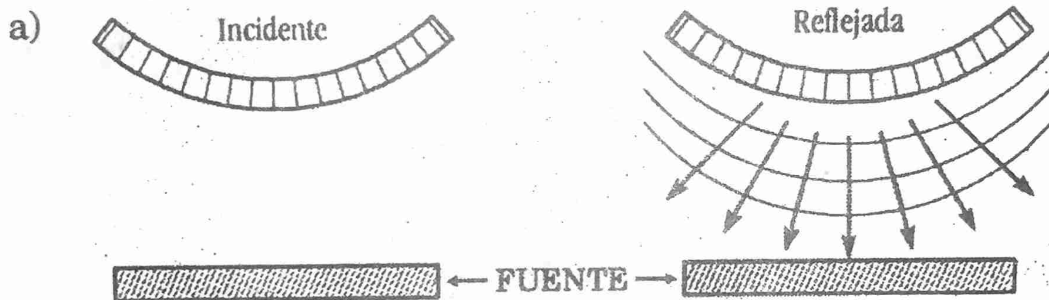


a) $\lambda_1 < \lambda_2$ b) $\lambda_1 = \lambda_2$

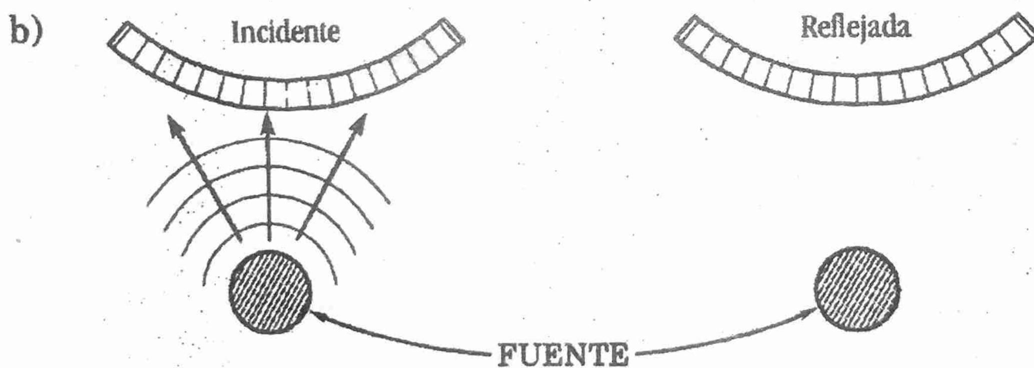
c) $\lambda_1 > \lambda_2$ d) Faltan datos

12 Dibujar usando rayos y frentes de ondas, como inciden o se reflejan las ondas según los casos:

a)



b)



ONDAS EN MEDIOS ELÁSTICOS

EXAMEN (XXIII)

01 Una onda es una ...., que se propaga a través .... con una .... que depende de las propiedades del medio.

02 Cuál es la diferencia básica entre un movimiento periódico y oscilatorio.

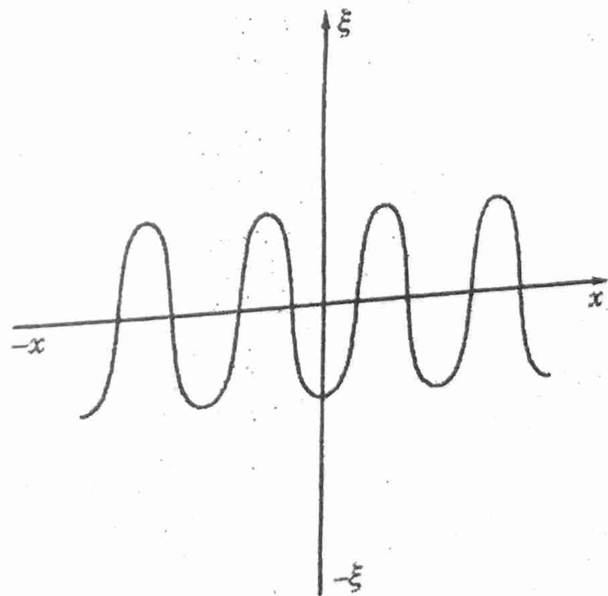
Movimiento Periódico ....

Movimiento Oscilatorio ....

03 Cuando las ondas que avanzan continuamente a lo largo de la superficie del agua, llegan donde hay objetos flotantes entonces lo pone en .... esto es debido a que le comunica su..

04 Las propiedades de un medio que determinan la velocidad de una onda a través de ese medio, son su .... y su ....

05 Se tiene un sistema de coordenadas de referencia como se indica en la figura. Una onda viajera de período 2 seg y longitud de onda π metros. Describir la onda cuando viaja hacia la derecha (+) y hacia la izquierda (–), con amplitud de 5 m para los dos casos.

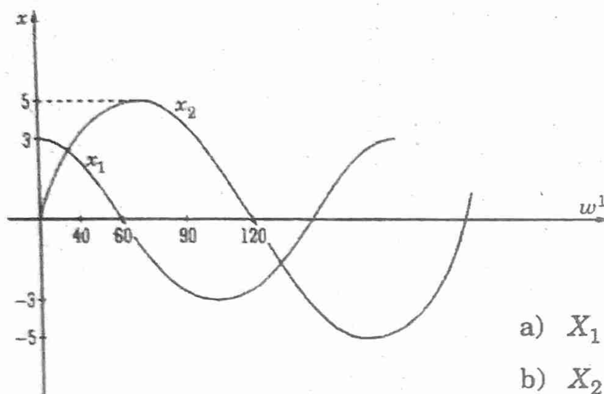


a) $\xi(x,t) =$

b) $\xi(x,t) =$

06 En que medio, los rayos (líneas perpendiculares a los frentes de onda), no son líneas rectas, cuando el medio es .... e ....

07 Se tiene un gráfico adjunto dos MAS de períodos $T_1 = 2\pi$ y $T_2 = \pi/2$, escriban las ecuaciones de estos dos movimientos.



a) X_1 = ...

b) X_2 = ...

08 La superposición de dos MAS de igual dirección y amplitud, pero diferente frecuencia el movimiento resultante tendrá:

a) Amplitud no es constante.
b) Amplitud constante.
c) N.A.

09 Cuáles son las condiciones, para que la interferencia de dos MAS, dé lugar a una polarización elíptica en la dirección de las agujas del reloj:

a) ....
b) ....
c) ....

10 Una onda que no es armónica es el pulso, es cierto o falso?
Porque ....
....

11 Las ondas gravitacionales se propagan con una velocidad de fase: $\upsilon_f = \sqrt{g\lambda/2\pi}$. ¿Cuál es el valor de la velocidad de grupo?

a) $\upsilon_g = 2\upsilon_f$ b) $\upsilon_g = \upsilon_f/2$ c) $\upsilon_g = 3\upsilon_f/2$ d) N.A.

12 Las ondas de presión para un gas está dado por: $p = p_0 \operatorname{sen} k(x - \sqrt{B/\rho_0}\, t)$, p y p_o son presiones, K: número de onda, B, ρ_0 son el módulo de comprensibilidad y la densidad respectivamente. ¿Cuál es la ecuación diferencial del movimiento ondulatorio:

....

13 Cuando la velocidad de propagación de un movimiento ondulatorio depende de la longitud de onda entonces diremos que en el medio hay ....

14 La potencia en un movimiento ondulatorio depende con el cuadrado de la amplitud.

a) Cierto b) Falso c) Faltan datos d) N.A.

15 Diga si la siguiente expresión es cierta o falsa "Las ondas que interfieren al moverse en sentidos opuestos a lo largo de la cuerda producen ondas estacionarias aún cuando sus amplitudes sean diferentes" ....

16 Cuando se da un impulso a la cuerda y esta se refleja en el extremo libre, entonces la elongación:

a) cambio de signo b) no cambia de signo c) faltan datos d) N.A.

17 ¿Qué se entiende por reverberación?: ....
....
....

18 Cuando se dice que hay resonancia en la energía: ....
....
....

19 Cuando se calcula la potencia transmitida por una cuerda que viaja en la dirección $(+x)$ se halla $\overline{P} = 2\pi\xi^2 f^2 \mu\upsilon$, si se hubiera tomado la onda que viaja en sentido contrario $(-x)$ se hubiera hallado $P = -2\pi\xi^2 f^2 \mu\upsilon$ esto significa que la potencia ....
....
....

20 Se sabe que la intensidad de la onda varía en razón inversa al cuadrado de su distancia a la fuente, cuál de las siguientes conclusiones es correcta.

a) La amplitud de la onda varía en razón inversa al cuadrado de la distancia a la fuente.
b) La amplitud de la onda varía en razón directa de la distancia a la fuente.
c) La amplitud de la onda varía en razón inversa de la distancia a la fuente.
d) La amplitud de la onda varía en razón directa al cuadrado de la distancia a la fuente.

EXAMEN (XXIV)

01 Los medios elásticos son medios .... el estudio de las ondas en estos medios se llaman ondas ....

02 Diga cuál de las siguientes expresiones es la correcta:

a) Cuando en un medio sus propiedades no son las mismas en todas las direcciones, entonces el medio es isótropo.
b) Si una partícula se mueve alternativamente en un sentido y otro, entonces el movimiento es oscilatorio.
c) Las ondas luminosas no son mecánicas.
d) Un impulso, se produce cuando sigue moviendo el extremo de la cuerda en un sentido y opuesto.

03 Qué es un frente de onda: ....
....
....

04 Sea $\xi(x,t)$ una onda viajera y se cumple $\xi(x,t)=\xi(x+2\pi/K,t)$ entonces $2\pi/K$ es llamada longitud de onda o ....
....

05 J. Fourier demostró que la forma más general de ondas periódica son ondas ...., en esto se basa el principio de
....

06 La ecuación diferencial de un MAS, es $4d^2x/dt^2 + 16\pi^2$, $X = 0$ entonces el período será: .... seg ....

07 Un cuerpo está sujeto a un resorte y ejecuta un MAS de amplitud A. Cuál es el valor de la elongación para el cual la energía cinética es igual a la energía potencial: $X =$ ....

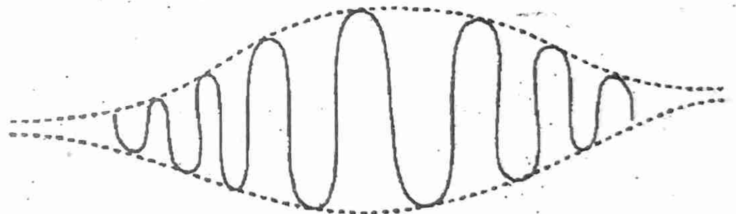
08 La superposición de dos MAS de igual dirección y frecuencia pero diferente amplitud, el movimiento resultante tendrá:

a) amplitud constante
b) amplitud no es constante
c) faltan datos
d) N.A.

09 La inferencia de dos MAS, perpendiculares de igual frecuencia, diferente amplitud y cuya diferencia de fase es $3\pi/2$, da lugar a una polarización:

a) Rectilínea, en la dirección de las agujas del reloj.
b) Circular, en la dirección de las agujas del reloj.
c) Elíptica, en la dirección de las agujas del reloj.
d) N.A.

10 Si tenemos un tren de ondas que consta de más de una longitud de onda y frecuencia angulares como se indica en la figura.



sirve para ....

y se denomina ....

11 Si $\upsilon g = \upsilon_f + K\, d\, \upsilon_f / dk$, cuál de las siguientes expresiones es correcta:

a) $\upsilon g = \upsilon_f + \lambda\, d\, \upsilon_f / d\lambda$
b) $\upsilon g = \upsilon_f + 1/\lambda\; d\upsilon_f / d\lambda$
c) $\upsilon g = \upsilon_f + \lambda\; d\lambda / d\upsilon_f$
d) $\upsilon g = \upsilon_f - \lambda d\, \upsilon_f / d\lambda$
e) N.A.

12 La ecuación diferencial de un movimiento ondulatorio es:

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ entonces la velocidad de propagación será:

a) 2
b) 0.5
c) 4
d) 0.25
e) N.A.

13. La velocidad de propagación de las ondas superficiales en un líquido es: $\upsilon = \sqrt{g\lambda/2\pi + 2\pi T/\rho\lambda}$, entonces si λ es muy pequeño, tendremos las ondas llamadas .... y su expresión será: ....

14. La siguiente expresión es la ecuación de una onda:

$$\xi_{02} KWF \cos^2(kx - wt)$$

donde F : fuerza,
K : número de onda,
w : frecuencia angular y
ξ_0 : amplitud

Entonces esta onda es de:

a) presión b) potencia c) energía d) fuerza e) N.A.

15. Se dice que la cuerda vibrante es equivalente a un sistema de masa resorte pero se diferencia en que el sistema masa-resorte tiene una .... en tanto que la cuerda vibrante tiene ....

16. La siguiente expresión es correcta o falsa: "*En una onda viajera, la amplitud no es la misma para diferentes partículas*".

a) Falsa b) verdadera c) N.A.

17. Qué se entiende por refuerzo ....
....
....

18. Cuando hay resonancia de amplitud ....
....

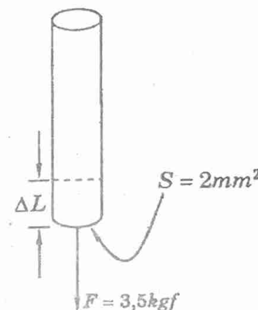
19. Qué se entiende por intensidad de la onda..
....

MISCELÁNEA DE PROBLEMAS RESUELTOS

ELASTICIDAD

01. Se tensa un alambre de hierro, cuya sección es de $2mm^2$ de área, se observa que el inicio de la deformación permanentemente corresponde a la carga de $3,5kgf$. ¿Cuál es el límite de elasticidad del material de que está hecho el alambre?

Solución:



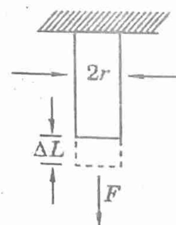
Por definición:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{3,5 \times 9,8N}{2 \times 10^{-4} m^2}$$

$$\sigma = 1,72 \times 10^5 \ N/m^2$$

02. Un peso de $150kgf$. está colgado de un alambre de acero de $1,5m$ de longitud y de $2mm$. de radio. ¿A qué es igual el trabajo de tracción del alambre?.

Solución:



Por teoría: $W = \frac{1}{2} ES\, L_0 \Delta^2$

Además: $E = \frac{F}{S\Delta}$, $\Delta = \frac{F}{SE}$

$$W = \frac{L_0\, F^2}{2\, SE} \text{ , donde:}$$

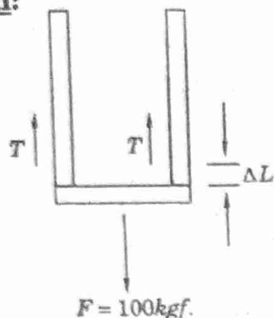
$L_0 = 1,5\ m$, $F = 150\ kgf.$, $S = \pi r^2$, $r = 2 \times 10^{-3}\ m$

$E = 20 \times 10^{10}\ N/m^2$

$$W = \frac{(1,5)(150 \times 9,8)^2}{2[\pi(2 \times 10^{-3})^2]\, 20 \times 10^{10}} \quad J = 0,65\ J$$

03. Un cable de acero de $3mm$. de diámetro, tiene un módulo de Young de $20 \times 10^{10}\ N/m^2$. Se utilizan dos porciones de este cable de 10m de longitud para formar una escalera ligera, cuyos peldaños también son de acero. Qué alargamiento experimenta esta escalera, cuando baja por ella una persona, la cual ejerce sobre ella una fuerza de $100kgf$.

Solución:



Cada cable experimenta una tensión T:

$2T = F \quad T = F/2 = 100/2 = 50\ kgf.$

Se sabe: $\Delta L = \dfrac{T\,L_0}{SE}$

$$\Delta L = \frac{50 \times 9{,}8 \times 10}{\pi\,(1{,}5 \times 10^{-3})^2 \times 20 \times 10^{10}}\ m$$

$$\Delta L = 3{,}5 \times 10^{-3}\ m = 3{,}5mm.$$

(04) Con relación al problema anterior. Qué peso máximo soportará la escalera sin romperse, si el límite de proporcionalidad está muy próximo a la carga de rotura.

Solución:

La carga de rotura para el acero: σ_r

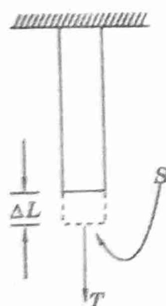
$\sigma_r = 7{,}85 \times 10^8\ N/m^2 \qquad$ Luego: $\sigma_r = T'/S \quad , \quad T' = \sigma_r\,S$

$T' = 7{,}85 \times 10^8\ \pi\,(1{,}5 \times 10^{-3})^2 \qquad N = 5546\ N$

(05) Un alambre de aluminio con una sección transversal de área $10^{-5} m^2$ se estira hasta el límite elástico (a) cuál es la tensión en el alambre. (b) Cuál es la deformación unitaria del alambre. (c) Qué tensión se necesita para romper el alambre. (d) Qué tensión se necesita para romper un alambre de aluminio del triple de diámetro.

$\sigma_{lim} = 18 \times 10^7\ N/m^2 \quad , \quad \sigma_r = 20 \times 10^7\ N/m^2$

Solución:



a) $\sigma_\ell = \dfrac{T}{S} \quad , \quad T = \sigma_\ell S$

$T = (18 \times 10^7)\,(10^{-5}) = 1800\ N$

b) $\dfrac{\Delta L}{L_0} = \dfrac{\sigma_\ell}{E} = \dfrac{18 \times 10^7}{7 \times 10^{10}} = 2{,}57 \times 10^{-3}$

c) $T' = \sigma_r\,S = (20 \times 10^7)\,(10^{-5}) = 2 \times 10^3\ N$

d) $T'' = \sigma_r\,S' = \sigma_r\,\dfrac{(3d)^2\,\pi}{4} = \sigma_r\left(\dfrac{\pi\,d^2}{4}\right)9$

$T'' = \sigma_r\,S \quad 9 = 20 \times 10^7 \times 10^{-5} \times 9 = 18 \times 10^3\ N$

(06) (a) ¿Cuál es el menor diámetro de un alambre de cobre que puede sostener un peso de 5000N sin sobrepasar su límite elástico? (b) ¿Cuál es el máximo peso que puede soportar sin romperse dicho alambre?.

Solución:

Se conoce: $\sigma_\ell = 2 \times 10^8\ N/m^2 \quad ; \quad F = 5000\ N$

$E_{cu} = 13 \times 10^{10}\ N/m^2 \quad , \quad \sigma_r = 2{,}45 \times 10^8\ N/m^2$

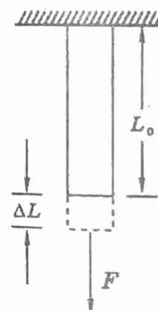
a) De la definición: $\sigma_\ell = F/S = 4F/\pi d^{\,2}$

$$d = \sqrt{\frac{4\,F}{\pi\,\sigma_\ell}} = \sqrt{\frac{4 \times 5000}{\pi \times 2 \times 10^8}} = 5{,}6 \times 10^{-3}\,m$$

b) $F = \sigma_{r_a} = S = 2{,}45 \times 10^8\ (2{,}5 \times 10^{-5}) = 6125\ N$

(07) Un alambre de oro de 100cm. de longitud y 0,5mm. de diámetro se alarga cuando está sometido a una tensión de 20N. Si el módulo de Young del oro es $8 \times 10^{11}\ N/m^2$, ¿Cuánto vale la deformación?.

Solución:



De la definición:

$$\Delta L = \frac{F\,L_0}{E\,S} = \frac{20 \times 1}{8 \times 10^{11} \times \pi\,(0{,}5 \times 10^{-3})^2/4}$$

$$\Delta L = 12{,}7 \times 10^{-5}\,m$$

$$\Delta L = 0{,}127\ mm.$$

(08) Si el volumen de un bloque de hierro es normalmente 200cm^3. ¿Cuál es el volumen cuando el bloque está sometido a una presión uniforme de $10^8\ N/m^2$?

Solución:

De la definición: $\qquad B = V_0\,\Delta p/\Delta V$

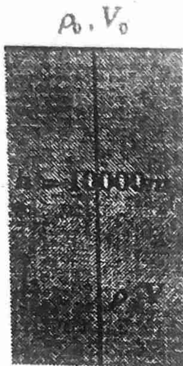
$$\Delta V = \frac{V_0\,\Delta p}{B} = \frac{2 \times 10^{-4}\,(10^8)}{15{,}8 \times 10^{10}} = 0{,}12 \times 10^{-6}\,m^3$$

Luego: $V_f = V_0 - \Delta V = 200 - 0{,}12cm^3$

$V_f = 199{,}88\ cm^3$

(09) Un metro cúbico de agua del mar tiene una masa de $1025kg$. a nivel del mar (a) ¿Cuál es el volumen ocupado por $1025kgf$. de agua del mar a una profundidad $10000m$.? (b) ¿Cuál es la densidad del agua del mar a una profundidad de $10000m$.?

Solución:



$V_0 = 1m^3 \quad , \quad m = 1025kgf. \quad , \quad h = 10000m.$

Como: $\rho V = m$

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De la definición B:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{p}{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De (1) y (2): $\Delta V = \frac{pV_0}{B} = \frac{(\rho_0\, g\, h)\, V_0}{B}$

$$\Delta V = \frac{1025 \times 9{,}8 \times 10^4 \times 1}{2{,}2 \times 10^9} = 0{,}0457\ m^3$$

$$V_f = V_0 - \Delta V = 1 - 0{,}0457 m^3 = 0{,}953 m^3$$

b) De $\rho = \frac{m}{V_f} = \frac{1025\ Kg}{0{,}953\ m^3} = 1029{,}8 \frac{Kg}{m^3}$

$$\rho = 1{,}0298\, g/cm^3$$

(10) Cuál es la presión necesaria para hacer disminuir el volumen del vidrio en 2 por ciento.

Solución:

Por la condición del problema: $\frac{\Delta V}{V_0} = 0{,}02$

por teoría: $\Delta p = B\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right) = 4 \times 10^{10} \times 0{,}02 \quad , \quad \Delta p = 0{,}08 \times 10^{10}\ N/m^2$

convirtiendo en atmósferas: $\Delta p = 7{,}92 \times 10^3\ atm.$

(11) El cabello se rompe bajo una tensión de 1,2N. Cuál es el área de la sección del cabello.

Solución:

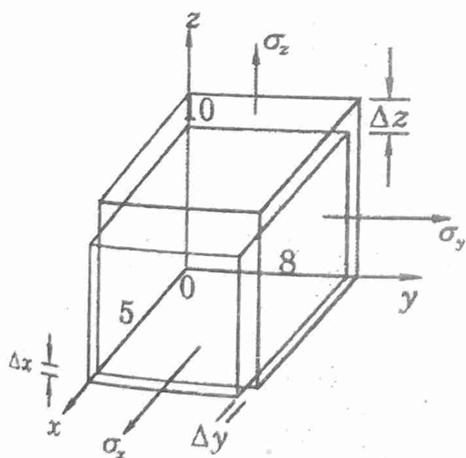
Se conoce: $T = 1,2N$ y $\sigma_r = 19,6 \times 10^7 \frac{N}{m^2}$

Luego: $S = T/\sigma_r = 1,2/19,6 \times 10^7 \, m^2$

$S = 0,06 \times 10^{-7} \, m^2$

[redacted]

Solución:



Se conoce: $E = 7 \times 10^{10} \, N/m^2$, $\mu = 0,34$

a) Por definición para σ_x:

$$\Delta'_x = \frac{\Delta X}{X} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{F_x}{ES_x}$$

$$\Delta'_x = \frac{50 \times 9,8}{7 \times 10^{10} \, (8 \times 10 \times 10^{-4})}$$

$$\Delta'_x = 0,88 \times 10^{-6}$$

Las contracciones:

en el eje Y: $\Delta'_y = -\mu \Delta'_x = -0,34 \times 0,88 \times 10^{-6} = -0,29 \times 10^{-6}$

en el eje Z: $\Delta'_z = -\mu \Delta'_x = -0,34 \times 0,88 \times 10^{-6} = -0,29 \times 10^{-6}$

b) Para σ_y : $\Delta_y'' = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{F_y}{SE} = \frac{150 \times 9{,}8}{5 \times 10 \times 10^{-4} \times 7 \times 10^{10}} = 4{,}2 \times 10^{-6}$

Las contracciones en el eje X:

$$\Delta_x'' = -\mu \Delta_y'' = -0{,}34 \times 4{,}2 \times 10^{-6} = -1{,}43 \times 10^{-6}$$

Eje Z: $\Delta_z'' = -\mu \Delta_y'' = -0{,}34 \times 4{,}2 \times 10^{-6} = -1{,}43 \times 10^{-6}$

c) Para σ_z : $\Delta_z''' = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{F_z}{S\,E} = \frac{200 \times 9{,}8}{5 \times 8 \times 10^{-4} \times 7 \times 10^{10}}$

$$\Delta_z''' = 7 \times 10^{-6}$$

Las contracciones en el eje X:

$$\Delta_x''' = -\mu \Delta_z''' = -0{,}34 \times 7 \times 10^{-6} = -2{,}38 \times 10^{-6}$$

Eje Y: $\Delta_y''' = -\mu \Delta_z''' = -0{,}34 \times 7 \times 10^{-6} = -2{,}38 \times 10^{-6}$

d) La deformación unitaria longitudinal en el eje X:

$\Delta_x = \Delta_x' + \Delta_x'' + \Delta_x''' =$

$\Delta_x = 0{,}88 \times 10^{-6} - 1{,}43 \times 10^{-6} - 2{,}38 \times 10^{-6} =$

$\Delta_x = -2{,}89 \times 10^{-6}$

En el eje Y : $\Delta_y = \Delta_y' + \Delta_y'' + \Delta_y'''$

$\Delta_y = -0{,}29 \times 10^{-6} + 4{,}2 \times 10^{-6} - 2{,}38 \times 10^{-6}$

$\Delta_y = 1{,}53 \times 10^{-6}$

e) La deformación unitaria longitudinal en el eje Z :

$\Delta_z = \Delta_z' + \Delta_z'' + \Delta_z'''$

$\Delta_z = -0{,}29 \times 10^{-6} - 1{,}43 \times 10^{-6} + 7 \times 10^{-6}$

$\Delta_z = 5{,}28 \times 10^{-6}$

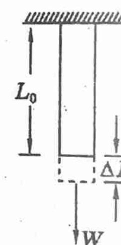
e) Por teoría: $\frac{\Delta V}{V} = \Delta_x + \Delta_y + \Delta_z$

$\frac{\Delta V}{V} = -2{,}89 \times 10^{-6} + 1{,}53 \times 10^{-6} + 5{,}28 \times 10^{-6}$

$\frac{\Delta V}{V} = 3{,}92 \times 10^{-6}$

(13) Un alambre de dos metros de longitud y sección transversal de $0{,}1cm^2$ soporta una carga de $102kgf$. El alambre se estira $0{,}22cm$. Halle. (a) El esfuerzo o fatiga normal (b) La deformación unitaria (c) El módulo de Young del alambre.

Solución:



a) Por definición:

$\sigma = \frac{W}{S} = \frac{102\ kgf}{0{,}1 \times 10^{-4}\ m^2}$

$\sigma = 102 \times 10^5\ kgf/m^2$

b) $\Delta = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{0{,}22}{200} = 1{,}1 \times 10^{-3}$

c) $E = \frac{\sigma}{\Delta} = \frac{102 \times 10^5}{1{,}1 \times 10^{-3}} = 9{,}27 \times 10^9\ \frac{Kgf}{m^2}$

(14) Un alambre de F_e de radio $0{,}20mm$ es sometido a la tensión a la rotura de $7{,}85 \times 10^8\ N/m^2$. (a) Cuál es la máxima fuerza que se puede ejercer sobre el alambre. (b) Si se ejerce la quinta parte de la fuerza hallada en (a) cuál es la deformación unitaria.

Solución:

a) Por definición: $\sigma_r = F_r/A$

$F_r = \sigma_r A = 7{,}85 \times 10^8\ \pi(0{,}2 \times 10^{-3})^2 = 98{,}6\ N$

b) $F_1 = \frac{F_r}{5}$, $\Delta = \frac{(F_1/A)}{E}$

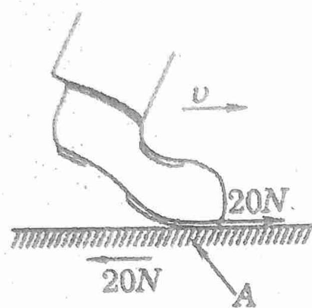
$\Delta = \frac{F_1}{A\,E} = \frac{F_r}{5AE} = \frac{98{,}6}{5 \times \pi\,(0{,}2 \times 10^{-3})^2 \times 20 \times 10^{10}}$

$\Delta = 7{,}85 \times 10^{-4}$

(15) Una persona al correr ejerce una fuerza de cizalladura de $20N$, el cual se distribuye en un área de $20cm^2$. Hallar (a) el ángulo de cizalladura. (b) Si el espesor de la suela es de $10mm$ cuánto vale el corrimiento.

Se asume el módulo de rigidez de la suela: $1,2 \times 10^5\ N/m^2$.

Solución:



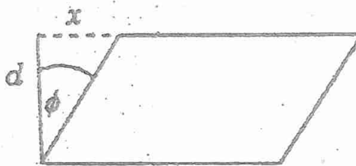
a) Por definición del módulo de rigidez.

$$n = \frac{F/A}{\varphi}$$

$$\varphi = \frac{F}{A\,n} = \frac{20\,N}{20\times 10^{-4}\,m^2 \times 1,2\times 10^5 \frac{N}{m^2}}$$

$$\varphi = 0,083\ rad = 4,75^o$$

b) En este caso se conoce $d = 10mm$.



$$\text{tg}\,\varphi = \frac{X}{d}$$

$$x = d\ \text{tg}\,\varphi$$

$$x = 10 \times \text{tg}\,4,75^o = 0,83\ mm$$

(16) Se tiene $5cm^3$ de Hg y se quiere reducir a $4,999cm^3$. Qué presión se debe ejercer para conseguir esta reducción de volumen.

Solución:

Por definición: $B = -\frac{\Delta p}{(\Delta V/V)}$

$$\Delta p = -B\left(\frac{\Delta V}{V}\right) = -2,7\times 10^{10}\ \frac{N}{m^2}\ \frac{(4,999 - 5,000)}{5,0}$$

$$\Delta p = 5,4\times 10^6\ N/m^2 = 53,3\ atm$$

(17) Sabiendo que la densidad del agua de mar es $1022\ kg/m^3$ sobre el nivel del mar y su módulo de comprecibilidad es $0,23\times 10^{10}\ N/m^2$. Cuál será la densidad del agua de mar a una profundidad donde la presión tiene un valor de $500\ atm$.

Solución:

Sabemos:

$$\rho=\frac{m}{V} \quad , \quad \frac{\Delta\rho}{\rho}=-\frac{\Delta V}{V} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$B=-\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} \quad , \quad \frac{\Delta V}{V}=-\frac{\Delta p}{B} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De (2) en (1):

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0}=-\left(\frac{-\Delta p}{B}\right)=\frac{\Delta p}{B}$$

$$\Delta\rho=\rho_0\frac{\Delta p}{B} \quad , \quad \rho_0-\rho_0=\rho_0\frac{\Delta p}{B}$$

$\rho=\rho_0\left[1+\frac{\Delta p}{B}\right]$, reemplazando valores y usando $1atm=1{,}013\times10^5\ N/m^2$

$$\rho=1022\left[1+\frac{500\times1{,}013\times10^5}{0{,}23\times10^{10}}\right]=1044\frac{Kgf}{m^3}$$

(18) Se desea aumentar la densidad en 0,05% de una masa de cobre, a que presión en *atm* debe estar sometido el material.

Solución:

Sabemos:

$$\Delta p=-B\frac{\Delta V}{V}=-B\left(-\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)$$

$$\Delta p=B\frac{\Delta\rho}{\rho} \quad , \quad \Delta p=p-p_0=B\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

$$p=p_0+B\frac{\Delta\rho}{\rho_0}$$

$$p=1{,}013\times10^5+13{,}5\times10^{10}\times5\times10^{-4}\ \frac{N}{m^2}$$

$$p=6{,}760\times10^7\ N/m^2=667{,}3\ atm.$$

(19) Con relación al problema anterior hallar la energía potencial elástica del cobre por unidad de volumen (asumir que cumple la ley de Hooke en todo momento).

Solución:

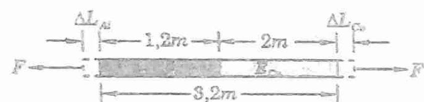
En este caso usaremos la expresión:

$$\frac{W}{V} = p\left|\frac{\Delta V}{V}\right| = 6{,}76 \times 10^7 \times 5 \times 10^{-4}\,\frac{N}{m^2}$$

$$= 33800\,\frac{N-m}{m^3} = 33800\,\frac{J}{m^3}$$

(20) Dos alambres de igual diámetro $2mm$. uno de aluminio de longitud $1{,}2m$. y el otro de cobre de $2{,}0m$, se unen por sus extremos para formar un sólo alambre de $3{,}2m$. Hallar (a) La constante elástica del sistema. (b) La fuerza necesaria para aumentar la longitud del alambre total en $1{,}5mm$. (c) Las deformaciones longitudinales de cada barra.

Solución:



a) Por estar los alambres dispuestos uno a continuación del otro (en serie), la fuerza que se aplica es la misma para ambos alambres, luego.

$$\Delta L = \Delta L_{Al} + \Delta L_{Cu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{F}{K} = \frac{F}{K_{Al}} + \frac{F}{K_{Cu}} \qquad K = \frac{K_{Al}\,K_{Cu}}{K_{Al} + K_{Cu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Además: $E = \dfrac{F\,L}{A\,\Delta L} = \dfrac{(K\,\Delta L)\,L}{A\,\Delta L} = \dfrac{K\,L}{A}$

$$K = \frac{E\,A}{L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2):

$$K = \frac{(E/L)_{Al}\,A \cdot (E/L)_{Cu}\,A}{\left(\frac{E}{L}\right)_{Al} A + \left(\frac{E}{L}\right)_{Cu} A}$$

$$K = \frac{E_{Al}\,E_{Cu}\,A}{E_{Al}\,L_{Cu} + E_{Cu}\,L_{Al}}$$

$$K = \frac{(7 \times 10^{10})(13 \times 10^{10})[\pi(10^{-3})^2]}{7 \times 10^{10} \times 2 + 13 \times 10^{10} \times 1{,}2}\,\frac{N}{m}$$

$$K = 9{,}65 \times 10^4\,N/m$$

b) La fuerza $F = K\,\Delta L$: $\quad F = 9{,}65 \times 10^4\,\frac{N}{m}\,(1{,}5 \times 10^{-3}\,m)$

$$F = 144{,}75\,N$$

c) La deformación para el cobre: $\Delta L_{Cu} = \dfrac{F}{K_{Cu}} = \dfrac{F\,L_{Cu}}{A\,E_{Cu}} = \dfrac{144{,}75 \times 2}{\pi\,(10^{-3})^2\;13 \times 10^{10}}\,m$

$$\Delta L_{Cu} = 7{,}09 \times 10^{-4}\,m = 0{,}709\,mm$$

para el aluminio: $\Delta L_{Al} = \dfrac{F}{K_{Al}} = \dfrac{F\,L_{Al}}{A\,E_{Al}} = \dfrac{144{,}75 \times 1{,}2}{\pi\,(10^{-3})^2\;7 \times 10^{10}}\,m$

$$\Delta L_{Al} = 7{,}9 \times 10^{-4}\,m = 0{,}79\,mm$$

Observemos que cumple (1) : $\quad \Delta L = 0{,}79mm + 0{,}709mm = 1{,}499mm$

$$\Delta L \cong 1{,}5mm.$$

OSCILACIONES

[redacted]

Solución:

a) De la expresión $x = 4\ \text{sen}(0{,}1t + 0{,}5)$ comparando con la teoría:

$x = A\,\text{sen}(\omega t + \alpha)$

$A = 4cm$; $\omega = 0{,}1$; $2\pi f = 0{,}1$

$f = \frac{0{,}1}{2\pi} Hz$; $T = \frac{2\pi}{0{,}1} s = 20\pi s$

$\alpha = 0{,}5 rad = 28{,}7^o$

b) Derivando la expresión: $\upsilon = \frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = a$

$\upsilon = 4(0{,}1)\cos(0{,}1t + 0{,}5)$

$a = -4(0{,}1)^2\ \text{sen}(0{,}1t + 0{,}5)$ $\quad a = -0{,}04\ \text{sen}(0{,}1t + 0{,}5)$

c) Las condiciones iniciales $t = 0$, $x = 4\ \text{sen}(0 + 0{,}5) = 1{,}92cm.$

$\upsilon = 0{,}4\cos(0 + 0{,}5) = 0{,}35\ cm/s$, $a = -0{,}04\ \text{sen}(0 + 0{,}5) = -0{,}02\ cm/s^2$

d) Para $t = 5s$ $\quad x = 4\ \text{sen}[0{,}5(5) + 0{,}5] = 3{,}37\ cm$

$\upsilon = 0{,}4\cos[0{,}1(5) + 0{,}5] = 0{,}35\ cm/s$

$a = -0{,}04\ \text{sen}[0{,}1(5) + 0{,}5] = -0{,}03\ cm/s^2$

(02) Una partícula cuya masa es de $0{,}5kg$. se mueve con MAS. Su período es de $0{,}15s$. y la amplitud de su movimiento es de 10 cm. Hallar (a) la aceleración (b) la fuerza (c) la energía potencial (d) la energía cinética cuando la partícula está a $5cm$. de la posición de equilibrio. Desprecie rozamiento.

Solución:

Se conoce: $m = 0{,}5kg.$ $\quad T = 0{,}15s.$

$A = 10cm.$ $\quad x = 5cm.$

a) La ecuación de este movimiento es:

$$x = A\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right)$$

$$x = 10\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}15}t + \alpha\right)$$

$$w = 2\pi/0{,}15 \;,\; K = w^2 m = \left(\frac{2\pi}{0{,}15}\right)^2 (0{,}5)g$$

Se sabe que la aceleración está dada por:

$$a = -w^2 x = -\left(\frac{2\pi}{0.15}\right)^2 (0{,}05) = -8{,}9\pi^2 \frac{m}{s^2}$$

b) La fuerza $F = -Kx = -\omega^2\, mx$

$$F = -\left(\frac{2\pi}{0{,}15}\right)^2 (0{,}5)(0{,}05)N = -4{,}4\pi^2 N$$

c) Por teoría: $E_p = \frac{1}{2}K X^2 = \frac{1}{2}\omega^2\, m x^2$

$$E_p = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{0{,}15}\right)^2 (0{,}5)(0{,}05)^2 = 0{,}11\pi^2 J$$

d) Sabemos por el principio de conservación de la energía:

$$E_p + E_c = \frac{1}{2}K A^2 = \frac{1}{2}\omega^2 m A^2$$

$$0{,}11\pi^2 + E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{0{,}15}\right)^2 (0{,}5)(0{,}1)^2$$

$$E_c = 0{,}44\pi^2 - 0{,}11\pi^2 = 0{,}33\pi^2 J$$

(03) La fase inicial de un MAS es igual a cero. Cuando la elongación del punto es 2,4*cm*. su velocidad es igual a 3*cm/s* y cuando dicha elongación es de 2,8*cm*. la velocidad es igual a 2*cm/s*. Hallar la amplitud y el período de esta vibración.

Solución:

Por condición del problema: $\alpha = 0$ $\quad x = 2{,}4cm \quad \upsilon = 3\ cm/s$

$x = 2{,}8cm \quad \upsilon = 2\ cm/s$

de la ecuación general $x = A \text{ sen } (\omega t + \alpha)$ y la velocidad $\upsilon = A\ \omega \cos(\omega t + \alpha)$

$2{,}4 = A \text{ sen } \omega t_1 \quad , \quad 3 = A\ \omega \cos \omega t_1$ .... (1)

$2{,}8 = A \text{ sen } \omega t_2 \quad , \quad 2 = A\ \omega \cos \omega t_2$ .... (2)

De (1) elevando al cuadrado y sumando:

$$\left(\frac{2{,}4}{A}\right)^2 + \left(\frac{3}{A\omega}\right)^2 = \text{sen}^2 \omega t_1 + \cos^2 \omega t_1 = 1 \quad \text{.....................} \quad (3)$$

De (2) elevando al cuadrado y sumando:

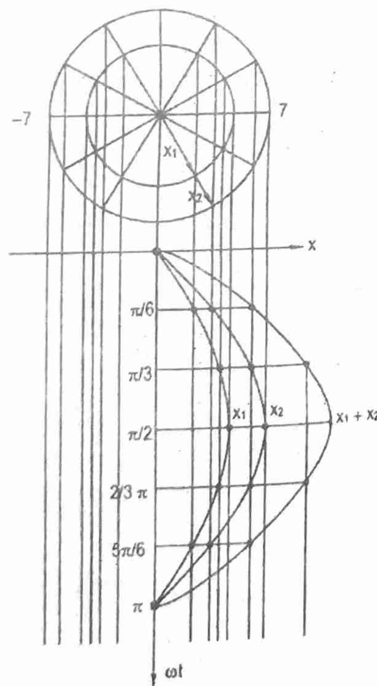
$$\left(\frac{2{,}8}{A}\right)^2 + \left(\frac{2}{A\omega}\right)^2 = \text{sen}^2 \omega t_2 + \cos^2 \omega t_2 = 1 \quad \text{.....................} \quad (4)$$

De (3) y (4): $5{,}76 + \frac{9}{\omega^2} = 7{,}84 + \frac{4}{\omega^2} \quad , \quad \omega = 1{,}55 \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad , \quad T = \frac{2\pi}{1{,}55} = 4{,}15$

La amplitud de (3): $A = \sqrt{(2{,}4)^2 + \frac{9}{2{,}4}}$ $\quad$ $\boldsymbol{A = 3{,}08cm.}$

04 Hallar gráficamente la superposición de los MAS paralelos cuyas ecuaciones son: $x_1 = 5 \text{ sen } 3t$ y $x_2 = 7 \text{ sen } (3t + \alpha)$, donde:

a) $\alpha = 0$ $\qquad$ b) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ c) $\alpha = \frac{\pi}{3}$



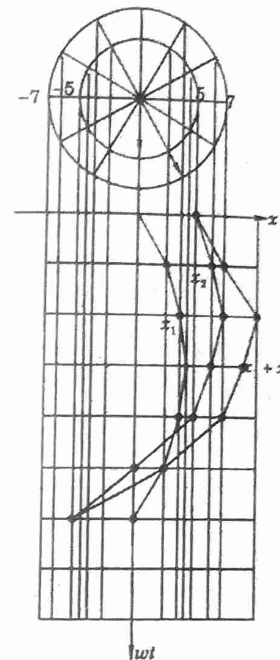
Solución:

Para $\alpha = 0$.

$x_1 : 3t$	$x_2 : 3t + \alpha$
0	0
30°	30° + 0
60°	60° + 0
⋮	⋮

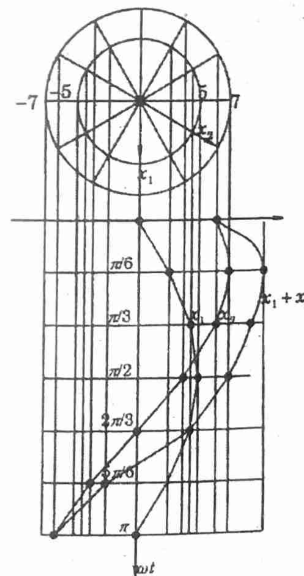
b) Para $\alpha = 30°$

x_1	x_2
3t	3t + 30°
0	30°
30	60°
60	90°
90	120°
120	150°
150	180°
180	210°
210	240°
240	270°
270	300°
300	360°
330	390°
360	420°



c) Para $\alpha = 60°$

x_1	x_2
3t	3t + 60°
0	60°
30	90°
60	120°
90	150°
120	180°
150	210°
180	240°



05 Hallar la constante de amortiguamiento (λ), si el periodo de las oscilaciones amortiguadas de una masa de 0,5kg. unida a un resorte es de 0,2 seg. Sabiendo que una masa de 1kg. estira el resorte 2,5cm.

Solución:

Se conoce : $m = 0{,}5kg.$, $T = 0{,}2\ s.$

Para : $m_1 = 1kg.$, $x_1 = 2{,}5cm.$

Hallando : $K = \frac{m_1 g}{x_1} = \frac{1 \times 9{,}8}{2{,}5 \times 10^{-2}} = 392 \frac{N}{m}$

$$W = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2} = 31{,}4 s^{-1}$$

Reemplazando en la expresión: $\omega = \sqrt{(K/m)^2 - (\lambda^2/4m)^2}$

$$(31{,}4)^2 = \left(\frac{392}{0{,}5}\right)^2 - \left(\frac{\lambda^2}{4 \times (0{,}5)^2}\right) \quad ; \quad \lambda = 783\ kg/s$$

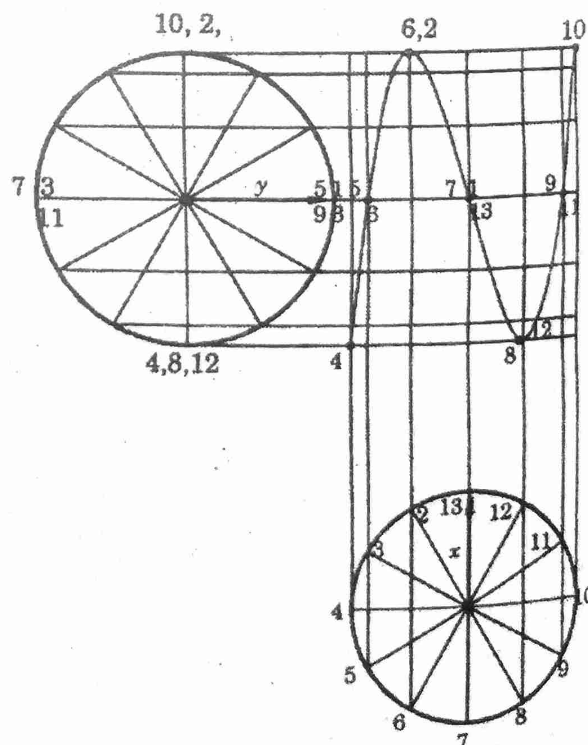
06 Hallar la ecuación de la trayectoria de los **MAS** resultantes de la superposición de dos **MAS** perpendiculares, si:

$\omega_1/\omega_2 = 1/3$ y $\alpha = 0$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$

Solución:

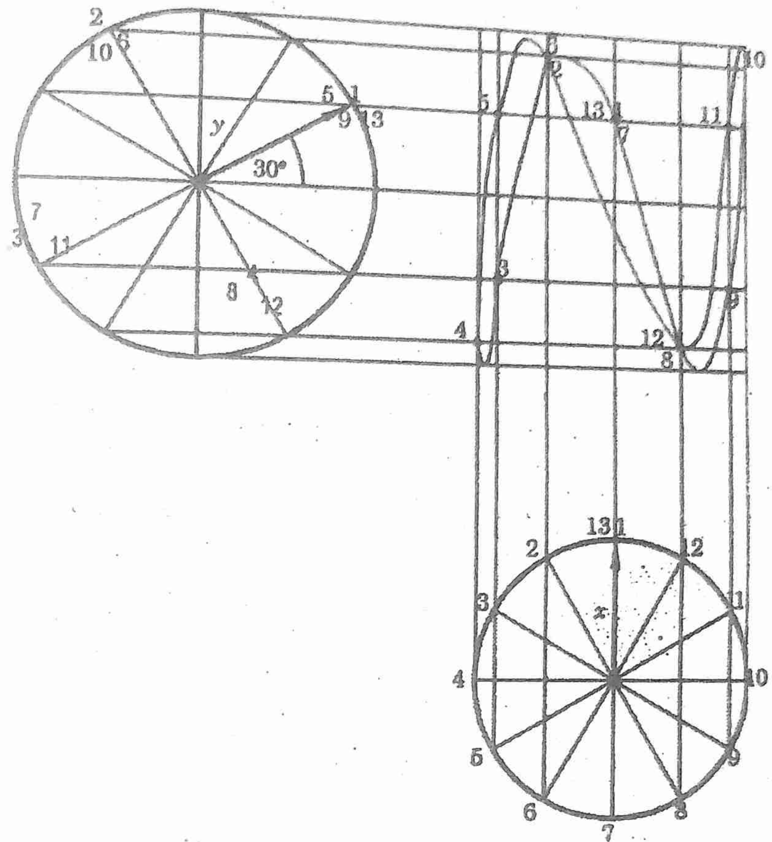
a) $\alpha = 0$

#	$\omega_1 t$	$3\omega_1 t + 0$
1	0	0
2	30	90
3	60	180
4	90	270
:	:	:



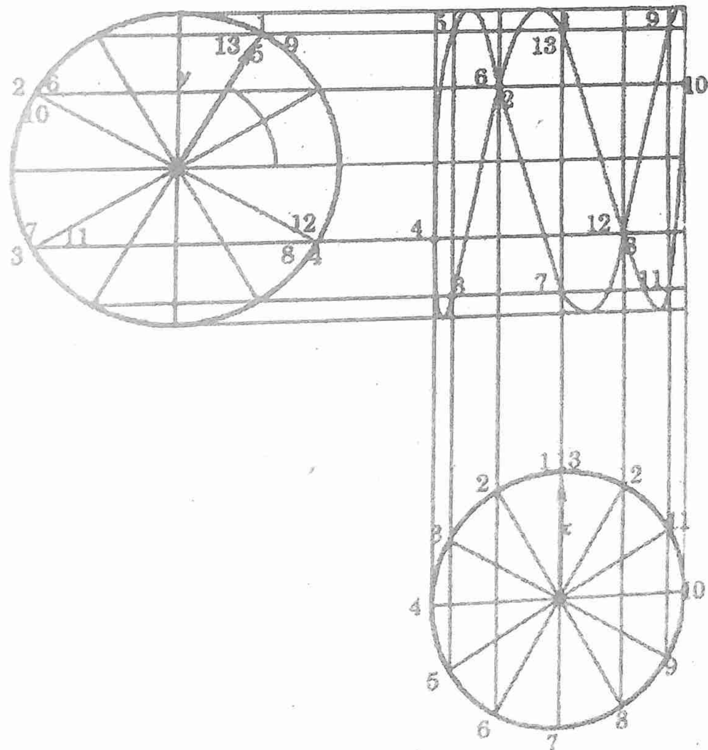
b) $\alpha = \pi/6$

#	$\omega_1 t$	$3\,\omega_1 t + 30$
1	0	30
2	30	120
3	60	210
4	90	300
:	:	:



c) $\alpha = 60° = \pi/3$

#	$\omega_1 t$	$3\omega_1 t + 60°$
1	0	60°
2	30	150°
3	60	240°
4	90	330°
:	:	:



(107) Un peso de $10kg$ se cuelga de un resorte vertical el que se estira entonces $2{,}5cm$. El peso se empuja $10cm$. hacia abajo y se abandona. Hallar (a) la posición del peso en cualquier tiempo, si una fuerza de amortiguamiento es numéricamente igual a 4 veces la velocidad instantánea con que está actuando.

Solución:

Los datos son: $m = 10kg$, $x_1 = 0{,}025\ m.$

$$K = \frac{m\,g}{x_1} = \frac{10 \times 9{,}8}{0{,}025} = 3920\,N/m$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{3920}{10}} = 19{,}8\,s^{-1} \quad ; \quad F = -4\upsilon\ ,\ \lambda = 4$$

Luego: $\gamma = \frac{\lambda}{2m} = \frac{4}{2(10)} = 0{,}2\,s^{-1}$

Las condiciones iniciales son: $x_0 = 0{,}10m.$, $\upsilon_0 = 0$, $t_0 = 0$

En este caso $\omega_0 > \gamma$, la solución es: $x = A\,e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha)$ .... (*)

donde: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{(19{,}8)^2 - (0{,}2)^2}$

$\omega \cong 19{,}8\,s^{-1}$ $\qquad x = A\,e^{-0{,}2t}\cos(19{,}8\,t + \alpha)$

Para $t_0 = 0$, $x = 0{,}10m.$

$0{,}10 = A\ e^{-0{,}2(0)}\cos\,(19{,}8(0) + \alpha)$

$0{,}10 = A\cos\alpha$ .... (1)

Derivando la expresión (*)

$\upsilon = A(-\gamma)\,e^{-\gamma t}\cos\,(\omega t + \alpha) + A\,e^{-\gamma t}\,(-\omega)\,\text{sen}\,(\omega t + \alpha)$

para $t_0 = 0$, $\upsilon = 0$

$0 = A(-0{,}2)\,e^{-0{,}2(0)}\cos(19{,}8(0) + \alpha) + A\,e^{-0{,}2(0)}\,(-19{,}8)\,\text{sen}[19{,}8(0) + \alpha]$

$0 = -0{,}2\,A\cos\alpha - 19{,}9\,A\,\text{sen}\,\alpha$ .... (2)

De (1) en (2): $A\,\text{sen}\,\alpha = -1{,}010 \times 10^{-3}$ .... (3)

De (1) y (3) : $\text{tg}\,\alpha = -0{,}0101$, $\alpha = -0{,}57°$

En radianes : $\alpha = -0{,}010\ rad.$

En (1) : $A = \frac{0{,}10m}{\cos(-0{,}57)} = 0{,}10m$

Reemplazando en (*): $x = 0{,}10e^{-0{,}2t}\cos(19{,}8t - 0{,}010)$

(08) El peso unido a un resorte vertical está forzado a vibrar de acuerdo a la ecuación:

$$(d^2x/dt^2) + 8(dx/dt) + 25x = 20\text{sen}\,\omega_f\,t$$

dónde x es el desplazamiento de la posición de equilibrio y $\omega_f > 0$ es una constante. Si para $t = 0$, $x = 0$ y $\upsilon = 0$ hallar. (a) x en función del tiempo (b) El período de la fuerza externa para la cual la resonancia ocurre.

Solución:

De la expresión: $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\left(\frac{dx}{dt}\right) + 25x = 20\,\text{sen}\,\omega_f\,t$ .... (1)

$\omega_0^2 = 25$, $\omega_0 = 5s^{-1}$, $2\gamma = 8$, $\gamma = 4$

La solución complementaria: $x_C = A\ \text{sen}\ 5t + B\cos 5t$

Sea la solución particular: $x_p = C\ \text{sen}\ \omega_f\,t + D\cos\,\omega_f\,t$

derivando: $\frac{dx_p}{dt} = CW\cos\omega_f\,t - DW\,\text{sen}\,\omega_f\,t$

$\frac{d^2x_p}{dt^2} = -CW^2\text{sen}\,\omega_f\,t - DW^2\cos\omega_f\,t$

reemplazando en (1): $(-CW^2\ \text{sen}\ \omega_f\,t - DW^2\cos\,\omega_f\,t) +$

$8(CW\cos\,\omega_f\,t - DW\,\text{sen}\,\omega_f\,t) + 25(C\ \text{sen}\ \omega_f\,t + D\cos\,\omega_f\,t)$

$= 20\ \text{sen}\ \omega_f\,t$

Agrupando en senos y cosenos: $(-CW_f^2 - 8DW_f + 25C)\text{sen}\,w_f\,t +$
$(-DW_f^2 + 8CW_f + 25D)\cos w_f\ t = 20\text{sen}\,w_f\ t$

$(25 - w_f^2)C - 8w_f\,D = 20$ .... (2)

$(25 - w_f^2)D + 8w_f\,C = 0$

$C = -\frac{(25 - w_f^2)D}{8\,w_f}$ .... (3)

De (3) en (2): $(25-w_f^2)\left[\frac{(w_f^2-25)}{8w_f}D\right]-8w_f\,D=20$

$$D=\left[-\frac{(w_f^2-25)^2}{8w_f}-8w_f\right]=20$$

$$D=-\frac{160\,W_f}{(w_f^2-25)^2+64w_f^2} \quad \text{.......................} \quad (4)$$

$$C=-\frac{(25-w_f^2)}{8w_f}\left[\frac{-160\,w_f}{(w_f^2-25)^2+64w_f^2}\right]$$

$$C=\frac{(25-w_f^2)\,20}{(w_f^2-25)^2+64w_f^2} \quad \text{.......................} \quad (5)$$

Para conocer A y B es necesario usar las condiciones iniciales:

$t=0$, $x=0$, $\upsilon=0$ donde: $x=x_c+x_p$

$x=A$ sen $5t+B$ cos $5t+C$ sen $w_f\;t+D$ cos $w_f\;t$

$0=A$ sen $0+B$ cos $0+C$ sen $0+D$ cos 0

$0=B+D$, $B=-D$ .... (6)

hallando la expresión de la velocidad: $\upsilon=\frac{dx}{dt}=5A\cos 5t-5B\,\text{sen}\,5t+C w_f\cos w_f\,t-D w_f\,\text{sen}\,w_f\,t$

Para: $t=0$, $\upsilon=0$

$0=5A\cos 0-5B\,\text{sen}\,0+Cw_f\cos 0-Dw_f\,\text{sen}\,0$

$0=5A+Cw_f$, $A=-\frac{CW_f}{5}$ .... (7)

De (4), (5), (6) y (7) se conoce A, B, C y D.

(09) Un cuerpo realiza un MAS con frecuencia de $25rad/s$. Cuando su posición inicial es de $-2cm.$, su velocidad inicial es de $-20cm/s$. Hallar su posición en función al tiempo.

Solución:

Sea: $x=A$ sen $(wt+\alpha)$, $\upsilon=A\,w$ cos $(wt+\alpha)$

$t=0$, $x=-2=A$ sen $[w(0)+\alpha]$

$-2=A$ sen α .... (1)

$t=0$, $\upsilon=-20=A\;25$ cos $[w(0)+\alpha]$

$-20=25\,A$ cos α .... (2)

De (1) y (2): tg $\alpha=2{,}5$, $\alpha=68{,}19°$, $\alpha=1{,}19\,rad.$, $A=2{,}15cm.$

Luego: $x=2{,}15$ sen $(25t+1{,}19)$

(10) Una masa de $2kg.$ oscila con una frecuencia de $0{,}5Hz$ y una amplitud de $4cm.$ (a) Cuál es la energía total de la masa (b) Cuál es su velocidad máxima.

Solución:

a) Por teoría: $E_T=\frac{1}{2}KA^2$

$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$, $K=4\pi^2 f^2 m$

$K=4(3{,}14)^2\,(0{,}5)^2\,(2)=19{,}7\;N/m^2$

$E_T=\frac{1}{2}(19{,}7)\,(4\times10^{-2})^2=15{,}75\times10^{-3}\;J$

b) $E_T=\frac{1}{2}m\upsilon_{max}^2$

$\upsilon_{max}=\sqrt{\frac{2E_T}{m}}=\sqrt{\frac{2\times15{,}75\times10^{-3}}{2}}$

$\upsilon_{max}=0{,}125\,m/s$

(11) Una partícula oscila alrededor de su posición de equilibrio con una frecuencia de $\frac{2}{3}H_z$ y parte del reposo en $20cm.$ Hallar la aceleración en función del tiempo.

Solución:

Sea: $x=A$ sen$(wt+\alpha)$; $\upsilon=A\,w$ cos$(wt+\alpha)$; $a=-A\,w^2$ sen$(wt+\alpha)$

Se tiene que hallar A y α aplicando las condiciones iniciales:

$t=0$, $x_0=20$, $\upsilon_0=0$

$t=0$, $x=20=A$ sen$(\omega(0)+\alpha)$, $20=A$ sen α .... (1)

$t=0$, $\upsilon=0=A\,w$ cos$(w(0)+\alpha)$, $0=Aw$ cos α , $\alpha=\pi/2$

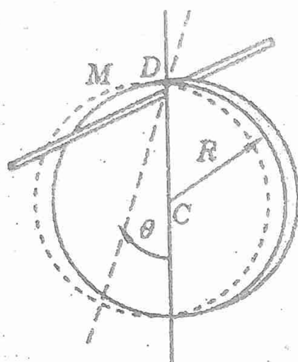
Reemplazando en (1): $A=A/\text{sen}\frac{\pi}{2}=20cm.$

Luego: $x = 20\,\text{sen}\left[2\pi\frac{2}{3}t + \frac{\pi}{2}\right]$

$$x = 20\,\text{sen}\left(\frac{4}{3}\pi t + \frac{\pi}{2}\right) cm.$$

(12) Un disco de $10cm$. de diámetro y $4kg$. de masa, está suspendido de una varilla horizontal, perpendicular al disco por uno de sus extremos (desprecie el rozamiento), tal como se muestra en la figura. Si el disco se desplaza ligeramente del equilibrio y se deja libre. Hallar el período del MAS.

Solución:



Como se trata de un péndulo compuesto, el período se halla con la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_D}{Mgb}}$$

Para hallar I_D se usa el teorema de Steiner: $I_D = I_C + MR^2$

$$I_D = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 \quad \text{y} \quad b = R$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2}MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$$

Reemplazando valores: $T = 2\pi\sqrt{\frac{3\times 0{,}05}{2\times 9{,}8}} = 0{,}55\ s$

(13) Una masa realiza un movimiento oscilatorio y su amplitud disminuye en un 10% cada ciclo. ¿En cuánto disminuye la energía en cada ciclo?

Solución:

Sabemos la relación: $E = \frac{1}{2}KA^2$

$$\Delta E = \frac{2K}{2}A\Delta A = KA\Delta A$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{KA\Delta A}{(1/2)KA^2} = 2\frac{\Delta A}{A} = 2\left(\frac{10}{100}\right)$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 0,20$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 20\%$$

(14) Un sistema con movimiento oscilatorio forzado funciona con una masa de 1kg, la constante de elasticidad del resorte es de $900N/m$. La constante de amortiguamiento es de $30kg/s$. El valor máximo de la fuerza impulsora es de $50N$ y su frecuencia de oscilación es de $40rad/s$, hallar (a) La amplitud de las oscilaciones (b) Para qué frecuencia de la fuerza exterior se producirá la resonancia. (c) Cual será la amplitud de las vibraciones cuando se produce resonancia.

Solución:

a) Sabemos la expresión de la amplitud: $A = \dfrac{(F_0/m)}{\sqrt{(w_f^2 - w_0^2)^2 + 4\gamma^2 w_f^2}}$, donde:

$F_0 = 50N$, $m = 1kg$, $w_f = 40\ rad/s$

$\lambda = 30kg/s$, $K = 900\ N/m.$ se conoce:

$$w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{900}{1}} = 30\,rad/s$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{2\,m} = \frac{30}{2(1)} = 15\,rad/s$$

Reemplazando valores: $A = \dfrac{(50/1)}{\sqrt{[(40)^2 - (30)^2]^2 + 4(15)^2(40)^2}} = 0,036\ m = 3,6\ cm.$

b) Sabemos: $w_A = \sqrt{w_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{(30)^2 - 2(15)^2} = 21,2\ rad/s$

c) La resonancia se produce, cuando: $w_f = w_0$, reemplazando:

$$A = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{[w_f^2 - w_0^2]^2 + 4\gamma^2 w_f^2}} =$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{[w_0^2 - w_0^2]^2 + 4\gamma^2 w_0^2}} = \frac{F_0}{2\,m\,\gamma\,w_0}$$

Pero: $A = \dfrac{50}{2\times 1\times(15)(30)} = 0,054\ m = 5,4\,cm.$

(15) Una partícula describe un **MAS**, con una amplitud de $10cm.$ y frecuencia de $0{,}25Hz$. Hallar la distancia recorrida en el intervalo de tiempo de $1s$ a $3s$. Cuando $t = 0$ la partícula se halla en su posición de equilibrio.

Solución:

La condición del problema: $t = 0 \quad , \quad x = 0 = A \text{ sen } [w(0) + \alpha]$

$0 = A \text{ sen } \alpha \quad , \quad \alpha = 0$

Luego: $x = A \text{ sen } wt$

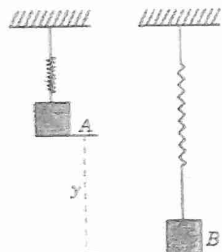
$t = 1s \; , \quad x_1 = 10 \text{ sen } 2\pi \times 0{,}25(1) = 10\ cm$

$t = 3s \; , \quad x_3 = 10 \text{ sen } 2\pi \times 0{,}25(3) = -10\ cm$

La distancia recorrida será: $|x_3 - x_1| = |-10 - 10| = 20cm.$

(16) Cuando una masa se cuelga de un resorte que se halla suspendido, la masa se desplaza 5 cm. antes de quedar en reposo por primera vez. Hallar el período del movimiento.

Solución:



Según el principio de conservación de la energía :

$$\Delta U_e + \Delta U_g + \Delta E_c = 0$$

$$U_{eB} - U_{eA} + U_{gB} - U_{gA} + E_{cB} - E_{cA} = 0$$

donde : U_e : energía elástica del resorte

U_g : energía gravitatoria de la masa

E_c : energía cinética de la masa.

$$\left(\tfrac{1}{2}Ky^2 - 0\right) + (0 - mg\,y) + (0 - 0) = 0$$

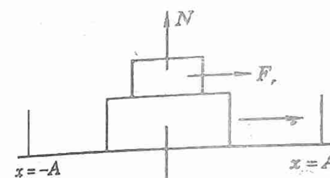
$$\frac{y^2K}{2} = mg\,y \quad , \quad K = \frac{2mg}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

El período: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$

De (1) en (2): $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{(2\,mg/4)}} = 2\pi\sqrt{\frac{y}{2\,g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}05}{2 \times 9{,}8}} = 0{,}32s$

(17) Sobre un bloque que realiza un recorrido **MAS** con período de $1s.$ en una superficie lisa, se halla otro bloque de menor masa, si el coeficiente de rozamiento estático entre los bloques es de 0,30. Hallar (a) La aceleración máxima del bloque inferior si la amplitud de la oscilación es de $2cm.$ (b) la aceleración del bloque que se halla arriba. (c) ¿Cuál es el valor de la mayor amplitud de oscilación del bloque para que el bloque situado en la parte superior no se deslice?

Solución:



a) Por teoría sabemos:

$$a_{max} = w^2 A \quad ; \quad A = 2\text{cm.}$$

$$= \left(\tfrac{2\pi}{T}\right)^2 A$$

$$a_{max} = \left(\tfrac{2\pi}{1}\right)^2 (0{,}02) = 0{,}79\ m/s^2$$

b) Para el bloque de arriba: $\Sigma F = ma$

$$f_r = ma = \mu_s N = \mu_s mg \quad , \quad a = \mu_s g$$

$$a = 0{,}3 \times 9{,}8 = 2{,}94\ m/s^2$$

c) La condición para que no deslice es: $a_{max} = \mu_s g \quad ; \quad \left(\tfrac{2\pi}{T}\right)^2 A = \mu_s g$

$$A = \frac{\mu_s\, g\, T^2}{4\,\pi^2} = \frac{0{,}3 \times 9{,}8\,(1)^2}{4 \times (3{,}14)^2} = 0{,}074\ m$$

$$A = 7{,}4\ cm.$$

(18) Un movimiento oscilatorio amortiguado tiene una frecuencia que es del [illegible] menor que su frecuencia sin amortiguamiento. Hallar (a) el factor que reduce la amplitud en cada ciclo. (b) el factor que reduce la energía en cada ciclo.

Solución:

a) Sabemos que la amplitud del movimiento amortiguado está dada por: $A_0\, e^{-\gamma t}$.

Hallemos γ : $\quad w = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}$

Por condiciones del problema: $w = 0{,}95\ w_0$

$0{,}95w_0 = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}$, $\gamma^2 = 0{,}0975w_0^2$

$\gamma = 0{,}312\, w_o$, para cada ciclo $t = T$

$$A_T = A_0\, e^{-0{,}312\, w_0\, T} = A\, e^{-0{,}312\, w_0 \frac{2\pi}{w}}$$

$$A_T = A_0\, e^{0{,}312\, w_0 \frac{2\pi}{0{,}95\, w_0}} = A_0\, e^{-\frac{0{,}312 \times 2\pi}{0{,}95}}$$

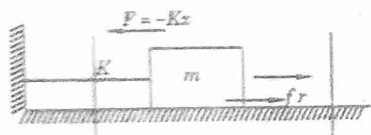
$A_T = A_0\, 0{,}127$ En este caso el factor es: 0,127

b) Para el caso de la energía ésta varía proporcionalmente con el cuadrado de la amplitud $E_T \,\alpha\, A_T^2$.

Luego: $E_T = E_0\, (0{,}127)^2$
$E_T = E_0\, 0{,}016$ El factor de disminución es : 0,016

(19) Un bloque de masa m, está unida a un resorte de constante k y se desplaza sobre una superficie rugosa, cuyo coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la masa es μ_k. Hallar (a) La ecuación diferencial del movimiento cuando el bloque se mueve hacia la derecha. (b) Hacia la izquierda (c) La potencia instantánea cedida por la fuerza impulsora (d) Demostrar que la potencia media en un período está dada por: $P_m = \frac{1}{2} AW\, F_0 \operatorname{sen}\alpha$

Solución:



a) De la segunda ley de Newton:

$\Sigma F = ma \qquad -Kx + fr = ma$

$$\frac{m d^2 x}{dt^2} = -Kx + \mu_k\, mg \quad , \quad x > 0$$

b) Si se mueve hacia la izquierda: $m\frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx - \mu_K\, mg$, $x < 0$

c) Sea la fuerza impulsora $F = F_0 \cos wt$ y el desplazamiento:

$x = A \cos\,(wt - \alpha)$; $\upsilon = -Aw \operatorname{sen}\,(wt - \alpha)$

Por definición de potencia: $P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}$

$$P = F_0 \cos wt\, (-wA) \operatorname{sen}\,(wt - \alpha)$$

d) Desarrollando: $\operatorname{sen}(wt - \alpha) = \operatorname{sen} wt \cos\alpha - \cos wt \operatorname{sen}\alpha$

$P = -wA\, F_0 \cos wt\, [\operatorname{sen} wt \cos\alpha - \cos wt \operatorname{sen}\alpha]$

$P = -wA\, F_0 \operatorname{sen} wt \cos wt \cos\alpha + wA\, F_0 \cos^2 wt \operatorname{sen}\alpha$

$P = -wA\, F_0 \operatorname{sen} wt \cos wt \cos\alpha + wA\, F_0 \cos^2 wt \operatorname{sen}\alpha$

Hallemos por separado los valores medios:

$$\overline{\operatorname{sen} wt \cos wt} = \int_0^T \cos wt \operatorname{sen} wt\, dt = \frac{1}{2w} \operatorname{sen}^2 wt \int_0^T = 0$$

$$\overline{\cos^2 wt} = \int_0^{2\pi} \cos^2 wt \cdot dt = \frac{1}{2}$$

Lego: $\overline{P} = \frac{1}{2} w A\, F_0 \operatorname{sen}\alpha$

(20) Una esfera de $1kg$. cae en el aire con una velocidad terminal (o límite) de $20m/s$. La esfera está unida a un resorte cuya constante elástica es de $200N/m$ y oscila con una amplitud inicial de $10cm$. (a) Qué tiempo ha de transcurrir para que su amplitud se reduzca a $2cm$. (b) Cuánta energía se pierde cuando la amplitud sea de $2cm$.

Solución:

a) La velocidad límite se consigue $mg - \lambda\upsilon = 0$, $\lambda = \frac{mg}{\upsilon}$

$\lambda = \frac{1 \times 9{,}8}{20} = 0{,}49\, kg/s \qquad \gamma = \frac{\lambda}{2\, m} = \frac{0{,}49}{2 \times 1} = 0{,}245\, rad/s$

$K = 200\, N/m$, $A_0 = 10\, cm.$

La amplitud varía con el tiempo así:

$A = A_0\, e^{-\gamma t} \qquad 2 = 10\, e^{-0{,}245 t} \qquad t = \frac{\ln 0{,}2}{-0{,}245} = 6{,}57\, s$

b) La energía total inicial es: $E_0 = \frac{1}{2} K\, A_0^2 = \frac{1}{2}(200)\,(0{,}1)^2 = 1J$

La energía total cuando $A = 2$cm : $E = \frac{1}{2} K\, A^2 = \frac{1}{2}(200)(0{,}02)^2 = 0{,}04\, J$

Luego la energía perdida fue de : $\Delta E = 0{,}04 - 1J = -0{,}96\, J$

MOVIMIENTO ONDULATORIO

(01) a) Hallar una frecuencia de onda para una onda senoidal que se propaga en la dirección $(-x)$ con una amplitud de $0{,}2m$, longitud de onda $3m$, y frecuencia $5s^{-1}$ si para $x=0$, $t=0$, la perturbación es nula. (b) Cuál es la velocidad de propagación de onda.

Solución:

a) Sabemos que una función de onda está dada por: $\xi(x_1\ t) = \xi_0 \operatorname{sen}(Kx + wt + \alpha)$

En este caso $\quad x = 0 \quad , \quad t = 0 \quad , \quad \xi = 0$

$$0 = \xi_0 \operatorname{sen}[K(0) + w(0) + \alpha] \quad , \quad \alpha = 0$$

Luego: $\xi(x,t) = \xi_0 \operatorname{sen}(Kx + wt)$

$$\xi(x,t) = 0{,}2\operatorname{sen}\left(\tfrac{2\pi}{3}x + 2\pi(5)t\right)$$

$$\xi(x,t) = 0{,}2\operatorname{sen}\left(\tfrac{2\pi}{3}x + 10\pi t\right)$$

b) Además: $\upsilon = \frac{w}{K} = \frac{10\pi}{2\pi/3} = 15\frac{m}{s}$

(02) Dada la ecuación $\xi(x,t) = 3\operatorname{sen}\pi(0{,}1x + 2t)$ donde x está en metros y t en seg. Hallar (a) La longitud de onda (b) La frecuencia (c) el período (d) La velocidad de propagación (e) La amplitud (f) La dirección de propagación (g) Escribir la ecuación de una onda que sea idéntica y que se propague en sentido opuesto.

Solución:

a) De la teoría: $\quad \xi = \xi_0 \operatorname{sen}(Kx + wt) \qquad \xi = 3\operatorname{sen}(0{,}1\,\pi x + 2\,\pi \tau)$

por comparación: $\quad 0{,}1\pi = K = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \lambda = 20m$

b) $w = 2\pi\ rad/s$ $\qquad$ c) $w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \qquad T = 1s.$

d) $\upsilon = \frac{w}{K} = \frac{2\pi}{0{,}1\pi} = 20m/s$ $\qquad$ e) $\xi_0 = 3$

f) El eje $(-x)$ $\qquad$ g) $\xi(x,t) = 3\operatorname{sen}\pi(0{,}1x - 2t)$

(03) Dada la ecuación de la onda en una cuerda $\xi = 0{,}02\operatorname{sen}(5x - 3t)$, donde ξ, x en metros, t en segundos, hallar (a) El desplazamiento o perturbación, para $t=0$, cuando $x = 0{,}1m$; $0{,}2m$; $0{,}3m$. (b) Para $x = 0{,}15m$. Cuál es la perturbación para $t=0$; $0{,}1s$ y $0{,}2s$ (c) Cuál es la velocidad máxima de oscilación (d) Cuál es la velocidad de propagación de la onda.

Solución:

a) $t=0 \quad , \quad x = 0{,}1m$

$$\xi = 0{,}02\operatorname{sen}[5(0{,}1) - 3(0)]$$

$$\xi = 0{,}02\operatorname{sen}0{,}5$$

$$\xi = 0{,}02\operatorname{sen}(28{,}66°) = 0{,}009m$$

$2\pi\,rad$ ——— $360°$

$0{,}5\,rad$ ——— θ

$\theta = 28{,}66°$

$t = 0s \quad , \quad x = 0{,}2m$

$$\xi = 0{,}02\operatorname{sen}[5(0{,}2) - 3(0)] = 0{,}02\operatorname{sen}1$$

$$\xi = 0{,}02\operatorname{sen}\tfrac{360}{2\pi} = 0{,}017m$$

$t = 0s \quad , \quad x = 0{,}3\,m$

$$\xi = 0{,}02\operatorname{sen}[5(0{,}3) - 3(0)] = 0{,}02\operatorname{sen}1{,}5$$

$$\xi = 0{,}0199\ m.$$

b) $x = 0{,}15\,m \quad , \quad t = 0\,s$

$$\xi(0{,}15\,,0) = 0{,}02\operatorname{sen}[5(0{,}15) - 3(0)]$$

$$\xi(0{,}15\,,0) = 0{,}02\operatorname{sen}0{,}75 = 0{,}014\,m$$

$x = 0{,}15\,m \quad , \quad t = 0{,}1s.$

$$\xi(0{,}15\,,0{,}1) = 0{,}02\operatorname{sen}[5(0{,}15) - 3(0{,}1)] = 0{,}009\,m$$

$x = 0{,}15\,m \quad , \quad t = 0{,}2s$

$$\xi(0{,}15\,,0{,}2) = 0{,}02\operatorname{sen}[5(0{,}15) - 3(0{,}2)] = 0{,}029\,m$$

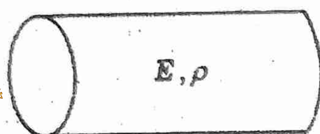
c) $\upsilon_{osc} = \frac{d\xi}{dt} = 0{,}02(-3)\cos(5x - 3t)$

$\upsilon_{osc(max)} = +0{,}02(-0{,}3) = -0{,}06\frac{m}{s}$

d) $\upsilon = \frac{w}{K} = \frac{3}{5} = 0{,}6m/s$

(04) Una barra de acero transmite ondas longitudinales por medio de un oscilador acoplado a uno de sus extremos. La barra tiene un diámetro de $5mm$. La amplitud de las oscilaciones es $0,2mm$ y la frecuencia es de 20 oscilaciones por segundo, hallar (a) La ecuación de las ondas que se propagan a lo largo de la barra. (b) La energía por unidad de volumen (c) El promedio de flujo de energía por unidad de tiempo a través de una sección cualquiera de la barra (d) La potencia requerida para operar el oscilador.

Solución:



a) $\xi_0 = 2 \times 10^{-4}\, m$

$f = 20\, c/s$

$w = 2\pi f = 40\pi \frac{rad}{seg}$

Sabemos: $\upsilon = \sqrt{E/\rho} = \sqrt{\dfrac{2 \times 10^4\ N/m^2}{7,8 \times 10^3\ Kg/m^3}} = 5060\, m/s$

$K\upsilon = w \quad , \quad K = \frac{w}{\upsilon} = \frac{40\pi}{5060}\, m^{-1}$

$K = 3,95 \times 10^{-3}\, m^{-1}$

Luego: $\xi(x,t) = \xi_0 \operatorname{sen}(Kx - wt)$

$\xi(x,t) = 2 \times 10^{-4} \operatorname{sen}\,[3,95 \times 10^{-3} \times 2\pi x - 40\pi t]$

b) $IE = \frac{1}{2}\rho w^2 \xi_0^2 =$

$= \frac{1}{2}(7,8 \times 10^3)(40\pi)^2(2 \times 10^{-4})^2 = 0,2$

$= 0,25\pi^2\, J/m^3$

c) $\bar{P} = \upsilon A\, IE = 5060\,[\pi(2,5 \times 10^{-3})^2] \times 0,25\,\pi^2$

$\bar{P} = 7,9\pi^3 \times 10^{-3} w$

d) $\bar{P} = 7,9\,(3,14)^3 \times 10^{-3} \quad w = 244 \times 10^{-3}\, w$

$\bar{P} = 244\, mw$

(05) Un resorte que tiene una longitud normal de 0,5m y una masa de 0,5kg se estira 5cm, cuando se le aplica una fuerza de 10N. Hallar la velocidad de propagación de las ondas longitudinales a lo largo del resorte.

Solución:

Por teoría se sabe la expresión de la velocidad para ondas longitudinales.

$$\upsilon = \sqrt{\frac{KL}{\mu}} = \sqrt{\left(\frac{F}{\Delta L}\right)\frac{L}{\mu}}$$

Reemplazando valores: $\upsilon = \sqrt{\frac{10}{5\times 10^{-2}}\left(\frac{0,5}{1}\right)} = 10\,m/s$

donde: $\mu = \frac{m}{L} = \frac{0,5\,Kg}{0,5\,m} = 1\frac{Kg}{m}$

(06) Como varía la velocidad de propagación de una onda transversal a lo largo de una cuerda si la tensión (a) Se duplica, (b) se reduce a la mitad. ¿En cuánto debe reducirse la tensión de la cuerda? (c) Para triplicar la velocidad, (d) para reducir a la tercera parte la velocidad de propagación.

Solución:

a) $\upsilon_2 = \sqrt{2\left(\frac{T}{\mu}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{2}\upsilon_1$ donde $\upsilon_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

b) $\upsilon_2 = \sqrt{\frac{T}{2\mu}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{\upsilon_1}{\sqrt{2}}$

c) Si $\upsilon = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, $T = \mu\upsilon^2$, $3\upsilon = \sqrt{\frac{T'}{\mu}}$, $9\upsilon^2 = \frac{T'}{\mu}$

$T' = 9\upsilon^2\mu = 9T$ (aumenta)

d) $\frac{\upsilon}{3} = \sqrt{\frac{T''}{\mu}}$, $\frac{\upsilon^2}{9} = \frac{T''}{\mu}$

$T'' = \frac{\mu\upsilon^2}{9} = \frac{T}{9}$ (se reduce)

(07) Un alambre de acero de diámetro 0,1mm está sujeto a una tensión de 100N. Hallar la velocidad de propagación de las ondas transversales a lo largo del alambre.

Solución:

Podemos hallar G en una tabla para el acero.

$$G = 0{,}8 \times 10^{11}\ N/m^2 \quad y \quad \rho = 7{,}8 \times 10^3\ kg/m^3$$

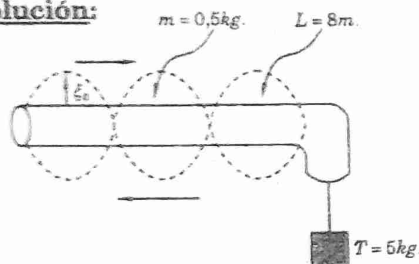
Se sabe por teoría: $\upsilon = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

donde: G : módulo de torsión y ρ : densidad del material.

$$\upsilon = \sqrt{\frac{0{,}8 \times 10^{11}}{7{,}8 \times 10^3}} = 3202{,}6\ \frac{m}{s}$$

(08) Un extremo de un tubo de goma está fijo a un soporte, el otro extremo pasa por una polea situada $8m$. del extremo fijo y sostiene una carga de $5kg$. La masa del tubo entre el extremo fijo y la polea es $0{,}5kg$. hallar (a) La velocidad de propagación de las ondas transversales a lo largo del tubo. Una onda armónica de amplitud $0{,}2cm$. y longitud de onda $0{,}5m$ se propaga a lo largo del tubo, (b) hallar la velocidad transversal máxima de cualquier punto del tubo. (c) Escribir la ecuación de la onda (d) Hallar el promedio de la rapidez con que fluye energía a través de cualquier sección transversal del tubo.

Solución:



$$\xi_0 = 2 \times 10^{-3}\, m$$

$$\lambda = 0{,}5\, m$$

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0{,}5}{8} = 0{,}0625\ kg/m$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \times 3{,}14}{0{,}5} = 12{,}56\ m^{-1}$$

a) $\upsilon_r = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{5 \times 9{,}8}{0{,}0625}} = 28\ \frac{m}{s}$

b) $\upsilon_{osc} = \frac{d\xi}{\partial t} = \xi_0(-w)\cos(Kx - wt)$

$\upsilon_{osc}(\max) = \xi_0\, w = (2 \times 10^{-3})(35{,}7) \qquad \upsilon_{osc}(\max) = 0{,}703\, m/s$

donde: $w = K\upsilon = \frac{2\pi}{\lambda}\upsilon = \frac{2 \times 3{,}14}{0{,}5} \times 28 = 351{,}7\, rad/s$

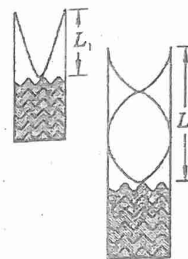
c) $\xi = \xi_0$ sen $(Kx - wt)$

$\xi = 2 \times 10^{-3}$ sen $[12{,}56x - 351{,}7\, t]$

d) $\bar{P} = \frac{1}{2}\xi_0^2\, \upsilon\mu w^2 = \frac{1}{2}(2 \times 10^{-3})^2(28)(0{,}0625)(351{,}7)^2 \quad ; \quad \bar{P} = 0{,}43w$

(09) El nivel del agua en un tubo de vidrio vertical de $1{,}5m$ se puede ajustar a una posición cualquiera en el tubo. Exactamente sobre el extremo abierto del tubo se coloca un diapasón cuya frecuencia es de $500vib/s$ ¿En qué posiciones del nivel del agua habrá resonancia?.

Solución:



Se sabe por teoría que las longitudes para producir resonancia son:

$$L_1 = \frac{\lambda}{4} \quad , \quad L_2 = \frac{3\lambda}{4} \quad , \quad L_3 = \frac{5\lambda}{4}$$

$$L_4 = \frac{7\lambda}{4} \quad , \quad L_5 = \frac{9\lambda}{4}$$

Como: $\upsilon = \lambda f \quad , \quad \lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{340}{500} = 0{,}68\, m.$

Luego: $L_1 = \frac{0{,}68}{4} = 0{,}17\, m. \quad , \quad L_2 = 3 \times 0{,}17 = 0{,}51m \quad , \quad L_3 = 5 \times 0{,}17 = 0{,}85m$

$L_4 = 7 \times 0{,}17 = 1{,}19\, m \quad , \quad L_5 = 9 \times 0{,}17 = 1{,}53\, m$

(10) Si $\xi_1(x,t)$ y $\xi_2(x,t)$ son soluciones de la ecuación diferencial de la onda, demostrar que: $\xi_1(x,t) + \xi_2(x,t)$ es también solución.

Solución:

Sean $\xi_1(x,t)$ y $\xi_2(x,t)$ soluciones de la ecuación de onda y por lo tanto satisface:

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Veamos si $\xi = \xi_1 + \xi_2$ satisface la ecuación dif. de la onda:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\xi_1 + \xi_2) = \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial \xi_2}{\partial t}$$

Hallando la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial \xi_2}{\partial t}\right] \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial t^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} + \upsilon^2 \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} =$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \upsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\xi_1 + \xi_2)$$

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi$, luego:

$\xi = \xi_1 + \xi_2$ también es solución.

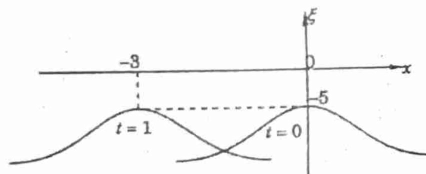
(11) Dado el perfil de una perturbación: $\xi(x,0) = \frac{5}{7x^2 - 1}$

(a) Hallar una expresión para la onda progresiva correspondiente que se mueve con una velocidad de $3m/s$ en la dirección $(-x)$ (b) Hacer un gráfico del perfil para $t = 0$ y para $t = 1s$.

Solución:

a) Como: $\xi(x,0) = \frac{5}{7x^2 - 1}$

Luego: $\xi(x,t) = \frac{5}{7(x + 3t)^2 - 1}$



b) El perfil para $t = 0$ y $t = 1$

(12) a) Demostrar que la perturbación $\xi(y,t) = Be^{-(5y-2t)^3}$ es una onda viajera (b) Satisface la ecuación diferencial del movimiento ondulatorio, donde y en metros y t en segundos.

Solución:

a) La expresión dada $\xi(y,t)$ se puede expresar de otra forma:

$$\xi(y,t) = Be^{-125\left(y - \frac{2}{5}t\right)^3}$$

la cual representa una onda que se mueve en la dirección positiva de y, y viaja a una velocidad $\upsilon = 2/5\ m/s$.

b) Para saber si satisface la ecuación diferencial de la onda, hay que hallar la segunda derivada de ξ con respecto a "y" y a "t" y hallar el valor de υ.

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = Be^{-(5y-2t)^3}(-3)(5y-2t)^2(5)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -15B(5y-2t)^2 e^{-(5y-2t)^3}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -15B[2(5y-2t)(5)e^{-(5y-2t)^3} + 225B(5y-2t)^4 e^{-(5y-2t)^3}] \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = Be^{-(5y-2t)^3}(-3)(5y-2t)^2(-2)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = 6B(5y-2t)^2 e^{-(5y-2t)^3}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 6B[2(5y-2t)(-2)e^{-(5y-2t)^3} + (5y-2t)^2 e^{-(5y-2t)^2}(-3)(5y-2t)^2(-2)]$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -24B(5y-2t)e^{-(5y-2t)^3} + 36B(5y-2t)^4 e^{-(5y-2t)^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

De (1): $\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -150B(5y-2t)e^{-(5y-2t)^3} + 225B(5y-2t)^4 e^{-(5y-2t)^3}$ ...... (3)

Como la ecuación de ondas es: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ .... (4)

Reemplazando (2) y (3) en (4):

$$-150B(5y-2t)e^{-(5y-2t)^3} + 225B(5y-2t)^4 e^{-(5y-2t)^3} =$$

$$\frac{1}{\upsilon^2}[-24B(5y-2t)e^{-(5y-2t)^3} + 36B(5y-2t)^4 e^{-(5y-2t)^3}]$$

Igualando sumandos $-150B(5y-2t)e^{-(5y-2t)^3} = \frac{1}{\upsilon^2}[-24B(5y-2t)e^{-(5y-2t)^3}]$

$$-150B = -\frac{24B}{\upsilon^2} \quad , \quad \upsilon = 2/5\ m/s$$

$$225B(5y-2t)^4 e-(5y-2t)^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}[36B(5y-2t)^4 e-(5y-2t)^3]$$

$$225B = \frac{1}{\sqrt{2}}36B \quad , \quad \upsilon = \frac{2}{5}\ m/s.$$

Luego la ecuación diferencial de la onda es satisfecha para: $\upsilon = 2/5\ m/s$.

(13) Hallar una expresión para el perfil ($t=0$) que se mueve en la dirección $+x$ tal que para $x=0$; $\xi=10$; para $x=\frac{\lambda}{6}$; $\xi=20$; y para $x=\frac{5}{12}\lambda$, $\xi=0$.

Solución:

Asumiendo que la onda posee una fase inicial α, $\xi(x,t)=\xi_0$ sen$(Kx-wt+\alpha)$

para $t=0$ $\xi(x,0)=\xi_0$ sen$(Kx-0+\alpha)$

$\xi(x,0)=\xi_0$ sen$(Kx+\alpha)$ .... (1)

Por la condición $x=0$, $\xi=10$; en (1)

$\xi(0,0)=\xi_0$ sen$(0+\alpha)=10$

ξ_0 sen $\alpha=10$ .... (2)

Por la condición: $x=\frac{\lambda}{6}$, $\xi=20$

$$\xi\left(\tfrac{\lambda}{6},0\right)=\xi_0\,\text{sen}\left(\tfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\tfrac{\lambda}{6}+\alpha\right)=20$$

$\xi_0\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=20$ .... (3)

Por la condición: $x=\frac{5}{12}\lambda$, $\xi=0$; en (1)

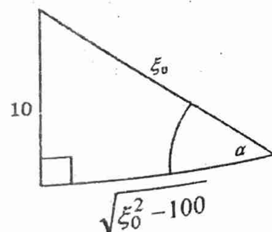
$$\xi\left(\tfrac{5}{12}\lambda,0\right)=\xi_0\,\text{sen}\left(\tfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\tfrac{5\lambda}{12}+\alpha\right)=0$$

$\xi_0\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}+\alpha\right)=0$ .... (4)

De (3) desarrollando: $\xi_0\left[\text{sen}\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\cos 60\,\text{sen}\,\alpha\right]=20$ .... (5)

De (2): sen α $10/\xi_0$

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{\xi_0^2-100}}{\xi_0}$$



reemplazando sen α y cos α en (5):

$$\xi_0\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{\xi_0^2-100}}{\xi_0}+\frac{1}{2}\times\frac{10}{\xi_0}\right]=20$$

$$\sqrt{3}\sqrt{\xi_0^2-100}+10=40$$

$$\xi_0=20$$

Luego: $\text{sen}\,\alpha=\frac{10}{\xi_0}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$ $\alpha=\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ $\xi(x,0)=20\,\text{sen}\left(Kx+\frac{\pi}{6}\right)$

(14) Cuál es la magnitud de la función de onda : $\xi(x,t)=A\cos(Kx-wt+\pi)$ para $x=0$ cuando $t=0$, $t=T/4$, $t=T/2$, $t=3\,T/4$, $t=T$.

Solución:

Para $x=0$, $t=0$ $\xi(0,0)=A\cos(0-0+\pi)=-A$

Para $x=0$, $t=T/4$ $\xi\left(0,\frac{T}{4}\right)=A\cos\left(0-\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4}+\pi\right)=A\cos\frac{\pi}{2}=0$

Para $x=0$, $t=T/2$ $\xi\left(0,\frac{T}{2}\right)=A\cos\left(0-\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}+\pi\right)=A\cos 0=A$

Para $x=0$, $t=3T/4$ $\xi\left(0,\frac{3T}{4}\right)=A\cos\left(0-\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4}+\pi\right)=A\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$

Para $x=0$, $t=T$ $\xi(0,T)=A\cos\left(0-\frac{2\pi}{T}\cdot T+\pi\right)=A\cos(-\pi)=-A$

(15) Dadas las ondas viajeras:

$$\xi_1(y,t)=B\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{y}{\lambda}-\alpha\right)\quad,\quad \xi_2=(z,t)=C\cos\pi 10^{15}\left(t-\frac{z}{v}+\alpha\right)$$

hallar la dirección del movimiento de las ondas, examinando la fase.

Solución:

Dado: $\xi_1(y,t)=B\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{y}{\lambda}-\alpha\right)$, $\xi_1(y,t)=B\cos 2\pi\left(\frac{y}{\lambda}+\frac{t}{T}-\alpha\right)$

El signo de $\frac{t}{T}$ es positivo, luego se mueve en la dirección $(-y)$.

$\xi_2(y,t)=C\cos\pi 10^{15}\left(t-\frac{z}{v}+\alpha\right)$ $\xi_2(y,t)=C\cos\pi 10^{15}(-1)\left(\frac{z}{v}-t-\alpha\right)$

pero $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\xi_2(y,t)=C\cos\pi 10^{15}\left(\frac{z}{v}-t-\alpha\right)$

El signo de $(-t)$ es negativo luego se mueve en la dirección $(+z)$.

(16) La función: $\xi(x,t) = A(x+Bt+D)^2 + Ae^{(Cx^2+B^2ct^2-2BCxt)}$ es una solución de la ecuación diferencial de una onda unidimensional. A, B, C, y D son constantes. ¿Cuál es la velocidad de la onda si $\xi(x,t)$ es una función de onda?.

Solución:

La función dada se puede expresar como la suma de dos funciones.

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t)$$

donde $\xi_1(x,t) = A(x+Bt+D)^2$; $\xi_2(x,t) = A\,e^{(cx^2+B^2ct^2-2BCxt)}$ pero la función de onda $\xi_1(x,t)$, se propaga con una velocidad $\upsilon = B$ y la función de onda $\xi_2(x,t)$ se propaga con una velocidad: $\xi_2(x,t) = Ae^{C(x-Bt)^2}$

$$\upsilon = -B$$

Luego $\xi = \xi_1 + \xi_2$ es una onda viajera, porque tiene dos velocidades diferentes.

(17) Se da una perturbación armónica de amplitud 10 unidades que se describe por la función $\xi(x,t)$ tal que $\xi(0,0) = 0$. Si la onda tiene una frecuencia angular de $\pi/2$ y se mueve con una velocidad de $10m/s$. Hallar su magnitud para $t = 3s$. en el punto $20m$. a partir del origen.

Solución:

Sea $\xi(x,t) = \xi_0$ sen $(Kx - wt + \alpha)$

$\xi(0,0) = \xi_0$ sen $(0 - 0 + \alpha) = 0$, sen $\alpha = 0$, $\alpha = 0$, π , 2π

para $\alpha = \pi$

Luego: $\xi(20,3) = 10\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{20}\cdot 20 - \frac{\pi 3}{2} + \pi\right)$

$\xi(20,3) = 10\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10$

$\xi(20,3) = 10$

Se usó: $w = \pi/2\ s^{-1}$, $\upsilon = 10\ m/s$, $K = \frac{w}{\upsilon} = \frac{\pi}{20} m^{-1}$

(18) Se toma una foto de una onda para $t = 0$, cuya configuración muestra que tiene la forma matemática $\xi(x,0) = 5\,\text{sen}\frac{\pi x}{25}$. Si la onda se mueve en la dirección negativa del eje x a la velocidad de $2m/s$. Hallar una expresión para la perturbación $t = 4s$.

Solución:

Se tiene: $\xi(x,0) = 5\,\text{sen}\frac{\pi x}{25}$

Suponiendo que la perturbación de la forma: $\xi(x,t) = \xi_0$ sen$(Kx + wt)$

se conoce $\upsilon = 2m/s$. $K = \frac{\pi}{25}$, $w = K\upsilon = \frac{\pi}{25}x2 = \frac{2\pi}{25}$

$\xi(x,4) = 5\,\text{sen}\left[\frac{\pi x}{25} + \frac{2\pi}{25}(4)\right]$

$\xi(x,4) = 5\,\text{sen}\,\frac{\pi}{25}(x+8)$

(19) Se tiene una onda de la forma $\xi(x,t) = 100\text{sen}(2\pi x - 4\pi t)$, supóngase que $x_1 = B$, $\xi(B,T) = C$, Hallar el valor de $\xi(D,T)$ para $x_2 = D$; siempre que D y B sean números enteros ¿Cuál es el valor de $\xi(D, T + 1)$?.

Solución:

De la expresión: $\xi(x,t) = 100$ sen $(2\pi x - 4\pi t)$

donde: $2\pi = K$, $2\pi = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\lambda = 1m$

$4\pi = w$, $4\pi = \frac{2\pi}{T}$, $T = \frac{1}{2}s$

Hallando: $\xi(B,T) = 100\,\text{sen}(2\pi B - 4\pi T) = C$

$\xi\left(B,\frac{1}{2}\right) = 100\,\text{sen}\left(2\pi B - \frac{4\pi}{2}\right) = C$

$100[\text{sen}\,2\pi\ B\cos 2\pi - \cos 2\pi\ B\,\text{sen}\,2\pi] = C$

$\xi\left(B,\frac{1}{2}\right) = 10\,\text{sen}\,2\pi\,B = C$

B es un número entero:

Hallemos: $\xi(D,T)=\xi\left(D,\frac{1}{2}\right)=100\,\text{sen}\left(2\pi D-\frac{4\pi}{2}\right)$

$$\xi(D,T)=100\,\text{sen}\,2\pi D$$

$$\xi(D,T+1)=\xi\left(D,\tfrac{1}{2}+1\right)=\xi\left(D,\tfrac{3}{2}\right)$$

$$\xi(D,T+1)=100\,\text{sen}(2\pi D-6\pi)$$

$$\xi(D,T+1)=100[\text{sen}\,2\pi D\cos 6\pi-\cos 2\pi D\,\text{sen}\,6\pi]$$

$\xi(D,T+1)=100\,\text{sen}\,2\pi D$ $\qquad D$ es un número entero.

Como : $\xi\left(B,\frac{1}{2}\right)=100\,\text{sen}\,2\pi B=C$ y $\xi(D,T)=C$

Además : $\xi(D,T+1)=100$ sen $2\pi D$

Como : $\xi(D,T)=C$

Luego : $\xi(D,T+1)=C$

(20) Dada una onda sinusoidal $E(x,t)$ de amplitud $20v/m$. Si $E(0,0)=-20v/m$. Cuál es la fase inicial de la onda.

Solución:

Sea la función: $E(x,t)=E_0$ sen $(Kx-wt+\alpha)$

$$E(0,0)=E_0\,\text{sen}\,(0-0+\alpha)=-20$$

20 sen $\alpha=-20$, sen $\alpha=-1$

$$\alpha=3\pi/2$$

$$\therefore\ E(x,t)=20\,\text{sen}\left(Kx-wt+\tfrac{3\pi}{2}\right)$$

(21) Para $t=0$ una onda sinusoidal tiene su máximo valor para $x=0$ ¿Cuál es su fase inicial?.

Solución:

Sea la función: $\xi(x,t)=\xi_0$ sen $(Kx-wt+\alpha)$

$$\xi(0,0)=\xi_0\,\text{sen}\,(0-0+\alpha)=\xi_0$$

ξ_0 sen $\alpha=\xi_0$, sen $\alpha=1$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$

Luego: $\xi(x,t)=\xi_0\,\text{sen}\left(Kx-wt+\frac{\pi}{2}\right)$

(22) Dos ondas dan lugar a variaciones de presión en cierto punto del espacio dado por:

$$p_1=P_0\text{ sen }2\pi ft\quad\text{y}\quad p_2=P_0\text{ sen }2\pi(ft+\alpha).$$

¿Cuál será la amplitud de la onda resultante en este punto cuando $\alpha=0$, $1/4$, $1/6$, $1/8$?

Solución:

Sea: $p_1=p_0$ sen wt y $p_2=p_0$ sen $(wt+2\pi\alpha)$

La superposición: $p=p_1+p_2$

$$p=p_0\,[\text{sen}\,wt+\text{sen}\,(wt+2\pi\alpha)]$$

a) $\alpha=0$

$$p=p_0\,[\text{sen}\,wt+\text{sen}(wt+0)]$$

$$\xi_0=\sqrt{p_0^2+p_0^2+2p_0^2\cos\delta}$$

y $\delta=2\pi\alpha=0$

$$\xi_0=\sqrt{2p_0^2+2p_0^2}=2p_0$$

b) $\alpha=\frac{1}{4}$

$$\xi_0=\sqrt{p_0^2+p_0^2+2p_0^2\cos 2\pi\left(\tfrac{1}{4}\right)}$$

$$\xi_0=\sqrt{2}\,p_0$$

c) $\alpha=\frac{1}{6}$

$$\xi_0=\sqrt{p_0^2+p_0^2\cos 2\pi\left(\tfrac{1}{6}\right)}$$

$$\xi_0=p_0\sqrt{2(1+\cos 60°)}=p_0\sqrt{3}$$

d) $\alpha=\frac{1}{8}$

$$\xi_0=\sqrt{p_0^2+p_0^2+2p_0\cos\tfrac{2\pi}{8}}$$

$$\xi_0=p_0\sqrt{2+\sqrt{2}}=1{,}85\,p_0$$

(23) Una onda sonora armónica plana en el aire a 20°C y presión normal, tiene una frecuencia de $500Hz$. y una amplitud de $10^{-8}m$. (a) Dar la expresión que describe la onda de desplazamiento. (b) Dar la expresión que describe la onda de presión (c) Dar el nivel de intensidad de esta onda en dB.

Solución:

Se conoce: $f = 500\ Hz.$ $\xi_0 = 10^{-8}\ m.$ $w = 2\pi f = 1000\ \pi s^{-1}$

$\upsilon = 340 = \lambda f$ $\lambda = 340/500 = 0{,}68\ m$

a) $\xi(x,t) = \xi_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - wt\right)$

$\xi(x,t) = 10^{-8}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}68}x - 1000\pi t\right)$

$\xi(x,t) = 10^{-8}\operatorname{sen}(9{,}24x - 3140t)$

b) Sea: $p(x,t) = p_0 \operatorname{sen}(Kx - wt)$

$p(x,t) = 2\pi \rho_0\, \upsilon f\, \xi_0 \operatorname{sen}(Kx - wt)$

Se usa la relación: $p_0 = 2\pi \rho_0\, \upsilon f\, \xi_0$ reemplazando valores:

$p_0 = 2 \times 3{,}14 \times 1{,}293 \times 340 \times 500 \times 10^{-8}$

$p_0 = 0{,}0138\ N/m^2$

$p(x,t) = 0{,}0138\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{0{,}68}x - 1000\pi t\right)$

c) Sea: $I = p_0^2/2\upsilon\rho_0$

$I = (0{,}0138)^2/2 \times 340 \times 1{,}293$

$I = 2{,}16 \times 10^{-7}\ W/m^2$

$B = 10\log\left(\frac{2{,}16 \times 10^{-7}}{10^{-12}}\right)$

$B = 53{,}3dB$

(24) El sonido más claro que puede oírse tiene una amplitud de presión de cerca de $2 \times 10^{-5}\ N/m^2$ y el más alto que puede oírse sin dolor tiene una amplitud de presión de $28\ N/m^2$. Hallar en cada caso, la intensidad del sonido en W/m^2 y en db y la amplitud de las oscilaciones si la frecuencia es $500Hz$. Suponer que la densidad del aire es $1{,}29kg/m^3$ y que la velocidad del sonido es $345m/s$.

Solución:

Sea: $p_0 = 2 \times 10^{-5}\ N/m^2$, $p_f = 28\ N/m^2$, $\upsilon = 345m/s$, la intensidad :

$I = p_0^2/2\upsilon\rho_0 = (2 \times 10^{-5})^2/2 \times 345 \times 1{,}293$

$I = 4{,}5 \times 10^{-3}\ W/m^2$

En decibeles: $I = 10\log\left(\frac{4{,}5 \times 10^{-13}}{10^{-12}}\right) = -3{,}47db$

Para: $p_f = 28N/m^2$ $I = (28)^2/2 \times 3{,}45 \times 1{,}293 = 0{,}88w/m^2$

En decibeles: $I = 10\log(0{,}88/10^{-12}) = 119{,}4db$

Para: $\xi_0 = p_0/2\pi\rho_0\upsilon f$ $\xi_0 = (28)/2 \times 3{,}14 \times 1{,}293 \times 345 \times 500$

$\xi_0 = 1{,}99 \times 10^{-5}m$

(25) Los niveles de intensidad de dos ondas sonoras difieren en (a) $10db$, (b) $20db$. Hallar el cociente entre sus intensidades y entre sus amplitudes de presión .

Solución:

a) Sea la condición del problema: $B_1 - B_2 = 10$; $10\log(I_1/I_2) = 10$; $I_1/I_2 = 10$

$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\sqrt{I_1\, 2\rho_0\, \upsilon}}{\sqrt{I_2\, 2\rho_0\, \upsilon}} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = \sqrt{10}$

$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{10}$

b) $B_1 - B_2 = 20$; $10\log(I_1/I_2) = 20$; $I_1/I_2 = 100$

$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\sqrt{2\rho_0\, \upsilon I_1}}{\sqrt{2\rho_0\, \upsilon I_2}} = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = \sqrt{100} = 10$

$\frac{p_1}{p_2} = 10$

(26) (a) ¿En cuánto varia la intensidad de una onda sonora cuando se duplica la amplitud de presión?

(b) ¿En cuánto deberá cambiar la amplitud de presión para que la intensidad fuera 10 veces mayor?.

Solución:

a) Sabemos: $I_1 = p_1^2/2\upsilon\rho_0$

$I_2 = (2p_1)^2/2\upsilon\rho_0 = 4(p_1^2/2\upsilon\rho_0)$

$I_2 = 4I_1$

b) Sabemos: $P = \sqrt{2\upsilon\rho_0 I}$, $P_1 = \sqrt{2\upsilon\rho_0 I_1}$

$P_2 = \sqrt{2\upsilon\rho_0(10I_1)} = \sqrt{10}\sqrt{2\upsilon\rho_0 I_1}$

$P_2 = \sqrt{10}\,P_1$

(27) Expresar en db la diferencia en los niveles de intensidad de dos ondas sonoras, si (a) la intensidad de una de las ondas es dos veces la intensidad de la otra (b) la amplitud de presión de una es el doble de la otra.

Solución:

a) Por condición: $I_2 = 2I_1$

$B_2 - B_1 = 10\log\frac{I_2}{I_0} - 10\log\frac{I_1}{I_0}$

$B_2 - B_1 = 10\log(I_2/I_1)$

$B_2 - B_1 = 10\log(2I_1/I_1) = 10\log_2$

$B_2 - B_1 = 3db$

b) $P_2 = 2P_1$

$\sqrt{I_2 2\upsilon\rho_0} = 2\sqrt{I_1 2\upsilon\rho_0}$

$\frac{I_2}{I_1} = 4$

Luego: $B_2 - B_1 = 10\log(I_2/I_1)$

$B_2 - B_1 = 10\log 4 = 6{,}0db$

HIDROSTÁTICA

(01) Un bailarín que pesa $60kg$. está apoyado en la punta de su pie, que tiene un área de $20{,}0\ cm^2$, hallar la presión que ejerce sobre el suelo la punta del pie.

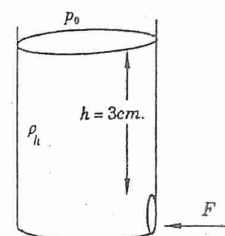
Solución:

Por definición:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{60\times 9{,}8N}{20\times 10^{-4}\ m^2} = 2{,}94\times 10^5\ N/m^2$$

(02) Un recipiente abierto, tiene un agujero de $2cm^2$, situado a $3cm$ por debajo de la superficie libre de kerosene. Hallar la fuerza que debe aplicarse para evitar que el líquido salga ($\rho_k = 0{,}8\ g/cm^3$).

Solución:



Por teoría $F = \int p\,ds$

$F = p\int ds = ps$

donde: $p = p_0 + \rho_k\,g\,h$

$p = 1{,}013\times 10^5\frac{N}{m^2} + 0{,}8\times 10^3\times 9{,}8\times 3\frac{N}{m^2}$

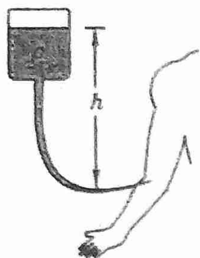
$p = 1{,}248\times 10^5\frac{N}{m^2}$

Luego: $F = (1{,}248\times 10^5)(2\times 10^{-4})\ N$

$F = 24{,}96\ N$

(03) El brazo de un paciente está situado a $1m$. por debajo de un recipiente que contiene sangre para su transfusión. (a) Cuál es la presión de la sangre, cuando ingresa a la vena. (b) Si la presión de la sangre en la vena es de $60mm.\ Hg$. Cuál es la altura mínima a que debe estar el recipiente para que la sangre fluya en la vena. (no considere la viscosidad de la sangre) (c) Si un astronauta necesita una transfusión de sangre en la luna. A qué altura mínima tendrá que mantenerse el recipiente sobre el brazo para la presión de la pregunta (b), considere la gravedad de la luna $g/6$.

Solución:



a) Sabemos que:

$1atm = 1{,}013 \times 10^5 \frac{N}{m^2}$ —— 760 *mm Hg.*

Por teoría:

$p = \rho_s g h$

$p = 1{,}05 \times 10^3 (9{,}8)(1) = 10{,}29 \times 10^3\ N/m^2$

Luego: $1{,}013 \times 10^5 \frac{N}{m^2}$ —— 760 mm *Hg*

$10{,}29 \times 10^5 \frac{N}{m^2}$ —— $p =$ 77,2 *mm Hg*

b) En este caso:

$1{,}013 \times 10^5 \frac{N}{m^2}$ —— 760 *mm Hg*

p —— 60 *mm Hg*

$p = 7997{,}4\ N/m^2$

Su equivalente en altura será: $p = \rho g h_{min} = 7997{,}4\ N/m^2$

$h = \frac{7997{,}4}{1{,}05 \times 10^3 \times 9{,}8}\ m = 0{,}77\ m$

c) En este caso: $g/6$ es la gravedad de la luna:

$p = 7997{,}4 = \rho_s \left(\frac{g}{6}\right) h_{min}$

$h_{min} = \frac{7997{,}4}{1{,}05 \times 10^3 \times (9{,}8/6)} m = 4{,}67\,m$

(04) Una persona sube en un ascensor una altura de $50m$. sobre el nivel del mar. Hallar (a) la variación de la presión del aire al subir (b) La fuerza neta sobre el tímpano de área $0{,}5cm^2$.

Solución:

a) Por teoría sabemos la presión de una altura h es: $p = p_0\, e^{-\alpha h}$, como piden la variación de presión:

$\Delta p = p_0 - p = p_0 - p_0\, e^{-\alpha h}$

$\Delta p = p_0 (1 - e^{-\alpha h}) =$

$\Delta p = 1atm\,(1 - e^{-\frac{0{,}116 \times 50}{1000}})$

$\Delta p = 5{,}78 \times 10^{-3}\,atm = 5{,}78 \times 10^{-3} \times 1{,}013 \times 10^5 \frac{N}{m^2}$

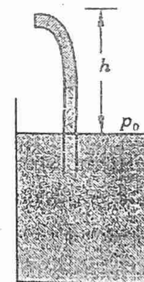
$\Delta p = 585{,}8\,N/m^2$

b) $F = \Delta p A = 585{,}8 \frac{N}{m^2} \times 0{,}5 \times 10^{-4} m^2$

$F = 0{,}03N$

(05) Una persona aspira y la presión del mamométrica en los pulmones es de $-10 mm\ hg$. (a) Cuál es la altura máxima que puede ser sorbida el agua en un sorbete. (b) Cuál es la altura máxima que puede ser sorbida si el líquido es alcohol ($\rho = 0{,}8\ g/cm^3$).

Solución:



a) $p_m = -10\ mm\ Hg$

$p + \rho g h = p_0$

$p - p_0 = -\rho g h$

$p_m = -\rho g h$

Convirtiendo los $mm\ Hg$ a N/m^2 :

$p_m = -\frac{10 \times 1{,}013 \times 10^5}{760} = -1332{,}9 \frac{N}{m^2}$

760 *mm Hg* —— $1{,}013 \times 10^5 \frac{N}{m^2}$

10 *mm Hg* —— p_m

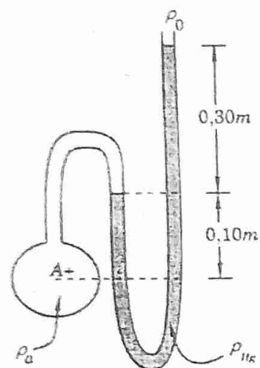
Luego: $-1332{,}9 = -1{,}0 \times 10^3 \times 9{,}8\ h_{max}$

$h_{max} = \frac{1332{,}9}{1{,}0 \times 10^3 \times 9{,}8} = 0{,}136\ m = 13{,}6\ cm$

b) Cuando se usa alcohol la altura pedida es: $-1332{,}9\frac{N}{m^2} = -0{,}8\times10^3\times9{,}8h_{max}$

$$h = \frac{1332{,}9}{0{,}8\times10^3\times9{,}8}m = 0{,}17m = 17cm$$

(06) Un recipiente con agua (A) está conectado a un manómetro en U como se muestra en la figura. Hallar:

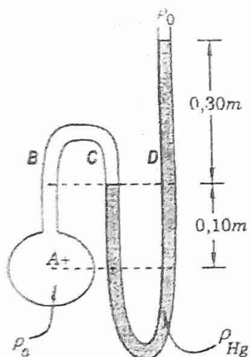


a) La presión manométrica en A.

b) La presión absoluta en A.

c) Si se duplica la presión absoluta en A, cuál es la presión manométrica en A.

Solución:



Se conoce:

$$\rho_a = 1\times10^3\ kg/m^3$$

$$\rho_{Hg} = 13{,}6\times10^3\ kg/m^3$$

Como los líquidos están en reposo:

$$P_B = P_C = P_D$$

$$P_B + \rho_a\,g\,0{,}10 = P_A$$

$$p_0 + \rho_{Hg}\,g\,0{,}30 = P_D$$

$$p_0 + \rho_{Hg}\ g\ 0{,}30 + \rho_a\ g\ 0{,}10 = P_A$$

$$P_A - p_0 = (\rho_{Hg}\,0{,}3 - \rho_a\,0{,}1)\,g$$

$$p_{mA} = p_A - p_0 = (13{,}6\times10^3\times0{,}3 - 10^3\times0{,}1)\,9{,}8$$

$$p_{mA} = 4{,}096\times10^4\ N/m^2$$

b) $P_A = P_0 + p_{mA} = 1{,}013\times10^5 + 4{,}096\times10^4\ \frac{N}{m^2}$

$$P_A = 1{,}42\times10^5\ N/m^2$$

c) Según la condición del problema:

$$2p_A = 2\left(1{,}42\times10^5\ \frac{N}{m^2}\right) = 2{,}84\times10^5\ \frac{N}{m^2}$$

$$2{,}84\times10^5\ \frac{N}{m^2} = p_0 + P_{mA}$$

$$p_{mA} = 2{,}84\times10^5 - p_0 =$$

$$p_{mA} = 2{,}84\times10^5 - 1{,}013\times10^5\ \frac{N}{m^2}$$

$$p_{mA} = 1{,}827\times10^5\ \frac{N}{m^2}$$

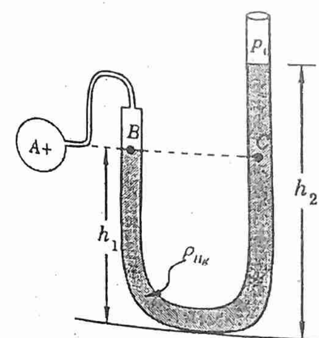
(07) Un recipiente está a una presión mamométrica de $0{,}2\times10^5\ N/m^2$ y está conectado a un manómetro de Hg como se muestra en la figura.

a) Hallar la altura h_1, si $h_2 = 0{,}40m$.

b) Si la nueva presión mamómetrica en el recipiente es de $0{,}35\times10^5\ N/m^2$. Cuáles son las nuevas alturas h_1' y h_2'.

Solución:

Por estar el líquido en reposo:



$$P_A = P_B = P_C$$

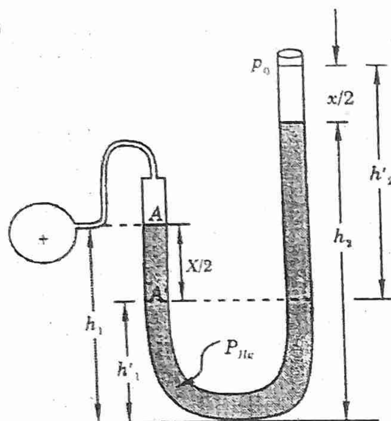
$$P_A = p_0 + \rho_{Hg}\,g(h_2 - h_1)$$

$$0{,}2\times10^5 = 13{,}6\times10^3\times9{,}8\,(0{,}40 - h_1)$$

$$0{,}15 = 0{,}40 - h_1$$

$$h_1 = 0{,}25m$$

b)



La variación de presión da lugar a una diferencia de altura X entre los ramales del tubo en U.

$$p_{A'} - p_A = \rho_{Hg}\, gX$$

$$X = \frac{(0,35-0,2)\times 10^5}{13,6\times 10^3 \times 9,8} = 0,112\,m$$

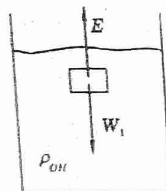
En el ramal de la izquierda el líquido baja ($X/2$):

$$h_1' = h_1 - \frac{x}{2} = 0,25 - \frac{0,112}{2} = 0,194\,m$$

En el ramal de la derecha el líquido sube ($x/2$):

(08) Dentro de un recipiente con alcohol ($0,79\,g/m^3$), hay un trozo de cobre ($8,5\,g/cm^3$) de $1,5kg$. el cual está suspendido de una cuerda. Hallar el peso del cuerpo en el alcohol.

Solución:



El peso del cobre en el alcohol es:

$$W_1 - E = W_2$$

$$W_2 = W_1 - \rho_{OH}\, g \frac{m}{\rho_{Cu}}$$

$$W_2 = 1,5\times 9,8 - \frac{0,79\times 10^3 \times 9,8 \times 1,5}{8,5\times 10^3} N$$

$$W_2 = 14,7 - 1,37 = 13,33\ N$$

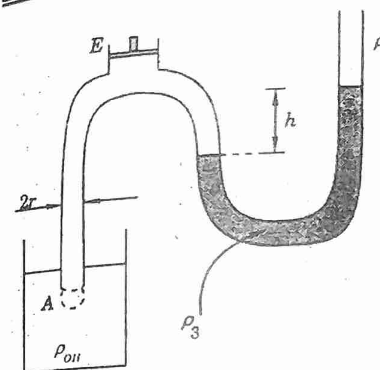
(09) El dispositivo que se muestra en la figura, consta de un embolo (E) que sirve para ejercer presión en el aire que se halla en el capilar (A) y donde se forma una burbuja de radio $0,15mm$. y en el otro extremo está conectado con un manómetro de agua, cuya diferencia de altura es de $3,1cm$. Hallar el coeficiente de tensión superficial del etanol.

Solución:

La presión dentro de la burbuja es:

$$p_A = p_0 + \rho_a\, g\, h$$

$$p_A - p_0 = \rho_a\, g\, h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$



Para una burbuja de gas (aire) en un líquido se cumple:

$$\Delta p = \frac{2\,\sigma_{OH}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

De (1) y (2): $\frac{2\,\sigma_{OH}}{r} = \rho_A\, gh$

$$\sigma_{OH} = \frac{\rho_a\, g h r}{2} = \frac{10^3 \times 9,8\times 3,1\times 10^{-2}\times 0,15\times 10^{-3}}{2}$$

$$\sigma_{OH} = 0,0227\ N/m$$

(10) Con relación al problema anterior, cuál es el valor de h, si en el capilar se forma una burbuja de agua.

Solución:

En este caso: $\frac{2\sigma_a}{r} = \rho_a\, g\, h$

$$h = \frac{2\sigma_a}{\rho_a\, g r} = \frac{2\times 0,0727}{10^3 \times 9,8\times 0,15\times 10^{-3}} m$$

$$h = 0,0989\ m = 9,9\ cm.$$

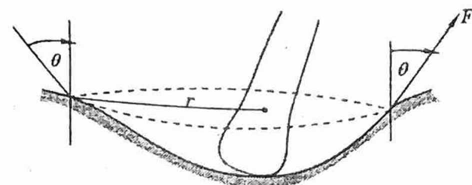
(11) Hallar la presión mamométrica en el interior de una burbuja de $1cm$. de radio que se forma en una sustancia cuyo coeficiente de tensión superficial es $0,05\ N/m^2$.

Solución:

En este caso: $\Delta p = p = p_0 = \frac{4\sigma}{r}$

$$\Delta p = p_{man} = \frac{4\,(0,05)}{1\times 10^{-2}} = 20\frac{N}{m^2}$$

(12)



Un insecto está parado sobre una superficie de agua y forma un menisco de radio $1,5mm$ y ángulo de contacto 30° (a) Qué fuerza soporta el menisco (b) Cuál es la masa del insecto si está sostenido por igual sobre sus ocho patas.

Solución:

a) La fuerza que soporta el peso de la pata es: $F = F_\sigma \cos\theta = \sigma L \cos\theta$

$F = \sigma(2\pi r)\cos\theta = 2 \times 3{,}14 \times 1{,}5 \times 10^{-3}\cos 30°$

$F = \sigma(2\pi r)\cos\theta = 0{,}0727 \times 2 \times 3{,}14 \times 1{,}5 \times 10^{-3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$F = 5{,}92 \times 10^{-4} N$

b) $F = \frac{W}{8}$, $W = 8F$

$W = 8(5{,}92 \times 10^{-4}) = 47{,}36 \times 10^{-4}\ N$

$W = 4{,}83 \times 10^{-4} Kg = 0{,}48\ g$

(13) Cuando se introduce un capilar de radio 0,25*mm*. en el agua este asciende 1*cm*. (a) Cuál es el ángulo de contacto (b) Cuál es el radio del menisco.

Solución:

a) De la expresión: $h = 2\sigma\cos\theta / \rho g r$

$$\cos\theta = \frac{\rho g r h}{2\sigma} = \frac{10^3 \times 9{,}8 \times 0{,}25 \times 10^{-3} \times 10^{-2}}{2(0{,}0227)}$$

$\cos\theta = 0{,}5396$

$\theta = 57{,}3°$

b) De la relación: $\cos\theta = \frac{r}{R}$; $R = \frac{r}{\cos\theta} = \frac{0{,}25\ mm}{0{,}5396} = 0{,}46\,mm$

(14) Qué altura puede ascender la sangre en un capilar de radio $1{,}5 \times 10^{-5} m$, si el ángulo de contacto es cero.

Solución:

Sabemos por teoría:

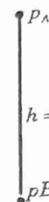
$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$$

$$h = \frac{2 \times 0{,}058\cos 0^0}{1{,}05 \times 10^3 \times 9{,}8 \times 1{,}5 \times 10^{-5}} m = 0{,}75 m$$

$h = 75 cm$

(15) Una persona que se halla de pie, su corazón está a 1,35*m*. del piso en promedio. ¿Cuál es la diferencia entre la presión de la sangre en una arteria del pie y la presión de la sangre en la aorta? (en *torr*). $\rho_s = 1{,}05 \times 10^3 kg/m^3$

Solución:



p_A : presión de la aorta

p_B : presión en el pie

p_B : $p_A + \rho g h$

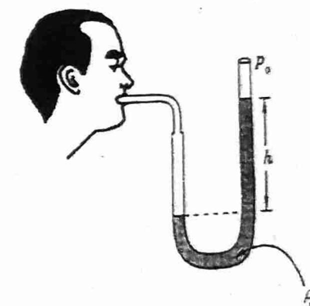
$p_B - p_A = \rho g h = (1{,}05 \times 10^3)\ 9{,}8(1{,}35)\ N/m^2$

$p_B - p_A = 1{,}37 \times 10^4\ N/m^2$

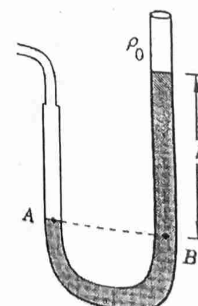
Sabemos: $1{,}013 \times 10^5 \frac{N}{m^2}$ ———— 760 *torr*

$1{,}37 \times 10^4 \frac{N}{m^2}$ ———— p $\qquad p = 102{,}8\ torr$

(16) Cuál es la presión mamométrica ejercida por los pulmones de una persona cuya espiración máxima que sopla de un lado de un mamómetro de agua produce una diferencia de 60*cm*. entre las alturas del tubo en U, según la figura adjunta. (en *atm*).



Solución:



Por condición de equilibrio : $P_A = P_B$

P_A : presión ejercida por los pulmones de la persona.

$p_0 + \rho_a g h = p_B$

Luego: $P_A = p_0 + \rho_a gh$

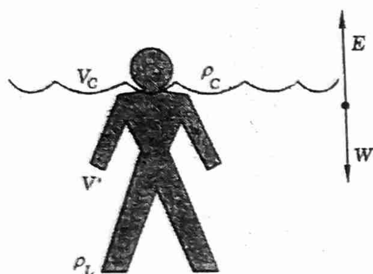
$P_A - p_0 = p_{mA} = \rho_a gh$ = presión memométrica

$p_{mA} = \left(1 \times 10^3 \frac{Kg}{m^3}\right) \times 9,8 \frac{m}{s^2} \times 0,60m = 5,88 \times 10^3 \frac{N}{m^2}$

$p_{mA} = \frac{5,88 \times 10^3}{1,013 \times 10^5} atm = 0,058\ atm$

(17) Cuando una persona flota inmóvil en agua dulce. ¿Qué fracción de su cuerpo está sumergida? Si la densidad del cuerpo es $0,98\ g/cm^3$.

Solución:



Sea V_c : volumen total de la persona

V' : volumen sumergido

ρ_L : densidad del líquido

ρ_c : densidad de la persona

E : empuje

W : peso de la persona

Por la condición en equilibrio:

$E = W \quad , \quad \rho_L g V' = mg$

$\rho_L g V' = \rho_c V_c g$

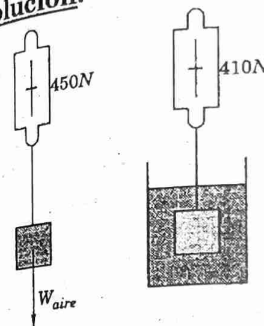
$\frac{V'}{V_c} = \frac{\rho_c}{\rho_L} = \frac{0,98}{1,0} = 0,98$

98% de su cuerpo está sumergido.

2% de su cuerpo no está sumergido (aproximadamente la cabeza de la persona)

(18) Un cuerpo colgado de un dinamómetro marca en su escala $450N$ y cuando se introduce en el agua marca $410N$. (a) ¿Cuál es la densidad del cuerpo y su volumen?. También hallar (b) el empuje sobre el cuerpo debido al agua.

Solución:



a) Sabemos que el empuje:

$E = \rho_a\ g\ V_c$

$V_c = \frac{E}{\rho_a\ g}$

$V_c = \frac{450 - 410N}{10^3 \times 9,8\ K \frac{m}{s^2}} = 4,08 \times 10^{-3}\ m^3$

Luego: $\rho_c = m_c / V_c = \frac{W_{aire} / g}{V_c}$

$\rho_c = \frac{450 / 9,8}{4,08 \times 10^{-3}} \frac{Kg}{m^3} = 11,25 \times 10^3 \frac{Kg}{m^3}$

b) $E = W_{aire} - W_{agua}$

$E = 450 - 410 = 40N$

(19) Una explosión origina un aumento mamométrico en la presión del aire ambiente. Hallar la fuerza total ejercida por una sobrepresión de $3000N/m^2$ sobre una ventana de un edificio de $3m \times 2m$.

Solución:

Por definición:

$p = \frac{F}{A} \quad , \quad F = pA$

$F = 3000 \frac{N}{m^2} \times (3 \times 2) m^2 = 1,8 \times 10^4\ N$

(20) Se aplica una fuerza de $5N$ al émbolo de una jeringa hipodérmica cuya sección transversal tiene un área de $2,5cm^2$ (a) ¿Cuál es la presión mamométrica en el fluido que está dentro de la jeringa? (b) El fluido pasa a través de una aguja hipodérmica cuya sección transversal tiene un área de $0,005cm^2$ ¿Qué fuerza habría que aplicarse al extremo de la aguja para evitar que el líquido saliera? (c) ¿Cual es la fuerza mínima que debe aplicarse al émbolo para inyectar fluido en una vena en la que la presión sanguínea es de $10mm\ Hg$?

Solución:



a) $p_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{5\,N}{2{,}5\times10^{-4}\,m^2}$

$p_1 = 2\times10^4\ \frac{N}{m^2}$

b) Por el principio de Pascal

$p_1 = p_2 = \frac{F_2}{A_2}$, $F_2 = p_1\,A_2$

$F_2 = 2\times10^4\ \frac{N}{m^2}\times 0{,}005\times10^{-4}\,m^2 = 0{,}01N$

c) Sabemos: $760\,mm\,Hg$ ——— $1{,}013\times10^5\ \frac{N}{m^2}$

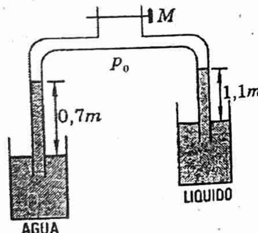
$10\,mm\,Hg$ ——— p_2'

$p_2' = \frac{10\times1{,}013\times10^5}{760}\ \frac{N}{m^2} = 1332{,}9\ N/m^2$

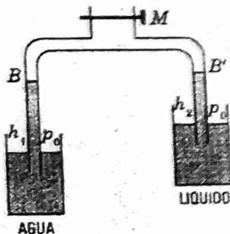
Sea F' la fuerza pedida: $p_2' = \frac{F'}{A_1}$, $F' = p_2'\,A_1$

$F' = 1332{,}9\times2{,}5\times10^{-4} = 0{,}33N$

(21) Un tubo en U, con llave M abierta se coloca como se muestra en la figura. Se aspira un poco de aire y se cierra la llave M. El agua sube $0{,}7m$. mientras que un líquido desconocido sube $1{,}1m$. Hallar (a) La densidad del líquido. (b) La presión interior del tubo en U (en mm de agua), si la presión atmosférica es de $8m$ de agua .



Solución:



a) La presión en el punto B es igual en el punto B', por ser aire lo que hay entre ellos. $P_B = P_{B'}$

Además: $P_0 = P_B + \rho_a\,g\,h_1$

$P_0 = P_{B'} + \rho_L\,g\,h_2$

Igualando se obtiene: $\rho_a\,g\,h_1 = \rho_L\,g\,h_2$

$\rho_L = \rho_a\left(\frac{h_1}{h_2}\right) = 1\frac{g}{cm^3}\left(\frac{0{,}7}{1{,}1}\right) = 0{,}64\,g/cm^3$

b) Sea la altura $h_x = 8m$ la que corresponde a la presión atmosférica para el agua.

Luego: $P_0 = \rho_a\,g\,h_x$; $g = 1{,}8\,m/s^2$

$\rho_a\,g\,h_x = P_0 = P_B + \rho_a\,g\,h_1$

$P_B = \rho_a\,g(h_x - h_1) = 10^3\times9{,}8(8-0{,}7)$

$P_B = 7{,}3\times10^4\ N/m^2$

Se sabe que $1{,}013\times10^5\ \frac{N}{m^2}$ $10{,}33m$ de agua ***(se demostrara en el próximo problema).***

Luego estableciendo la equivalencia:

$1{,}013\times10^5\ N/m^2$ ——— $10{,}33m$ de agua

$7{,}3\times10^4\ N/m^2$ ——— h

$h = 7{,}44\ m$ de agua

También se pudo usar la otra relación: $\rho_a\,g\,h_x = P_0 = P_{B'} + \rho_L\,g\,h_2$

$P_{B'} = (\rho_a\,h_x - \rho_L\,h_2)\,g =$

$P_{B'} = (10^3\times8 - 0{,}64\times10^3\times1{,}1)9{,}8 = 7{,}15\times10^4\ \frac{N}{m^2}$

Su equivalente es $h = 7{,}3m$ de agua.

(22) Hallar la altura de agua que corresponde a la presión atmosférica.

Use $g = 9{,}8\ m/s^2$

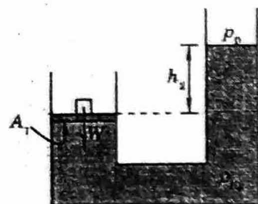
Solución:

De la relación: $p_0 = \rho\,g\,h_a$ $1{,}013\times10^5 = 10^3\times9{,}8\,ha$

$ha = 10{,}33\ m$

(23) El émbolo de la figura tiene un área de $20cm^2$. ¿Cuál es su peso si el nivel del mercurio de la rama abierta del tubo en U está a una altura de $30cm$. con respecto al émbolo?

Solución:



Por condición del líquido en reposo:

$$p_0 + \rho_{Hg}\, g\, h_2 = P_{A'} \qquad p_0 + \rho_{Hg}\, g\, h_2 = \frac{W}{A_1}$$

$$W = A(p_0 + \rho_{Hg}\ g\ h_2)\ ,\ h_2 = 0{,}3\ m$$

$$W = 20\times10^{-4}(1{,}013\times10^5 + 13{,}6\times10^3\times9{,}8\times0{,}3)$$

$$W = 282{,}4\ N$$

(24) Arquímedes pesó la corona del **REY HIERON**; primero en el aire pesó 482,5g y después en el agua pesó 453,4g. Demostró que no era de oro puro cuya densidad es de 19,3g/cm^3. Explicar.

Solución:

Hallemos la densidad de la corona.

El empuje: $E = W_{aire} - W_{agua}$

$E = 482{,}5\times10^{-3} - 453{,}4\times10^{-3} = 29{,}1\times10^{-3}\ kg$

$E = 29{,}1\times10^{-3}\times9{,}8\ N$, por definición de empuje: $E = V_c\,\rho_a\, g$

$$29{,}1\times9{,}8\times10^{-3} = V_c\times10^3\times9{,}8$$

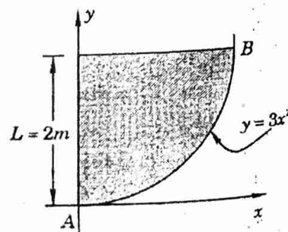
$$V_c = 29{,}1\times10^{-6}\ m^3$$

Luego la densidad de la corona es:

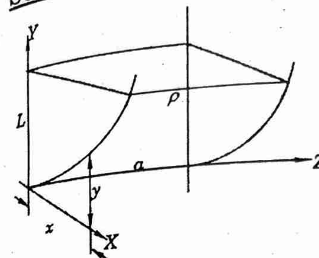
$$\rho_c = \frac{m_c}{V_c} = \frac{482{,}5\times10^{-3}\ kg}{29{,}1\times10^{-6}\ m^3} = 16{,}6\times10^3\ \frac{kg}{m^3}$$

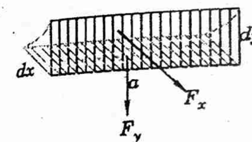
$\rho_c = 16{,}6\ g/cm^3$ esta densidad es menor que la densidad del oro que es de 19,3g/cm^3, por esta razón se confirmó que la corona no era de oro.

(25) Una compuerta de sección parabólica ($y = 3x^2$) AB está articulada en A e inmovilizada en B, como se indica en la figura. Si la compuerta tiene una anchura de $3m$ y la altura del líquido es de $2m$. Hallar los componentes de la fuerza que produce al agua el actuar sobre la compuerta.



Solución:





Sea: $L = 2m$, $a = 3m$.

Los diferenciales de área son: $dA_x = a\,dy$, $dA_y = a\,dx$

Luego las componentes de la fuerza son:

$$F_x = \int p\,d\,A_x = \int_0^L \rho\, g(L-y)(a\,dy)$$

$$F_x = \tfrac{1}{2}\rho\, g\, a\, L^2$$

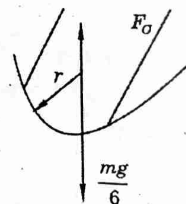
$$F_y = \int p\,d\,A_y = \int \rho\, g(L-y)(a\,dx)$$

$$F_y = \rho\, g\, a \int_0^{\sqrt{L/3}} (L-3x^2)\,dx =$$

$$F_y = \tfrac{2}{3}\rho\, g\, a\, L\sqrt{\tfrac{L}{3}}$$

(26) Un insecto llamado zapatero corre por la superficie del agua. Hallar el peso de este insecto sabiendo que debajo de cada una de sus seis patas se forma en al agua un hueco igual a una semiesfera de 0,1mm. de radio.

Solución:



En equilibrio, una de las patas soporta $mg/6$

$$F_\sigma = \frac{mg}{6} = \frac{w}{6}$$

$$W = 6F_\sigma = 6\sigma(2\pi r)$$

$$W = 6(73\times10^{-3})(2\times3{,}14\times10^{-4})\ N$$

$$W = 0{,}275\times10^{-3}\ N = 0{,}028\times10^{-3}\ kg$$

$$W = 0{,}028\ g$$

(27) ¿Qué diámetro máximo pueden tener los poros de la mecha de una hornilla de petróleo para que este último suba desde el fondo del depósito hasta el mechero de la hornilla ($h = 10cm$)? Supóngase que los poros son tubos cilíndricos y que el petróleo moja perfectamente.

Solución:

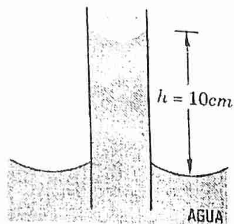
Según el problema se tiene el gráfico adjunto: $\Delta h = \frac{2\ \sigma \cos\theta}{\rho g r}$

donde: $\rho = 0{,}8 \times 10^3\ kg/m^3$, $\theta = 0°$

$\Delta h = 10^{-1}\ m$, $\sigma = 3 \times 10^{-2}\ N/m$

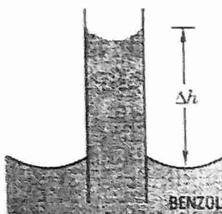
$$r = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho\ g\ \Delta h} = \frac{2\ (3 \times 10^{-2}) \times 1}{0{,}8 \times 10^3 \times 9{,}8 \times 0{,}1} = 765 \times 10^{-7}\ m$$

$r = 0{,}0765\ mm$; $d = 2r = 0{,}15\ mm$



(28) ¿Hasta qué altura se elevará el benzol en un tubo capilar cuyo diámetro interno es de $1mm$? Suponer que el benzol moja perfectamente.

Solución:



Se tienen los datos: $r = 5 \times 10^{-4}\ m$

$\sigma = 0{,}03\ N/m$, $\rho = 0{,}88 \times 10^3\ kg/m^3$

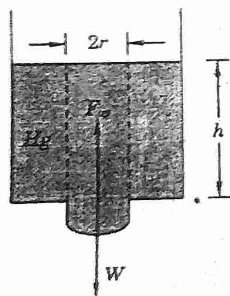
Usando la expresión: $\Delta h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$, $\cos 0° = 1$

$$\Delta h = \frac{2 \times 3 \times 10^{-2} \times 1}{0{,}88 \times 10^3 \times 9{,}8 \times 5 \times 10^{-4}} = 139 \times 10^{-4}\ m$$

$\Delta h = 13{,}9\ mm$

(29) En el fondo de un recipiente que contiene mercurio hay un orificio. ¿ Qué diámetro máximo puede tener este orificio para que cuando la altura de la columna de mercurio sea de 3cm. éste último no pueda salir de él ?.

Solución:



Por la condición del equilibrio:

$F_\sigma = W$

$\sigma(2\pi r) = mg = \rho\pi r^2 hg$; $r = \frac{2\sigma}{\rho g h}$

Usando: $\sigma = 0{,}5\ N/m$, $\rho = 13{,}6 \times 10^3\ kg/m^3$

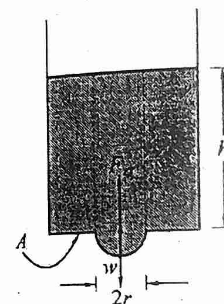
$h = 3 \times 10^{-2}\ m.$

$$r = \frac{2 \times 0{,}5}{13{,}6 \times 10^3 \times 9{,}8 \times 3 \times 10^{-2}}\ m = 2{,}5 \times 10^{-4}\ m$$

$r = 0{,}25\ m$, $d = 2r = 0{,}5\ mm.$

(30) En el fondo de una vasija de vidrio cuya área es de $30cm^2$ hay un orificio redondo de diámetro $0{,}5mm$. Esta vasija contiene mercurio. ¿Qué cantidad de mercurio permanecerá en ella?

Solución:



Para hallar la masa de mercurio es necesario conocer h:

$m = \rho V = \rho A h$ .... (1)

La altura la determino usando:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$$

$$h = \frac{2 \times 0{,}5}{13{,}6 \times 10^3 \times 9{,}8 \times 0{,}25 \times 10^{-3}}\ m = 0{,}03m$$

Luego en (1):

$m = 13{,}6 \times 10^3\ (30 \times 10^{-4})\ (3 \times 10^{-2})$

$m = 1224 \times 10^{-3}\ kg = 1{,}22\ g$

HIDRODINÁMICA

(01) En un adulto en reposo, la velocidad media a través de la aorta vale 0,33 m/s ¿Cuál es el flujo a través de una aorta de radio 9*mm*.?

Solución:

Por definición de caudal:

$$Q = \bar{\upsilon} A = \bar{V} \pi r^2 = 0{,}33 \times 3{,}14 \times (9 \times 10^{-3})^2 \frac{m^3}{s}$$

$$Q = 8{,}4 \times 10^{-5}\, m^3/s = 84\, cm^3/s$$

(02) Si el caudal de sangre para un adulto en reposo es de $88cm^3/s$. ¿Cuál es la velocidad media a través de una arteria de $20 \times 10^{-4}\, m^2$?.

Solución:

Sabemos: $Q = 88cm^3/s$, $A = 20 \times 10^{-4} m^2$ y $Q = \bar{V} A$

$$\bar{V} = Q/A = 88\, cm^3/s / 20 \times 10^{-4} \times 10^4\, cm^2$$

$$\bar{V} = 4{,}4\, cm/s$$

(03) Cuál es la caída de presión en la sangre cuando pasa por un capilar de 0,5*mm*. de longitud y 2μm de radio, si la velocidad de la sangre en el centro del capilar es de 0,66*mm/s*.

Solución:

De la expresión deducida en teoría:

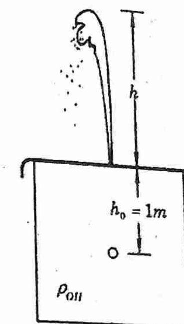
$$V_{max} = \frac{\Delta p r^2}{4\eta L} \quad , \quad \Delta p = \frac{4\eta L \upsilon_{max}}{r^2}$$

Reemplazando valores:

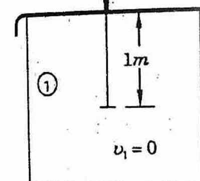
$$\Delta p = \frac{4 \times (4 \times 10^{-3})(0{,}5 \times 10^{-3})(0{,}66 \times 10^{-3})}{(2 \times 10^{-6})^2}$$

$$= 1320\, N/m^2$$

(04) Un tanque cerrado lleno de alcohol, posee una presión mamométrica de $0{,}5kg/cm^2$ a una distancia de 1*m* de la tapa del tanque, como se muestra en la figura adjunta. Se hace un agujero en la tapa y sale un chorro vertical. Hallar la altura que alcanzó el chorro.



Solución:



Comparando los puntos 1 y 2, aplicando Bernoulli:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g y_2$$

donde: $y_1 = 0$, $y_2 = h_2 + 1$, $p_{1m} = 0{,}5kg/cm^2$, $p_{2m} = 0$

Reemplazando:

$$p_0 + \tfrac{1}{2}\rho(0)^2 + \rho g(h_2 + 1) = p_0 + p_{1m} + \tfrac{1}{2}\rho(0)^2 + \rho g(0)$$

$$\rho g(h_2 + 1) = p_1 - p_0 = p_{1m} \quad , \quad p_1 = p_0 + p_{1m}$$

$$h_2 = \left(\frac{p_{1m}}{\rho g} - 1\right)m$$

$$h_2 = \frac{0{,}5 \times 10^4 \times 9{,}8}{0{,}79 \times 10^3 \times 9{,}8} - 1m = 6{,}33 - 1 = 5{,}33m$$

(05) La velocidad máxima de la sangre en el centro de un capilar es 0,066*cm/s*. La longitud del capilar es 0,1*cm* y su radio es $2 \times 10^{-4}cm$. (a) ¿Cuál es el flujo Q en el capilar? (b) Hacer un cálculo aproximado del número total de capilares del cuerpo a partir del hecho de que el flujo a través de la aorta es $83cm^3/s$.

Solución:

a) Por definición:

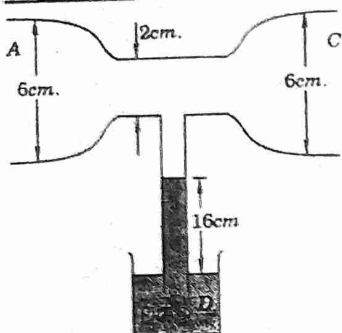
$$Q = \bar{V}\pi r^2 \quad , \quad \bar{V} = \tfrac{1}{2}\upsilon_{max} \quad , \quad Q = \left(\frac{\upsilon_{max}}{2}\right)\pi r^2$$

$$Q = \left(\frac{0{,}066}{2}\right)3{,}14 \times (2 \times 10^{-4})^2 = 4{,}14 \times 10^{-9}\, cm^3/s$$

b) $Q_{(aorta)} = N\, Q_{(capilar)}$, $83cm^3/s = N[4{,}14 \times 10^{-9}\, cm^3/s]$, $N = 2 \times 10^{10}$ capilares.

06 ¿Cuál es la velocidad del gas de densidad 1,36 g/ℓ que fluye en el tubo A si la altura del mercurio en D es de $16cm$.? El aire escapa a la atmósfera.

Solución:



Se conoce: $\rho_{gas} = 1{,}36\, g/\ell = 1{,}36\, kg/m^3$

$\rho_{Hg} = 13{,}6 \times 10^3\, kg/m^3$

Comparando los puntos ① y ②:

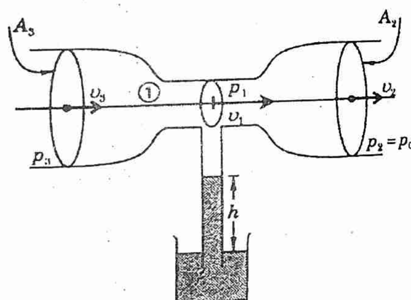
$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 + \rho g(0) = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 + \rho g(0)$$

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Además: $p_1 + \rho_{Hg}\, g h = p_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$$Q = A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2 \quad , \quad \upsilon_1 = \frac{Q}{A_1} \quad ; \quad \upsilon_2 = \frac{Q}{A_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Reemplazando (2), (3) en (1):



$$p_0 - \rho_{Hg}\, g h + \tfrac{1}{2}\rho\left(\frac{Q}{A_1}\right)^2 = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho\left(\frac{Q}{A_2}\right)^2$$

$$Q = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)A_1^2 A_2^2}{(A_2^2 - A_1^2)\rho_{gas}}}$$

$$Q = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2\rho_{Hg}\, g h}{(A_2^2 - A_1^2)\rho_{gas}}}$$

$$Q = \frac{\pi(2\times10^{-2})^2}{4}\,\frac{\pi(6\times10^{-2})^2}{4}\sqrt{\frac{2(0{,}213\times10^5)}{[(6\times10^{-2})^4 - (2\times10^{-2})^4]\,1{,}36}}$$

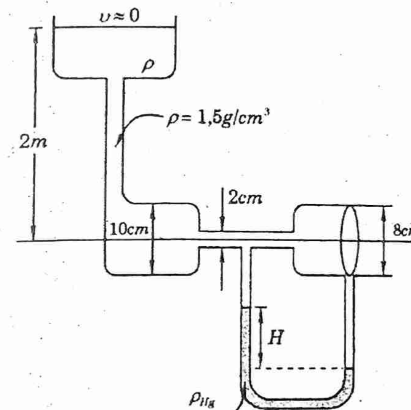
$$Q = 0{,}056\; m^3/s$$

Luego: $Q = A_3 \upsilon_3 = A_1 \upsilon_2 = A_2 \upsilon_2$

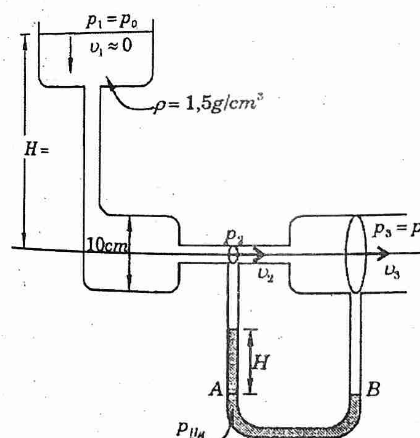
$$\upsilon_3 = \frac{Q}{\pi d_3^2/4} = \frac{0{,}056}{3{,}14\,(6\times10^{-2})^2/4}\; m/s$$

$$\upsilon_3 = 19{,}8\, m/s$$

07 Dado el gráfico adjunto, donde un líquido de densidad $1{,}5 g/cm^3$, fluye por la tubería indicada. Hallar (a) La velocidad de salida del líquido. (b) La cantidad de líquido que sale por segundo. (c) la velocidad del líquido en la sección de diámetro $2cm$. (d) La presión de altura entre las columnas de mercurio del tubo en U.



Solución:



Aplicando Bernoulli en ① y ③:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 + \rho g y_1$$

$$p_3 + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon_3^2 + \rho g y_3$$

$$p_1 = p_3 = p_0$$

$$y_1 = H \quad , \quad y_3 = 0$$

$$\upsilon_1 \approx 0$$

$$p_0 + \tfrac{1}{2}\rho(0)^2 + \rho g H = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon_3^2 + 0$$

$$\upsilon_3 = \sqrt{2 g H}$$

$$\upsilon_3 = \sqrt{2\times 9{,}8\times 2} = 6{,}3 m/s$$

b) El caudal: $Q = A_3 \upsilon_3 = \pi r_3^2 \upsilon_3$, $Q = 3{,}14(4\times10^{-2})^2\,(6{,}3) = 0{,}032\, m^3/s$

c) La velocidad de la sección A_2 es: $Q = \pi r_2^2 \upsilon_2 = \pi r_3^2 \upsilon_3$

$$\upsilon_2 = \upsilon_3\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2 = 6{,}3\left(\frac{4cm}{1cm}\right)^2 = 100 m/s$$

d) Comparando los puntos ② y ③:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 + \rho g y_2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_3^2 + \rho g y_3$$

$$y_2 = y_3 = 0 \quad , \quad p_3 = p_0$$

$$p_2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_3^2 - \upsilon_2^2) =$$

$$p_2 = 1{,}013\times10^5 + \frac{1}{2}\times1{,}5\times10^3[(6{,}3)^2 - (100)^2]$$

$$p_2 = 1{,}013\times10^5 - 74{,}7\times10^5\ N/m^2$$

$$p_2 = -73{,}7\times10^5\ N/m^2$$

e) Por condición de equilibrio:

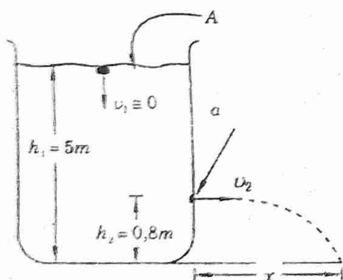
$$P_A = P_B$$

$$p_2 + \rho_{Hg}\, g H = p_3 + \rho g H$$

$$H = \frac{(p_3 - p_2)}{(\rho_{Hg} - \rho)g} = \frac{(1{,}013 - (-73{,}7))\times10^5}{(13{,}6 - 1{,}5)\times10^3\times9{,}8} = 62{,}9\,m$$

(08) En un depósito muy grande de profundidad $5m$ abierto a la presión atmosférica, se hace un pequeño orificio sobre una pared lateral a una altura de $0{,}8m$. Cuál es la velocidad de salida del benceno y que distancia horizontal recorre el benceno cuando llega al suelo.

Solución:



a) Por condición del problema $A \rangle\rangle a$ aplicando el teorema de Torricelli:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gh}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2\times9{,}8(5 - 0{,}8)} = 9{,}1\,m/s$$

b) Por cinemática:

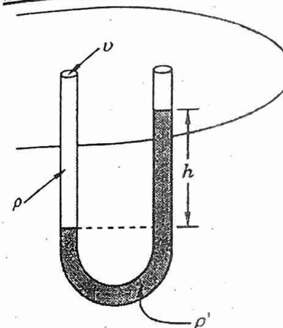
$$x = \upsilon_2 t \quad , \quad h_2 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$x = \upsilon_2\sqrt{\frac{2h_2}{g}} = (9{,}1)\sqrt{\frac{2\times0{,}8}{9{,}8}}\ m$$

$$x = 3{,}7\,m$$

(09) Se coloca un tubo de PITOT sobre el ala de un avión y se nota que la diferencia de nivel del liquido de densidad $1{,}3 g/cm^3$ en el tubo en U es de $10cm$. ¿Cuál es la velocidad del avión?

Solución:



Se demostró en teoría: $\upsilon = \sqrt{\frac{2gh\rho'}{\rho}}$

Se conoce: $\rho' = 1{,}3\times10^3\ kg/m^3$

$\rho = 1{,}293\ kg/m^3$, reemplazando valores:

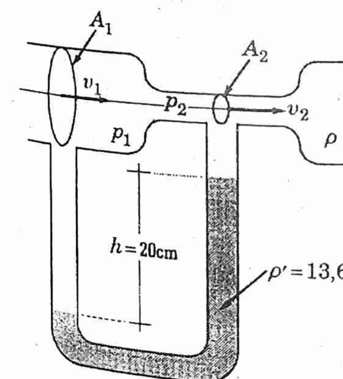
$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\times9{,}8\times0{,}1\times1{,}3\times10^3}{1{,}293}}\ \frac{m}{s}$$

$$\upsilon = 44{,}4\ m/s = 159{,}8\ km/h$$

$$\upsilon \cong 160\ km/h$$

(10) En un medidor de Venturi por el cual pasa un liquido de densidad $1{,}3\ g/cm^3$, las secciones transversales del tubo son $18cm^2$ y $8cm^2$ y la diferencia de altura del mercurio en el tubo en U es de $20cm$. Hallar la velocidad en ambas secciones.

Solución:



Según condición del problema:

$$y_1 = y_2 = 0$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g(0)$$

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g(0)$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\upsilon_1 A_1 = \upsilon_2 A_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Por líquido en reposo: $p_1 + pgh = p_2 + \rho_{Hg}\, gh$ .... (3)

De (2), (3) en (1): $\upsilon_1 = A_2 \sqrt{\dfrac{2(\rho' - \rho)\, g\, h}{\rho\,(A_1^2 - A_2^2)}}$

Reemplazando valores:

$$\upsilon_1 = 8 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{2(13{,}6 - 1{,}3) \times 10^3 \times 9{,}8 \times 0{,}2}{1{,}3 \times 10^3\,(18 - 8) \times 10^{-4}}}$$

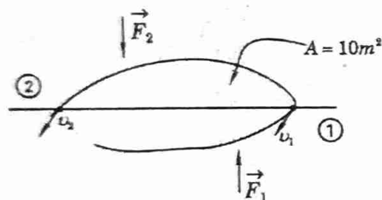
$$\upsilon_1 = 0{,}154\ m/s$$

Por continuidad: $\upsilon_1 A_1 = \upsilon_2 A_2$ $\qquad \upsilon_2 = \left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)\upsilon_1 = \left(\dfrac{18\,cm^2}{8\,cm^2}\right) 0{,}154\ m/s$

$$\upsilon_2 = 2{,}6\ m/s$$

(11) Un avión vuela horizontalmente, la velocidad en la parte superior del ala es de $70 m/s$ y en la parte inferior del ala es de $50 m/s$, si el área del ala es de $10 m^2$ y pesa $270 kg$ (a) Cuál es la fuerza ascencional sobre el ala.

Solución:



a) Aplicando el teorema de Bernoulli para los puntos ① y ②:

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g(0) = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g(0)$$

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}\rho\,(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$$

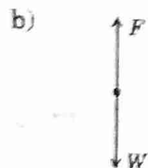
La fuerza solicitada es:

$$F = (p_1 - p_2)\,A = \tfrac{1}{2}\rho\,(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)\,A$$

$$F = \tfrac{1}{2}\,1{,}293\,[(70)^2 - (50)^2] \times 10$$

$$F = 15516\,N$$

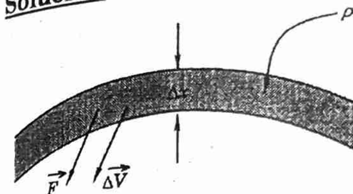
b)



$$F_{neta} = F - W = 15516 - 2700N$$
$$= 12816\ N = 1281{,}6\ kgf$$

(12) Un avión vuela con la velocidad de $400 km/h$. Considerando que la capa de aire que hay junto a sus alas, arrastrada por viscosidad es igual a $5 cm$. Hallar la fuerza tangencial que actúa sobre cada metro cuadrado de la superficie del ala.

Solución:



Se conoce: $\Delta x = 5 cm.$

$\eta = 181 \times 10^{-6}\ g/cm - s$

$A = 1 m^2$

$\Delta V = 400 km/h$

La fuerza solicitada está dada por:

$$F = \eta\, A\, \frac{\Delta V}{\Delta x} = 1{,}81 \times 10^{-5} \times 1 \times \frac{400 \times 10^3}{3600} \times \frac{1}{5 \times 10^{-2}} = 0{,}04\ N$$

(13) Una bolita de fierro cae con una velocidad constante de $1 cm/s$ en un recipiente lleno de glicerina de viscosidad 14,7 piose. Hallar el radio de la bolita.

Solución:

Sabemos los datos: $\eta = 1{,}47$, $p = 1{,}47 \dfrac{Kg}{m \cdot 5}$

$\rho_{Fe} = 7{,}8\, g/cm^3$, $\rho_g = 1{,}26\, g/cm^3$

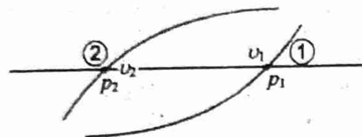
$\upsilon_{\lim} = \upsilon_{cte} = 1\ cm/s = 10^{-2}\ m/s$

Usando la relación: $r = \sqrt{\dfrac{9\,\eta\,\upsilon_{\lim}}{2\,g(\rho - \rho_0)}} = \sqrt{\dfrac{9 \times 1{,}47 \times 10^{-2}}{2 \times 9{,}8(7{,}8 - 1{,}26) \times 10^3}}$

$$r = 1{,}01 \times 10^{-3}\, m = 1{,}01\, mm$$

(14) Sobre el borde frontal del ala de un avión se considera el aire detenido y el aire que pasa sobre la superficie del ala es υ. Hallar el máximo valor de la velocidad para que el flujo sea a régimen estable, suponiendo que el aire es incompresible. $\rho_{aire} = 1{,}293 \times 10^{-3}\ g/cm^3$

Solución:



Considerando los puntos 1 y 2

$$p_1+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2+\rho g y_1$$

$$p_2+\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2+\rho g y_2$$

donde: $y_1=y_2=0$, como $\upsilon_1=0$ (aire detenido) $p_1=p_0$ (máximo)

para υ_2 (máximo) , $p_2=0$ (mínimo)

Reemplazando valores:

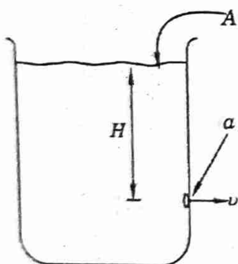
$$p_0+\frac{1}{2}\rho(0)^2+\rho g(0)=0+\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2+\rho g(0)$$

$$\upsilon_2=\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}=\sqrt{\frac{2\times1{,}013\times10^5}{1{,}293}}$$

$$\upsilon_2=395{,}8m/s$$

(15) Se práctica un orificio circular de $2cm$ de diámetro en la pared lateral de un depósito muy grande a una profundidad de $2m$ por debajo del nivel del agua en el mismo. Hallar (a) La velocidad de salida del agua por el orificio (b) El volumen de agua en litros, que sale en un minuto.

Solución:



a) Por ser $A \rangle\rangle a$ (áreas) cumple el teorema de Torricelli:

$$\upsilon=\sqrt{2gH}$$

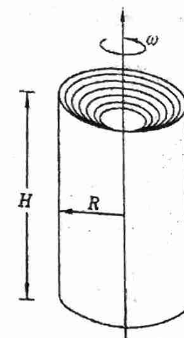
$$\upsilon=\sqrt{2\times9{,}8\times2}=6{,}26\frac{m}{s}$$

b) $Q=\frac{V}{t}=a\upsilon$, $V=A\upsilon t$

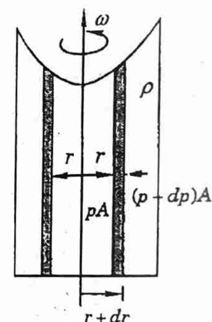
$$V=\frac{\pi d^2}{4}\upsilon t=3{,}14\frac{(2\times10^{-2})^2}{4}(6{,}26)(60)$$

$$V=0{,}12m^3$$

(16) Un líquido se halla en un recipiente cilíndrico de radio R y altura H, el cual gira con una velocidad angular ω alrededor de un eje que pasa por su centro, como se muestra en la figura. Hallar (a) Cómo varía la presión con la distancia al eje de giro. (b) La ecuación de la superficie libre del líquido.



Solución:



a) Tomamos un diferencial de masa dm del líquido, cuyo eje se halla entre r y $r+dr$.

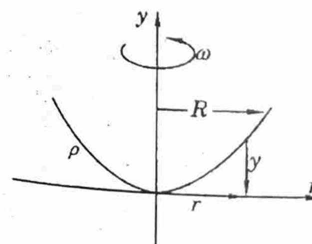
Sabemos que toda masa que gira: $\Sigma F=Fc$

$$(p+dp)A-pA=(dm)a_C$$

$$A\,dp=(\rho A dr)(r\omega^2)$$

$$dp=\rho r\omega^2 dr$$

b) Donde dp: exceso de presión sobre el extremo exterior del elemento cilíndrico respecto a la presión sobre el extremo interior.



La presión a la profundidad y es: $p=\rho g y$

$dp=\rho g\,dy$, se demostró: $dp=\rho r\omega^2 dr$

Igualando las expresiones: $\rho g\,dy=\rho r\omega^2 dr$

$$\int_0^y dy=\frac{\omega^2\rho}{g}\int_0^r r\,dr$$

$$y=\frac{1}{2}\frac{\omega^2r^2}{g}$$

(17) Hallar el número de Reynolds para el flujo de sangre, a través de una aorta de radio $5mm$. donde su velocidad media es $30cm/s$. y a través de un capilar de radio $0{,}01mm.$, su velocidad media es $0{,}60mm/s$.

Solución:

Sabemos la expresión del número de Reynolds:

$$N_{Re} = \frac{\rho \bar{\upsilon} D}{\eta}$$

$$\rho = 1{,}05\, g/cm^3 \quad , \quad \eta = 4 \times 10^{-3} \frac{N-S}{m^2}$$

Para la aorta: $D = 10mm.$ $\quad N_{Re} = \dfrac{1{,}05 \times 10^3 \times 0{,}30 \times 10 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}} = 787{,}5$

Para el capilar: $D = 0{,}02mm$ $\quad N_{Re} = \dfrac{1{,}05 \times 10^3 \times 0{,}60 \times 2 \times 10^{-5}}{4 \times 10^{-3}} = 3{,}15$

(18) Hallar la potencia del corazón de una persona normal en reposo, se conoce, la presión de una persona en reposo el alrededor de $105 mm\ hg$ y el flujo sanguíneo es de $80 cm^3/s$.

Solución:

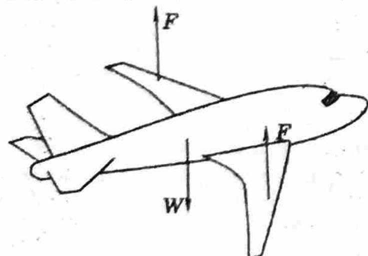
Sabemos que la potencia P: $\quad P = F\upsilon = (pA)\upsilon = p(A\upsilon) = pQ$

$$P = \frac{105 \times 1{,}013 \times 10^5}{760} \frac{N}{m^2} \times 80 \times 10^{-6} \frac{m^3}{s}$$

$$P = 1{,}12 \frac{J}{S} = 1{,}12\ W$$

(19) Cada ala de un avión tiene un área de $25 m^2$. Si la rapidez del aire es de $50 m/s$ en la superficie inferior del ala y de $65 m/s$ en la superficie superior del ala. Halle el peso del avión (Suponga que el avión vuela nivelado con una rapidez constante a una altura donde la densidad del aire es $1 kg/m^3$ También suponga que toda la sustentación la proporcionan las alas).

Solución:



Por estar en equilibrio:

$$2F = W \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

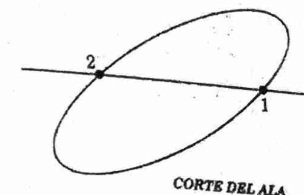
Donde F es la fuerza del aire sobre un ala, la que se halla usando la ecuación de Bernoulli y W es el peso del avión.

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g y_1$$

$$p_2 + \tfrac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g y_2$$

$$y_1 = y_2 = 0$$

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{2}\rho(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) = \Delta p$$



La fuerza: $\quad F = \Delta p\, A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$

De (2) en (1):

$$2(\Delta p A) = W = 2\left[\tfrac{1}{2}\rho(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)A\right]$$

$$W = \rho(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)A = 1[(65)^2 - (50)^2]25$$

$$W = 43125 N = 4400 kg$$

(20) Un recipiente lleno de etanol está a una presión de $3atm.$ se fija un tubo capilar de $20cm.$ de longitud y $1mm.$ de radio y en el otro extremo está sometido a la presión atmosférica. Cuál es el volumen que sale a través del capilar en un minuto. Se conoce la velocidad del etanol $0{,}012p$.

Solución:

Sabemos por la teoría, la ecuación de Poiseville.

$$V = \frac{V}{t} = \frac{\pi R^4 \Delta \rho}{8 \eta L}$$

El volumen pedido es:

$$V = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8 \eta L}$$

$$V = \frac{3{,}14 (1 \times 10^{-3})^4 (3-1) \times 1{,}013 \times 10^5 \times 60}{8 \times \left(0{,}012 \times \frac{10^{-5}}{10^{-4}}\right) 0{,}2}$$

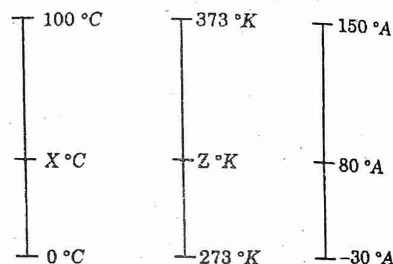
$$V = 0{,}0198\ m^3$$

TEMPERATURA Y DILATACIÓN

(01) La temperatura de fusión del hielo es de (–30°A) y el punto de ebullición del agua es de 150°A. Hallar la temperatura en °K que le corresponde a 80°A.

Solución:

Haciendo la comparación de escalas.



$$\frac{x\,°C}{100} = \frac{y\,°A - (-30)}{150 - (-30)} \quad , \quad Z\,°K = X\,°C + 273$$

$$\frac{Z\,°K - 273}{100} = \frac{Y\,°A + 30}{150 + 30} = \frac{80 + 30}{180} = \frac{110}{180}$$

$$Z\,°K = 334\,°K \quad , \quad Z = 334$$

(02) ¿Cuánta energía se necesita para fundir $50g$ de hielo a $0°C$?

Solución:

Sabiendo el calor latente de fusión:

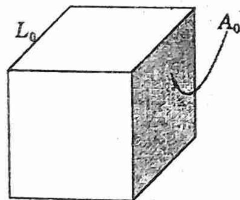
$$L_f = 80\,Cal/S \quad , \quad Q = m\,L_f = 50 \times 80 = 4000 \;\; cal$$

$$Q = 16{,}7\;KJ$$

(03) La superficie de un cubo de arista L aumenta en $180cm^2$, cuando la temperatura del cubo pasa de $60°C$ a $80°C$. Sabiendo que ese aumento representa el 2% de la superficie inicial, hallar (a) El valor de la arista L. (b) El coeficiente de dilatación lineal del material del cubo.

Solución:

a)



Según condición del problema:

$$6A_f - 6A_0 = 180$$

$$A_f - A_0 = 30 = \Delta A$$

A_f : área final , A_0 : área inicial

Según condición del problema:

$$\frac{\Delta A}{A_0} = 0{,}02 \quad ; \quad \frac{30}{A_0} = 0{,}02 \quad ; \quad A_0 = 30/0{,}02 = 1500\;cm^2$$

Luego: $L_0^2 = 1500$, $L_0 = 38{,}73\,cm$

b) Sabemos: $\Delta A = A_0(2\alpha)\,\Delta t$

$$30 = 1500 \times 20 \times \alpha(80 - 60)$$

$$\alpha = 5 \times 10^{-4}\,°C^{-1}$$

(04) A que temperatura la lectura de la escala fahrenheit será el triple de la lectura de la escala centígrada.

Solución:

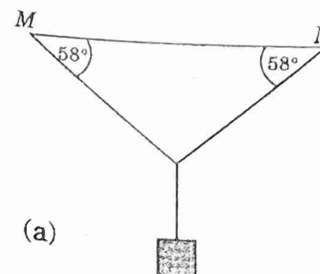
Según condición del problema: $y\,°F = 3x\,°C$

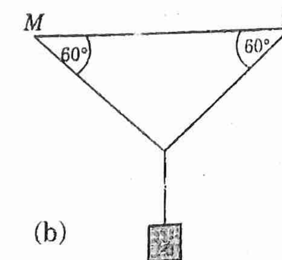
$$\frac{x\,°C}{5} = \frac{y\,°F - 32}{9} = \frac{3x\,°C - 32}{9}$$

$$6x\,°C = 160\,°C \quad , \quad x = 26{,}6\,°C$$

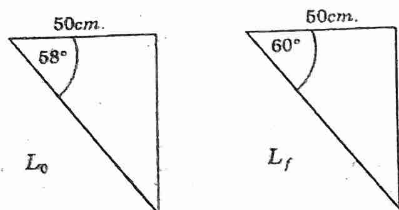
En la escala de Fahrenheit: $y\,°F = 3(26{,}6) = 79{,}8\,°F$

(05) Un cable flexible pero no elástico, está fijo entre los extremos M y N separados $100cm$. A una temperatura de $t = 20°C$, un peso suspendido del centro de la figura. (a) Cuando la temperatura llega a $150°C$, se obtiene la figura. (b) Hallar el coeficiente de dilatación del cable.





Solución:



Según condición del problema:

$\cos 60° = \frac{50}{4}$

$L_f = 100\,cm.$

$\cos 58° = \frac{50}{L_0}$

$L_0 = 94{,}35\,cm.$

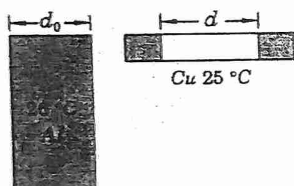
Luego: $\Delta L = L_0\, \alpha\, \Delta T = L_f - L_0$

$100{,}00 - 94{,}35 = 94{,}35\, \alpha (150 - 20)$

$\alpha = 49{,}9 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$

(06) Una barra de aluminio de diámetro externo 150,2*mm*. a 25°*C*, se quiere colocar alrededor de un disco de diámetro interior de 150*mm* a 25°*C* (a) A que temperatura deberá calentarse el disco para que encaje en la barra. (b) A que temperatura deberá enfriarse el sistema si desea separarlos.

Solución:



a) Se conoce:

$d_0 = 150{,}2mm$

$d = 150mm$

$\alpha_{al} = 23 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$; $\alpha_{cu} = 16 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$

Según condición del problema:

$\Delta d_{cu} = d_0 - d = d\, \alpha_{cu}\, (t - 25°C)$

$150{,}2 - 150 = 150 \times 10 \times 10^{-6}\, (t - 25)$

$t = 83{,}3\ °C$

b) $df_{Al} = do_{Al}\, [1 + \alpha_{Al}\, (t - 25)]$

$df_{cu} = do_{cu}\, [1 + \alpha_{cu}\, (t - 83{,}3)]$

pero $do_{Al} = do_{cu} = 150{,}2mm$

y $df_{Al} = df_{cu}$

$do_{Al}\, [1 + \alpha_{Al}\, (t - 25)] = do_{Cu}\, [1 + \alpha_{Cu} (t - 83{,}3)]$

$\alpha_{Al} (t - 25) = \alpha_{Cu} (t - 83{,}3)$

$t = \frac{25\alpha_{Al} - 83{,}3\alpha_{Cu}}{\alpha_{Al} - \alpha_{Cu}}$

$t = \frac{25 \times 23 \times 10^{-6} - 83{,}3 \times 16 \times 10^{-6}}{23 \times 10^{-6} - 16 \times 10^{-6}} = -108{,}3\ °C$

(07) Un material de densidad ρ, con coeficiente de dilatación volumétrica β y calor específico C_e, se eleva su temperatura, cuando absorbe Q calorías. Hallar el aumento de volumen en función de los datos dados.

Solución:

Sabemos que un cuerpo absorbe calor: $Q = m\, C_e\, \Delta t$ .... (1)

y cuando un cuerpo se dilata: $\Delta V = V_0\, \beta\, \Delta t$ .... (2)

De (1): $Q = \rho\, V_0\, C_e\, \Delta t$

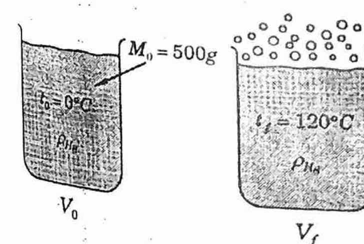
$Q = \rho\, C_e\, (V_0\, \Delta t)$ .... (3)

De (2): $V_0\, \Delta t = \Delta V / \beta$ .... (4)

De (4) en (3): $Q = \rho\, C_e\, (\Delta V/\beta)$, $\Delta V = Q\, \beta / \rho\, C_e$

(08) Un recipiente de vidrio está lleno completamente con 500*g* de H_g a la temperatura 0°*C*. Qué cantidad de mercurio a 120°*C* puede contener el recipiente, si se desprecia la dilatación del vidrio. Si $\beta_{Hg} = 1{,}8 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$.

Solución:



Asumiendo que el vidrio no se dilata:

$V_f = V_0$

Luego:

$V_f = V_0\, [1 + \beta\, \Delta t] = \frac{m}{\rho}\, [1 + \beta\, \Delta t]$

$V_f = \frac{500}{13{,}6}\, (1 + 1{,}8 \times 10^{-4} \times 120) = 37{,}56\, cm^3$

$V_0 = \frac{500}{13{,}6} = 37{,}76$

El volumen derramado: $\Delta V_D = 37{,}56 - 36{,}76 = 0{,}80 cm^3$

La masa derramada: $\Delta m_D = \rho\, \Delta V = 13{,}6 \times 0{,}8 = 10{,}88 g$

La masa que queda en el recipiente es: $500{,}00 - 10{,}88 g = 489{,}12 g$.

(09) Con relación al problema anterior considere la dilatación del vidrio, si el coeficiente de dilatación del vidrio lineal es $10^{-5}\ °C^{-1}$. Halle la cantidad de mercurio que queda en el recipiente.

Solución:

El volumen derramado, cuando se considera la dilatación del vidrio.

$$\Delta V = V_{f\,Hg} - V_{f\,v} = V_0 (1 + \beta \Delta t) - V_0 (1 + 3\alpha_v\, \Delta t)$$

$$\Delta V = V_0 (\beta - 3\alpha_v)\, \Delta t$$

$$\Delta V = \frac{500}{13{,}6} (1{,}8 - 3 \times 0{,}1) \times 10^{-4}\, (120 - 0)$$

$$\Delta V = 0{,}66 cm^3 \quad , \quad \Delta m = \rho \Delta V$$

La masa derramada: $\Delta m = 13{,}6 \times 0{,}66 = 8{,}99 g$.

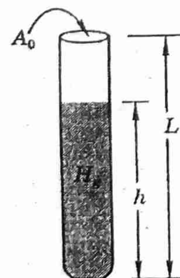
La masa que queda en el recipiente: $500 - 8{,}99 g = 491{,}0 g$

(10) Un recipiente de vidrio pirex $(3 \times 10^{-6}\ °C^{-1})$ cuya altura es de $20 cm$. hay mercurio a $20\ °C$ y le falta $2 mm$ para llegar al borde del recipiente. ¿A qué temperatura se debe calentar el mercurio, para que no se derrame del recipiente?

Solución:

Considerando la dilatación del vidrio:

$$\Delta V = A_0 (L - h) \quad y \quad \Delta = V_0 (\beta_{Hg} - 3\alpha_v)\, \Delta t$$



La condición es que no se derrame:

$$A_0 (L - h) = V_0 (\beta_{Hg} - 3\alpha_v)\, \Delta t$$

$$A_0 (L - h) = A_0\, h\, (\beta_{Hg} - 3\alpha_v)\, \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{L - h}{h\, (\beta_{Hg} - 3\alpha_v)}$$

$$\Delta t = \frac{202 - 200}{200\, (1{,}8 \times 10^{-4} - 3 \times 3 \times 10^{-6})}$$

$$\Delta t = 58{,}5\ °C \quad , \quad t - 20\ °C = 58{,}5\ °C\, t = 78{,}5\ °C$$

(11) Un alambre de fierro de $5 mm$. de diámetro, es sometido a una tracción debido a una fuerza, este alargamiento es el mismo que se conseguiría si se elevara la temperatura a $30\ °C$. Hallar el valor de esta fuerza.

Solución:

Se conoce: $d = 5 \times 10^{-3}\ m$, $E = 20 \times 10^{10}\ N/m^2$

$\alpha = 1{,}2 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$, $\Delta t = 30\ °C$

El alargamiento debido a la tracción está dado por: $\Delta L = F L_0 / SE$ .... (1)

La dilatación debido al aumento de temperatura: $\Delta L = L_0\, \alpha\, \Delta t$ .... (2)

Por condición del problema: $\frac{F L_0}{SE} = L_0\, \alpha\, \Delta t$, $F = SE\, \alpha\, \Delta t$

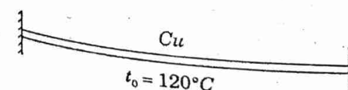
$$F = \frac{\pi}{4} (5 \times 10^{-3})^2\, (20 \times 10^{10})\, (1{,}2 \times 10^{-5})\, (30)$$

$$F = 1413\ N = 144{,}2\ kg f$$

(12) Un alambre de cobre se fijó entre dos paredes fijas resistentes estando a la temperatura de $120\ °C$. ¿A qué temperatura se romperá el alambre al enfriarse? Considere que la ley de Hooke se cumple hasta el momento en que se produce la rotura. Se conoce:

$E = 13 \times 10^{10} N/m^2$, $\alpha = 1{,}6 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$, $\sigma_r = 2{,}45 \times 10^8\ N/m^2$

Solución:



Se tiene por el esfuerzo:

$$\Delta L = \frac{\sigma_r\, L_0}{E} \quad .... \quad (1)$$

Por efecto de incremento de temperatura: $\Delta L = \alpha L_0 \Delta t$ .... (2)

De (1) y (2): $\Delta t = \frac{\sigma_r}{\alpha E}$

Reemplazando valores: $\Delta t = \frac{2{,}45 \times 10^8}{1{,}6 \times 10^{-5} \times 13 \times 10^{10}} = 117{,}8\ °C$

$120 - t = 117{,}8\ °C \quad , \quad t = 2{,}2\ °C$

(13) Qué longitudes deberán tener respectivamente a 0 °C una barra de aluminio y otra de zinc para que a cualquier temperatura la barra de aluminio sea 3cm. más larga que la de zinc. ($\alpha_{Zn} = 2{,}9 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$, $\alpha_{Al} = 2{,}3 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$)

Solución:

Sea L_{oz}: longitud inicial de la barra de Zn a 0 °C

α_{fz} : " final " " "

L_{oA} : longitud inicial de la barra de Al a 0 °C

L_{fA} : " final " " "

Luego: Para el Zn: $L_{fz} = L_{oz}\,[1 + \alpha_{zn}\,(t - 0)]$

Para el Al: $L_{fA} = L_{oA}\,[1 + \alpha_{Al}\,(t - 0)]$

Según condiciones del problema: $L_{fA} - L_{fZ} = 3cm.$, par $t = t$

$L_{OA}\,[1 + \alpha_{Al}\,t] - L_{oZ}\,[1 + \alpha_{Zn}\,t] = 3$

$(L_{OA} - L_{OZ}) + (L_{OA}\,\alpha_{Al} - L_{OZ}\,\alpha_{Zn}) = 3$

Se cumple también $L_{OA} - L_{OZ} = 3$ .... (1)

para $t = t_0 = 0\ °C$

Luego: $3 + (L_{OA}\,\alpha_{Al} - L_{OZ}\,\alpha_{Zn}) = 3$

$L_{OA}\,\alpha_{Al} - L_{OZ}\,\alpha_{Zn} = 0$

$L_{OA} = L_{OZ}\frac{\alpha_{Zn}}{\alpha_{Al}} = L_{OZ}\frac{2{,}9 \times 10^{-5}}{2{,}3 \times 10^{-5}}$

$L_{OA} = \frac{29}{23} L_{OZ}$ .... (2)

De (2) en (1): $\frac{29}{23} L_{OZ} - L_{OZ} = 3$

$L_{OZ} = \frac{3 \times 23}{29 - 23} = 11{,}5\ cm$

$L_{OA} = \frac{29}{23} \times 11{,}5\ cm = 14{,}5\ cm$

(14) Los carriles de ferrocarriles se sueldan por sus extremos, formando un carril continuo. Si el riel se soldó un día de verano, en el cual la temperatura era de 28 °C. Qué valor tiene la tensión de tracción en invierno, cuando la temperatura es de (−5 °C).

Solución:



Se conoce: $\alpha_{Fe} = 1{,}2 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$

$E_{Fe} = 20 \times 10^{10}\ N/m^2$

Relacionando las dos expresiones: $\Delta L = \frac{\sigma L_0}{E}$, $\Delta L = L_0\,\alpha\,\Delta t$

$\frac{\sigma L_0}{E} = L_0\,\alpha\,\Delta t \quad , \quad \sigma = \alpha E \Delta t$

$\sigma = 1{,}2 \times 10^{-5}\,(20 \times 10^{10})\,[28 - (-5)]$

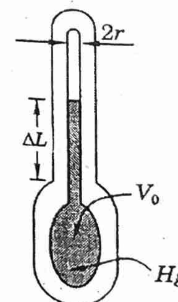
$\sigma = 0{,}792 \times 10^8\ N/m^2$

Que es menor que la tensión a la rotura para el fierro: $7{,}85 \times 10^8\ N/m^2$

(15) Se construye un termómetro usando un bulbo de vidrio, un tubo capilar de radio 0,1mm (interior) y mercurio. Que volumen debe tener el bulbo (ampolla) para que el intervalo de temperatura de 0 °C a 120 °C, el mercurio se dilate y cubra una distancia de 12cm.

$\beta_{Hg} = 1{,}8 \times 10^{-4}\ °C$, $\alpha_v = 0{,}9 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$

Solución:



Se conoce: $r = 0{,}1mm = 10^{-4}\,m$

Sea V_0 : el volumen inicial del bulbo.

El mercurio se dilata al igual que el vidrio.

El volumen de mercurio que se dilata, considerando el vidrio es:

$$\Delta V = V_0\,(\beta_{Hg} - 3\alpha_v)\,\Delta t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

En el capilar: $\Delta V = \pi r^2 \Delta L$ .... (2)

Igualando las expresiones (1) y (2): $V_0(\beta_{Hg} - 3\alpha_v)\Delta t = \pi r^2 \Delta L$

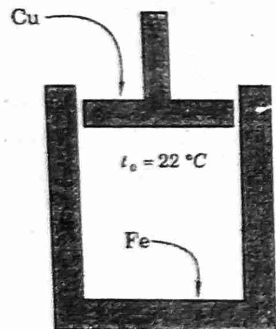
$$V_0 = \pi r^2 \Delta L / (\beta_{Hg} - 3\alpha_v)\Delta t$$

$$V_0 = \frac{3{,}14\,(10^{-4})^2\,0{,}12}{(1{,}8\times10^{-4} - 2{,}7\times10^{-5})100}\,m^3$$

$$V_0 = 2{,}46\times10^{-7}\,m^3$$

(16) Un pistón de cobre se mueve en un cilindro de fierro de radio 10,125*cm.* a 22 °C, la diferencia entre los diámetros del cilindro y del pistón es de 0,0125*cm*. Qué temperatura (incremento) debe de darse al pistón y al cilindro para que la diferencia de diámetro sea nula. $\alpha_{cu} = 1{,}6\times10^{-5}\,°C^{-1}$ y $\alpha_{fe} = 1{,}2\times10^{-5}\,°C^{-1}$

Solución:



La condición del problema es: $R_{f\,Fe} = R_{f\,Cu}$

Radio final del fierro igual al radio final del cobre.

$$R_{o\,Fe}\,[1 + \alpha_{Fe}\,\Delta t] = R_{o\,Cu}\,[1 + \alpha_{Cu}\Delta t]$$

$$R_{o\,Fe} - R_{o\,Cu} + R_{o\,Fe}\,\alpha_{Fe}\,\Delta t - R_{o\,Cu}\,\alpha_{Cu}\,\Delta t = 0$$

$$\Delta t = \frac{R_{oFe} - R_{oCu}}{R_{o\,Cu}\,\alpha_{Cu} - R_{o\,Fe}\,\alpha_{Fe}}$$

$$\Delta t = \frac{10{,}125 - 10{,}119}{10{,}119\times1{,}6\times10^{-5} - 10{,}125\times1{,}2\times10^{-5}}$$

$$\Delta t = 148{,}5\,°C$$

Donde se ha usado:

$R_{oFe} = 10{,}125cm.$ (Radio inicial del Fe)

$R_{oCu} = 10{,}125 - \frac{0{,}0125}{2} = 10{,}119$ cm. (Radio inicial del Cu)

(17) Se utiliza una cinta métrica de acero para medir una varilla de cobre a la temperatura de 20 °C y resulta ser de 87*cm*. Cuál será la longitud que medirá la cinta para la longitud de la varilla a 5 °C y 35 °C.

Solución:

Sea la longitud de la cinta de acero de 1*m*. y la longitud del cobre a 20 °C es de 87*cm*., luego la relación de longitudes a esta temperatura es:

$$\frac{L_0\,Cu}{L_0\,ac} = \frac{87\,cm.}{100\,cm.} = 0{,}87 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

La longitud final de la varilla de Cu a la temperatura *t* es:

$$L_f\,Cu = L_0\,Cu[1 + \alpha_{Cu}(t - 20)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

La longitud final de la cinta de acero a la temperatura *t* es:

$$L_{fac} = L_{o\,ac}\,[1 + \alpha_{ac}(t - 20)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Dividiendo (2) ÷ (3): $\frac{L_{f\,Cu}}{L_{f\,ac}} = \frac{L_{o\,Cu}\,[1 + \alpha_{Cu}(t-20)]}{L_{o\,ac}\,[1 + \alpha_{ac}(t-20)]}$

Usando (1) y $\alpha_{ac} = 1{,}06\times10^{-5}\,°C^{-1}$

$\alpha_{Cu} = 1{,}6\times10^{-5}\,°C^{-1}$

y $t = 5\,°C$

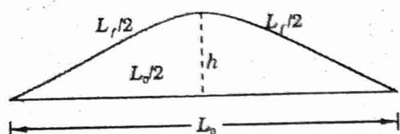
$$\frac{L_{f\,Cu}}{L_{f\,ac}} = \frac{0{,}87\,[1 + 1{,}6\times10^{-5}\,(5-20)]}{[1 + 1{,}06\times10^{-5}\,(5-20]} = 0{,}8699\,m \qquad L_{f\,Cu} = 86{,}99\,cm$$

para $t = 35\,°C$

$$\frac{L_{f\,Cu}}{L_{f\,ac}} = 0{,}87\frac{[1 + 1{,}6\times10^{-5}\,(35-20)]}{[1 + 1{,}06\times10^{-5}\,(35-20)]} = 0{,}8701\,m \qquad L_{f\,Cu} = 87{,}01\,cm$$

(18) Una vía de ferrocarril de acero y de 2*km*. de longitud esta fija (completamente asegurada) en sus extremos para una temperatura de 27 °C Cuando la temperatura del medio sube a 32 °C, cuál es la altura que se eleva la vía suponiendo que adquiere una forma triangular.

Solución:



Hallemos la longitud final debido al incremento de la temperatura:

$$L_f = L_0\,[1+\alpha_{ac}\ \Delta t\,]$$

$$L_f = 2\times 10^3\,[1+1{,}06\times 10^{-5}\times 5\,]\,m$$

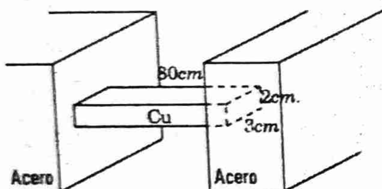
$$L_f = 2000{,}106\ m$$

Luego para hallar h : $h=\sqrt{(L_f/2)^2-(L_0/2)}$

$$h=\sqrt{(2000{,}106/2)^2-(2000/2)^2}=10{,}926\ m$$

(19) Una varilla de cobre de sección rectangular $2\times 3cm^2$ y longitud de $80cm$. y temperatura 27 °C, se sitúa horizontalmente entre dos paredes verticales de acero. Mediante un mechero se eleva la temperatura de la varilla a 50 °C. Hallar la fuerza que ejerce la varilla sobre cada pared.

Solución:



Sabemos que la relación por elasticidad:

$$F = EA\frac{\Delta L}{L_0}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (1)$$

Por dilatación:

$$\Delta L = L_0\,\alpha\,\Delta t\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (2)$$

De (2) en (1): $F=EA\alpha\,\Delta t$

Reemplazando valores:

$$F = 13\times 10^{10}\times 6\times 10^{-4}\times 1{,}6\times 10^{-5}(50-27)N$$

$$F = 28704\,N = 2928{,}9\,kg.$$

(20) Un reloj está constituido de una varilla de fierro con una gran masa en el extremo inferior (péndulo simple) y calibrado a 22 °C. Cuántos segundos se adelanta o retrasa en 12 horas en un día de verano cuando la temperatura es de 32°C.

Solución:

Sabemos la expresión del péndulo simple $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, el período aumenta cuando la longitud aumenta y esto sucede así debido al aumento de la temperatura. Luego el reloj avanza más lento y se retrasará.

$$T=2\pi\left(\frac{L}{g}\right)^{1/2}\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (1)$$

$$\Delta T=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\left(\frac{1}{2}\right)L^{-1/2}\Delta L\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (2)$$

Dividiendo (2) ÷ (1): $\frac{\Delta T}{T}=\frac{\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\left(\frac{1}{2}\right)L^{-1/2}\Delta L}{\frac{2\pi}{\sqrt{g}}L^{1/2}}=\frac{1}{2}\frac{\Delta L}{L}$

Sabemos: $\frac{\Delta L}{L}=\alpha\,\Delta t$

$$\frac{\Delta L}{L}=1{,}2\times 10^{-5}(32-22)=12\times 10^{-5}$$

Reemplazando en (3): $\frac{\Delta T}{T}=\frac{1}{2}(12\times 10^{-5})=6\times 10^{-5}$

En 12 horas el intervalo de tiempo que se retrasa el reloj será:

$$\Delta T=(12\times 3600s)\times 6\times 10^{-5}$$

$$\Delta T=2{,}59s.$$

CALOR, PROPIEDADES DE LOS GASES

(01) Un recipiente cerrado de aluminio cuya masa es de 400g, contiene 500g de agua y 50g de hielo todo a 0°C, se deja caer el conjunto desde un avión que iba a 100m/s y se encuentra que su temperatura aumenta en 20°C. Suponiendo que durante el choque no se comunica energía al suelo. Cuál es la velocidad del conjunto un instante antes del choque?

Solución:

En este caso el cambio de energía cinética se convierte en energía calorífica para fundir el hielo y el conjunto elevar su temperatura en 20°C.

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}m\upsilon^2 - \tfrac{1}{2}m\upsilon_0^2 = Q$$

Hay que expresar la energía cinética en calorías.

$$\frac{m\upsilon^2}{2\times 4{,}186} - \frac{m\upsilon_0^2}{2\times 4{,}186} = Q$$

$$\upsilon^2 = \frac{2\times 4{,}186\,Q}{m} + \upsilon_0^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

y $\quad m = m_{Al} + m_a + m_{Hi} = 950g.$

donde: $\quad Q\left(m_{Al}\,Ce_A + m_a\,Ce + \frac{m_{Hi}\,L_f}{\Delta t} + m_{Hi}\,Ce_a\right)\Delta t$

reemplazando valores: $\quad Q = \left(400\times 0{,}217 + 500\times 1 + \frac{50\times 80}{20} + 5\times 1\right)20$

$$Q = 16736\,cal$$

reemplazando en (1): $\quad \upsilon = \sqrt{\frac{2\times 4{,}186\,(16736)}{950} + (100)^2}\ \frac{m}{s}$

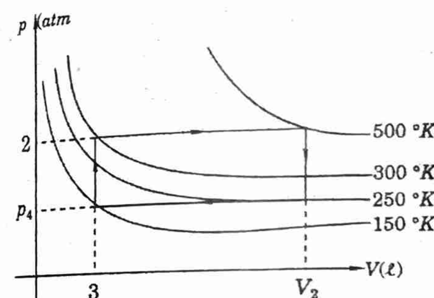
$$\upsilon = 100{,}73\,m/s$$

(02) Un cilindro contiene oxígeno a la presión de 2atm, el volumen es de 3ℓ y la temperatura 300 °K. Si se somete el oxígeno a los siguientes procesos:

1°) Se calienta a presión constante hasta 500 °K
2°) Se enfría a volumen constante hasta 250 °K
3°) Se enfría a presión constante hasta 150 °K
4°) Se calienta a volumen constante hasta 300 °K

a) Representa gráficamente los procesos y halle la presión y el volumen al final de cada proceso.
b) Hállese el trabajo neto realizado por el gas.
c) Calcúlese el calor neto que fluye hacia el oxígeno
d) Cuál es el rendimiento de este dispositivo como motor térmico.

Solución:



a) Se representa el gráfico del ciclo.

Comparando los estados (1) y (2):

$$p_1 V_1 = n R T_1 \quad y \quad p_2 V_2 = n R T_2$$

$$V_2 = V_1(T_2/T_1) = 3\,(500/300) = 5\ell$$

Comparando los estados (1) y (4):

$$p_1 V_1 = n R T_1 \quad y \quad p_4 V_4 = n R T_4$$

$$p_4 = p_1\frac{T_4}{T_1} = \frac{2\times 150}{300} = 1atm$$

b) Para hallar el trabajo neto se evalúa el área encerrada por el ciclo:

$W = (2-1)atm \times (5-3)\ell \qquad W = 2atm - \ell = 2\times 24{,}2cal = 48{,}4cal.$

c) El calor que fluye al oxígeno en los procesos:

$$(4) \longrightarrow (1):\quad Q_4$$

y $\quad (1) \longrightarrow (2):\quad Q_1$

$Q_4 = m\,C_v\,\Delta T \quad y \quad Q_1 = n\,C_p\,\Delta T$

debemos hallar el número de moles: $\quad p_1 V_1 = n R T_1 \;,\; n = \frac{2\times 3}{0{,}08207\times 300}$

$$n = 0{,}244moles$$

Para el oxígeno: $\quad C_V = 5\ cal/mol - °K \qquad C_p = 7\ cal/mol - °K$

$$Q_4 = 0{,}244\times 5\times(300-150) = 183cal$$

$$Q_1 = 0{,}244\times 7\times(500-300) = 341{,}6cal$$

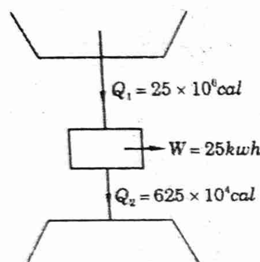
Luego el calor total absorbido es: $\quad Q = Q_1 + Q_1 = 183 + 341{,}6cal = 524{,}6cal$

d) Por definición de rendimiento: $n = \frac{W_{neto}}{Q_1 + Q_4} = \frac{48{,}4\,cal}{525{,}6\,cal} = 0{,}09$

$n = 9\%$

(03) Una persona sostiene que ha inventado un motor que toma 25×10^6 *cal* de su abastecimiento de combustible, cada 625×10^4 *cal* en el escape o pérdida y suministra 25*kwh* de trabajo mecánico. ¿Es recomendable invertir en este motor?

Solución:



Expresemos el trabajo en calorías:

$W = 25 \times 10^3 \times 3600\ J$

$W = \frac{25 \times 36}{4{,}186} \times 10^5\ cal$

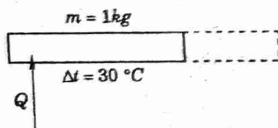
$W = 3010 \times 10^4\ cal$

$W = 30{,}1 \times 10^6\ cal$

Se puede observar que realiza trabajo en una cantidad mayor que la energía que recibe: $Q_1 < W$ y esta situación no puede presentarse, porque el rendimiento sería mayor que uno.

(04) Una barra de cobre de 1*kg* se calienta a presión atmosférica, si la temperatura aumenta de 20 °C a 50 °C. Hallar (a) el trabajo realizado por el cobre (b) la cantidad de calor que se transfiere al cobre. (c) Cuál es el incremento de energía interna del cobre.

Solución:



Por ser un proceso isobárico, el trabajo se halla así:

$W = p\Delta V = p(V_0\, \beta\, \Delta t)$

$W = p\left(\frac{m}{\rho}\right)\beta\,\Delta t$ .... (1)

donde:
$p = 1atm = 1{,}013 \times 10^5\ N/m^2$
$m = 1kg \quad , \quad \rho = 8{,}92 \times 10^3\ kg/m^3$
$\beta = 5{,}1 \times 10^{-5}\ °C^{-1}$
$\Delta t = 50 - 20 = 30\ °C$

Reemplazando valores en (1): $W = 0{,}017\ J = 0{,}00415\ cal$

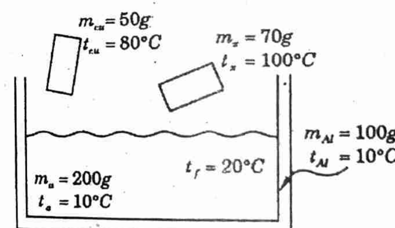
b) Por definición: $Q = m\ C_e\ \Delta t$; $Q = 10^3 \times 0{,}094 \times 30cal = 2820cal$

c) $\Delta V = Q - W$

$\Delta V = 2820 - 0{,}00415cal = 2819{,}99cal.$

(05) Un calorímetro de aluminio con una masa de 100*g* contiene 250*g* de agua están en equilibrio térmico a 10 °*C*. Se colocan dos trozos de metal en el agua, uno de ellos es de 50*g* de cobre a 80 °*C* y el otro una masa de 70*g* a una temperatura de 100 °*C*, el sistema se estabiliza a una temperatura final de 20 °*C* Halle el calor específico de la muestra desconocida.

Solución:



Por el principio de conservación de energía calorífica.

El calor perdido por el cobre y la muestra desconocida: $Q_p\ (Cu + x)$

Es igual al calor ganado por el agua y el aluminio:

$Q_g(Al + Ag)$

$Q_{p(Al + Ag)} = Q_{p(Cu + x)}$

$m_a\ C_{ea}\,(t_f - t_0) + m_{Al}\ C_{e\,Al}\,(t_f - t_0)$

$m_{cu}\ C_{e\,Cu}\,(t_{Cu} - t_f) + m_x\ C_{ex}\,(t_x - t_f)$

Reemplazando valores:

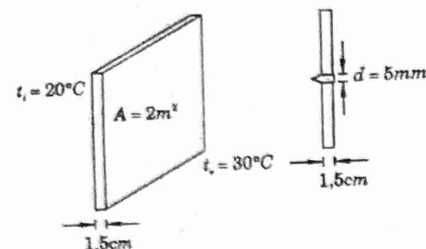
$200 \times 1 \times (20 - 10) + 100 \times 0{,}215\ (20 - 10)$

$50 \times 0{,}092\ (80 - 20) + 70 \times C_{ex}\ (100 - 80)$

$2000 + 215 = 276 + 5600\ C_{ex}$; $C_{ex} = 0{,}346\ cal/g - °C$

(06) Una tabla de madera de área $2m^2$ y espesor 1,5*cm*, sirve como una pared entre un cuarto a 20°*C* y el exterior a 30°*C*. ¿Cuántos clavos de acero de 1,5*cm* de longitud y 5*mm* de diámetro se deben clavar sobre la tabla para que el flujo de calor a través de la tabla se duplique?.

Solución:



Hallemos el flujo de calor que pasa por la madera:

$$\dot{Q}_m = -Km\,A\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\dot{Q}_m = -0{,}08\frac{J}{s-m-°C}\times 2cm^2\left(-\frac{10\,°C}{1{,}5\times 10^{-2}\,m}\right)$$

$$\dot{Q}_m = 106{,}7\,J/s$$

El flujo de calor que pasa a través de un clavo de fierro:

$$\dot{Q}_c = -K_c\,A\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\dot{Q}_c = -58{,}6\times\frac{3{,}14\,(5\times 10^{-3})^2}{4}\;\frac{(-10\,°C)}{1{,}5\times 10^{-2}}$$

$$\dot{Q}_c = 0{,}77\,J/s$$

Según condición del problema si n es el número de clavos:

$$n\dot{Q}_c = 2\dot{Q}_n$$

$$n = \frac{2\times 106{,}7}{0{,}77} = 277\;clavos$$

(07) Al calentar una masa de 800g de cobre cuya temperatura era de 20°C se ha gastado 20Kcal. ¿En cuánto habrá aumentado su volumen?

Solución:

Se necesita hallar la relación: $\frac{V_f}{V_0}$

$\frac{V_f}{V_0} = 1 + \beta\,\Delta t$, es necesario conocer el incremento de temperatura: Δt

$$C_e = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m\,\Delta t} \quad , \quad \Delta t = \frac{Q}{m\,C_e}$$

$$\Delta t = \frac{20\times 10^3}{800\times 0{,}094} = 265{,}9°C$$

Se conoce $\beta_{cu} = 3\times 1{,}6\times 10^{-5}\,°C^{-1}$

$$\frac{V_f}{V_0} = 1 + 3\times 1{,}6\times 10^{-5}\times 265{,}9$$

$$\frac{V_f}{V_0} = 1 + 0{,}012 = 1{,}012$$

El volumen habrá aumentado en 1,012 veces el volumen inicial.

(08) Si una masa líquida de capacidad calorífica de 40 J/°C, se le somete a un aumento de temperatura de 81°F. ¿Cuántas calorías se le dio a la masa?.

Solución:

Hay que usar la relación $AQ = C\,\Delta t$, donde Δt se expresa en °C.

Sabemos: $\Delta t\,(°C) = \frac{5}{9}\Delta t(°F)$

$$\Delta t(°C) = \frac{5}{9}\times 81 = 45\,°C$$

Reemplazando: $\Delta Q = 40\,\frac{J}{°C}\times 45\,°C$

$$\Delta Q = 1800\,J = 430\,cal$$

(09) Si el calor específico de una sustancia varía en función de la temperatura $C_e = At^2 - Bt + D$ (cal/g – °C), donde A, B y D son constantes. Hallar el calor absorbido por una masa (g) cuando su temperatura varía de t_1 a t_2 (°C).

Solución:

Usando la relación: $\Delta Q = m\int_{t_1}^{t_2} C_e\,dt$

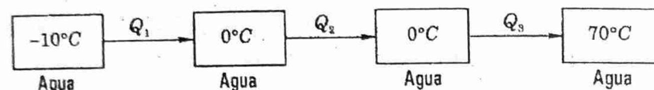
$$\Delta Q = m\left[A\int_{t_1}^{t_2} t^2dt - B\int_{t_1}^{t_2} t\,dt + D\int_{t_1}^{t_2} dt\right]$$

$$\Delta Q = m\left[\frac{A}{3}(t_2^3 - t_1^3) - \frac{B}{2}(t_2^2 - t_1^2) + D(t_2 - t_1)\right]$$

(10) Se tienen $50g$ de hielo a $(-10°C)$. (a) Qué cantidad de calor es necesario para llevarlo a $70°C$ en estado líquido. (b) A $100°C$ en estado de ebullición del agua (c) A $100°C$ de vapor de agua.

Solución:

a) El proceso es el siguiente:



$Q_1 = m_{Hi}\, Ce_{Hi}\, \Delta t = 50 \times 0{,}5 \times [0 - (-10)] = 250cal$

$Q_2 = m_{Hi}\, L_f = 50 \times 80 = 4000cal$

$Q_3 = m\, Ce_a\, \Delta t' = 50 \times 1 \times (70 - 0) = 3500cal.$

El calor solicitado es: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ $\quad$ $\boldsymbol{Q = 7750cal}$

b) Al calor anterior ($7750cal$) hay que agregar el calor Q_4

Donde: $Q_4 = m\, Ce_a\, \Delta t''$

$Q_4 = 50 \times 1 \times (100 - 70) = 1500cal$

Luego: $Q' = Q + Q_4 = \boldsymbol{9250cal}$

c) Se debe agregar al calor ($9250cal$) el calor Q_5 para pasar de agua a $100°C$ a vapor a $100°C$:

$Q_5 = m\, L_v = 50 \times 540$

$Q_5 = 27000cal$

Luego: $Q' = 9250 + Q_5 = 36250cal$

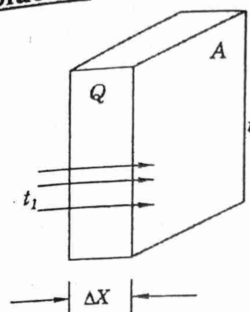
(11) Se tiene un ladrillo de cobre de $0{,}25m^2$ y espesor $10cm$, una de sus caras está a $20°C$ y la cara opuesta está a $100°C$. Hallar

(a) La gradiente de temperatura;

(b) El flujo calorífico en (cal/s);

(c) El calor que transfiere en 30 minutos a través de las caras opuestas.

Solución:



a) Se conoce: $A = 0{,}25m^2$

$t_1 = 100°C \quad , \quad t_2 = 20°C$

$K = 93{,}17 \frac{cal}{S-m-C} \quad ; \quad \Delta x = 0{,}10m$

Por definición de gradiente:

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{20 - 100\,°C}{0{,}1\,m} = -80\frac{°C}{m}$$

b) $\dot{Q} = -K\,A\frac{\Delta T}{\Delta X} = -93{,}17 \times 0{,}25(-80)$

$\dot{Q} = 1863{,}4\, cal/s$

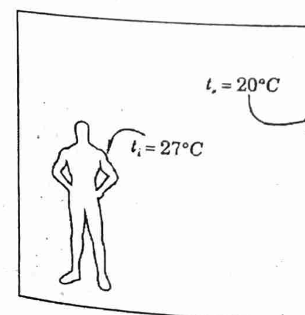
c) $Q = \dot{Q}t = 1863{,}4 \times 30 \times 60\, cal$

$Q = 3{,}35 \times 10^3\ Kcal$

(12) Una habitación está a la temperatura de $20°C$ y la temperatura de la piel de una persona desnuda en reposo en la habitación es de $27°C$. ¿Cuál es la velocidad neta de pérdida de calor por radiación del cuerpo de la persona, si el área de la superficie de la persona (todo el cuerpo) es $1{,}85m^2$? Se conoce la emisividad $e = 0{,}97$.

Solución:

El cuerpo emite calor y gana calor de la pared y la velocidad neta de pérdida de calor es: $P = R\,A$



$R = e\,\sigma(T_i^4 - T_e^4)$

$T_i = 27 + 273 = 300\,°K T_e = 20 + 273 = 293\,°K$

$R = 0{,}97 \times 5{,}67 \times 10^{-8}\,[(300)^4 - (293)^4]$

$R = 40{,}1\ W/m^2$

$P = 40{,}1 \times 1{,}85 = 74{,}2W$

(13) Una persona de 55kg de peso aumenta su pérdida de calor a 350W mientras camina. Si su cuerpo pierde calor a 300W Cuando está en reposo. En cuanto aumenta su temperatura interna en 30 minutos.

Solución:

La velocidad neta de ganancia de calor es: $350 - 300 = 50W$

De modo que el calor que pierde el cuerpo en 30 minutos es:

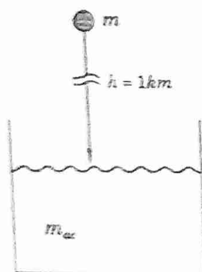
$$Q = 50 \times 30 \times 60 = 9 \times 10^4 J = 21500cal$$

El aumento de temperatura del cuerpo es: $Q = m\, C_e\, \Delta t$

$$\Delta t = \frac{Q}{m\, C_e} = \frac{9 \times 10^4}{55 \times 10^9 \times 0{,}83 \times 4{,}186} = 0{,}47\ °C$$

(14) Una esfera de acero de 0,5kg cae desde una altura de 1000m. en un recipiente que posee 3kg. de aceite, ¿en cuanto se eleva la temperatura del aceite? $C_e = 0{,}9\ cal/g - °C$

Solución:



La esfera tiene energía potencial, al caer en el aceite convierte su energía en cinética y está en calorífica.

Su energía potencial gravitatoria es:

$$E_p = m\, g\, h = 0{,}5 \times 9{,}8 \times 1000\ J$$

Su equivalente en energía calorífica es:

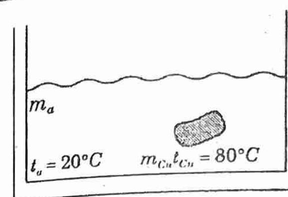
$$Q = E_p = \frac{0{,}5 \times 9{,}8 \times 1000}{4{,}186} cal = 1170{,}5\ cal$$

La elevación de la temperatura está dada por: $Q = m\, C_e\, \Delta t$

$$\Delta t = \frac{Q}{m\, C_e} = \frac{1170{,}5}{3000 \times 0{,}9} = 0{,}43°C$$

(15) En un calorímetro de aluminio de 500g se deposita 200g de agua a la temperatura de 20°C. Se introduce en el agua 100g de cobre a la temperatura de 80°C. Hallar (a) La temperatura final o de equilibrio. (b) El calor ganado por el agua (c) El calor ganado por el calorímetro y (d) El calor perdido por el cobre.

Solución:



a) El calor perdido por el cobre es igual al calor ganado por el agua y el aluminio.

$$Qg_{agua} + Qg_{Al} = Qp_{Cu}$$

$$m_a Ce_a (t_X - t_a) + m_{Al} Ce_{Al} (t_x - t_a) = m_{Cu} Ce_{Cu} (t_{Cu} - t_x)$$

$$200 \times 1 \times (t_x - 20) + 500 \times 0{,}214 (t_x - 20) = 1000 \times 0{,}094 (80 - t_x)$$

Simplificando: $t_x = 21{,}78°C$

b) $Qg_{agua} = 200 \times 1 \times (21{,}78 - 20)cal = 356cal$

c) $Qg_{Al} = 500 \times 0{,}214\ (21{,}78 - 20)cal = 190{,}46cal$

d) $Qp_{cu} = 100 \times 0{,}094\ (80 - 21{,}78)cal = 547{,}27cal$

(16) ¿Cuál es la capacidad calorífica de una olla de fierro de 250g?

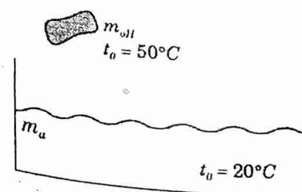
Solución:

Sabemos por teoría la capacidad calorífica Ca: $C = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{m\, Ce\, \Delta t}{\Delta t} = m\, Ce$

$$C = 250\, g \times 0{,}119 \frac{cal}{g - °C} = 29{,}75 \frac{cal}{°C}$$

(17) Cien gramos de etanol a una temperatura de 50°C se depositan en un recipiente que contiene 1,5kg. de agua a una temperatura inicial de 20°C si la temperatura final o de equilibrio es de 20,26°C. Hallar el calor específico del etanol (despreciando el calorímetro o recipiente).

Solución:



También calor perdido por el etanol es igual al calor ganado por el agua: $Qp = Q_g$

$$m_{oH} Ce_{oH} (t_0 - t_x) = m_a Ce_a (t_x - t_a)$$

$$100 \times Ce_{oH} (50 - 20{,}26) = 1500 \times 1 \times (20{,}26 - 20)$$

$$Ce_{oH} = 0{,}131 cal/g - °C$$

(18) Un clavo de 15g es golpeado por un martillo de 500g que tiene una velocidad de $5m/s$ cuando choca con el clavo. Si la tercera parte de la energía cinética del martillo se convierte en energía térmica del clavo. Cuántos golpes de martillo se tienen que dar para elevar la temperatura del clavo a $10°C$.

Solución:

Hallemos la energía cinética del martillo: $E_C = \frac{1}{2}MV^2$ en Joules convirtiendo en calorías:

$$\frac{n}{3}\left(\frac{MV^2}{2\times 4{,}186}\right) = Q = m_C\, Ce_C\, \Delta t$$

donde n : número de golpes

m : masa del clavo de fierro.

Reemplazando valores: $n = \frac{6\times 4{,}186\times m_c\, Ce_c\, \Delta t}{M\,V^2}$

$$n = \frac{6\times 4{,}186\times 15\times 0{,}119\times 10}{0{,}5\,(10)^2} = 9\,\text{golpes}$$

(19) Una barra de cobre de 1m de longitud y de sección rectangular $2\times 3cm^2$, uno de sus extremos está a una temperatura de $100°C$ y el otro a $20°C$. Hallar el calor que pasa a través de la barra en 15 minutos .

Solución:

De la definición: $Q = -K\,A\left(\frac{\Delta T}{\Delta X}\right)t$

$$Q = -93{,}17\frac{cal}{s-m-°C}\times 6\times 10^{-4}m^2\,\frac{(20-100)\,°C}{1\,m}\times 15\times 60s$$

$$Q = 4025\,cal = 4{,}025\,K\,cal$$

(20) ¿Qué espesor de tejido graso del cuerpo es equivalente al aislamiento a $8mm$ de aire?

Si: $K_{grasa} = 0{,}2W/m-°C$ y $K_{aire} = 0{,}025\ W/m-°C$

Solución:

De la expresión $Q = -K\,A\frac{\Delta T}{\Delta X}$ la constante de conductividad varía directamente con el espesor luego: $\frac{K_g}{\Delta X_g} = \frac{K_{ai}}{\Delta X_{ai}}$

$$\Delta X_g = \left(\frac{K_g}{K_{ai}}\right)\Delta X_{ai}$$

Reemplazando valores: $\Delta X_g = \left(\frac{0{,}2}{0{,}025}\right)8mm = 64\,mm$

(21) El área exterior de las paredes y del techo de una vivienda es de $300m^2$ y su espesor es de $10cm$, construido de un material $K = 0{,}05W/m - °C$. Las ventanas de vidrio abarcan una superficie de $50m^2$ y de espesor $3mm$. La temperatura exterior a la casa es de $-5°C$ al interior de las paredes y el techo es de $3°C$ ($K_v = 0{,}8\ W/m - °C$). Hallar:

a) El flujo de calor a través de las paredes y el techo;

b) A través de las ventanas de vidrio.

Solución:

a) El flujo a través de las paredes y del techo es:

$$\dot{Q} = -K\,A\frac{\Delta T}{\Delta X} = -0{,}05\times 300\frac{(-5-20)}{0{,}01}$$

$$\dot{Q} = 3750\,W = 895{,}8\ cal/s$$

b) A través de las ventanas:

$$\dot{Q} = -0{,}8\times 50\frac{(-5-3)}{0{,}003} = 106666{,}7\,W$$

$$\dot{Q} = 25481\ cal/s$$

(22) La superficie de las paredes exteriores de un cuerpo es de $2m^2$ y está a una temperatura de $40°C$, recubierto con una sustancia cuya emisividad es de 0,5. Hallar (a) La velocidad de emisión de la radiación (b) A qué velocidad es absorbida la radiación por el cuerpo cuando se introduce en una habitación cuyas paredes están a una temperatura de $20°C$ (c) Cuál es la velocidad neta de la radiación procedente del cuerpo.

Solución:

Sabemos que la radiación está dada por: $R = e\ \sigma T^4\ (W/m^2)$

La velocidad de la radiación solicitada está dada por: $P = R\,A = e\ \sigma A\ T^4\ (W)$

a) $P_e = 0{,}5 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 2 \times (313)^4 = 544W$

b) $P_a = 0{,}5 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 2 \times (293)^4 = 417{,}9W$

c) $P' = P_e - P_a = 544 - 417{,}9W = 126{,}1W$

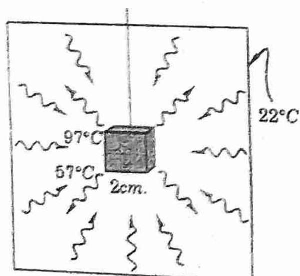
Se usó la equivalencia: $T_e = 40 + 273 = 313\ °K$

$T_a = 20 + 273 = 293\ °K$

$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ W/m^2 - °K$

(23) Un cubo de $2cm$ de lado, densidad $1{,}5g/cm^3$, calor específico $0{,}2cal/g - °C$ y emisividad 0,5; cuelga de un hilo aislante del calor, dentro de un recipiente en el cual se ha hecho el vacío y sólo se pierde calor por radiación, si la temperatura inicial de la esfera es de $97°C$ y la pared interior del recipiente está a una temperatura constante de $22°C$. (a) Cuál es la velocidad de pérdida del calor por radiación del cubo. (b) Con la rapidez que se pierde calor de la respuesta de "a" que tiempo tardará la esfera en pasar de $97°C$ a $87°C$. (c) Cuál es la velocidad de pérdida de calor del cubo a $57°C$. (d) Con la rapidez que se pierde calor de la respuesta "c", que tiempo tardará el cubo en pasar de $57°C$ a $47°C$.

Solución:



a) La velocidad de la perdida de calor está dado por:

$P_1 = e\ \sigma A\ T^4$

$P_1 = e\ \sigma 6\ a^2\ T^4$

$P_1 = 0{,}5 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 6 \times (2 \times 10^{-2})^2\ (370^4 - 295^4)$

$P_1 = 0{,}762\ W = 0{,}1818\ cal/s$

Se usó: $97 + 273 = 370\ °K$

$22 + 273 = 295\ °K$

b) El cubo al pasar de $97°C$ a $87°C$ pierde calor $Q_1 = m\ C_e\ \Delta t$

$Q_1 = \rho V C_e \Delta t$

$Q_1 = 1{,}5(2)^3 g \times 0{,}2 \frac{cal}{g - °C}(97 - 87)°C$

$Q_1 = 24\ cal$

Luego en 1 seg. se pierde $0{,}1818\ cal.$

t_1 ——— $24cal$

$t_1 = \frac{24}{0{,}1818}\ seg = 132\,s = 2{,}2\min$

c) En este caso:

$P_2 = 0{,}5 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 6\ (2 \times 10^{-2})\ (330^4 - 295^4)$

$P_2 = 0{,}2916\ W = 0{,}0696\ cal/s$

Se usó: $273 + 57 = 330°K$

d) Sabemos: $1seg. \longrightarrow 0{,}0696\ cal$

$t_2 \longrightarrow 24cal$

$t_2 = \frac{24}{0{,}0696} s = 344{,}82\,s = 5{,}75\min.$

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

(01) Cuanto trabajo realiza el sistema en una transformación adiabática si la variación de su energía interna es de $-350J$.

Solución:

Una transformación adiabática: $Q = 0$

$$\Delta U = Q - W \;;\; -350J = 0 - W \;;\; W = 350J$$

(02) Cuál es la variación de su energía interna de un sistema, para un proceso isobárico a $2atm$ y su volumen varía de 2000 a $5000cm^3$, si absorbe 50 J de calor.

Solución:

Por dato del problema $Q = 50J$

$$W = p(V_f - V_0) = 2 \times 1{,}013 \times 10^5\,(5-2) \times 10^{-3}\,J$$

$$W = 607{,}8\,J \quad , \quad \Delta U = Q - W = 50 - 607{,}8\,J$$

$$\Delta U = -557{,}8\,J$$

(03) Durante un proceso isócoro un sistema pierde $30J$ de calor. ¿Cuál es la variación de la energía interna del sistema?

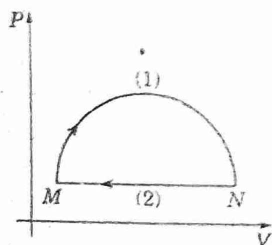
Solución:

Por ser un proceso isócoro: $W = 0$

$$Q = -30\,J \quad , \quad \Delta U = Q - W$$

$$\Delta U = -30\,J - 0\,J = -30\,J$$

(04) Un sistema gaseoso absorbe 500 J de calor y realiza un trabajo de 400 J cuando va de M a N según el camino (1) de la fig.



a) Cual es la variación de la energía interna del sistema.

b) Cuando el sistema regresa de N a M según (2) se realiza un trabajo sobre él de 200 J. ¿Cuál es el rendimiento del ciclo?

c) Qué cantidad de calor se libera en el proceso de N a M según (2)

Solución:

a) Según el proceso MN: $Q = 500\,J$,

$$W = 400\,J$$

$$\Delta U = Q - W = 500 - 400\,J = 100\,J$$

b) Para el proceso MN: $W = -200\,J$, por definición

$$\eta = \frac{\text{Trabajo neto}}{\text{Calor absorbido}} = \frac{400 + (-200)}{500} = 0{,}40$$

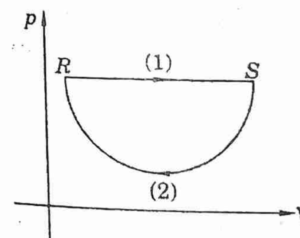
c) $\Delta U_{NM} = Q_{NM} - W_{NM}$

$$-100 = Q_{NM} - (-200)$$

$$Q = -300\,J$$

(05) Un gas absorbe 2000 J de calor cuando va de R a S según el camino (1) de la figura y elimina 1500 J de calor cuando regresa de S a R según el camino (2). (a) Cuál es el trabajo neto realizado en el ciclo. (b) Cuál es el rendimiento en el ciclo.

Solución:



a) En el ciclo: $\Delta U = Q - W = 0$

$$W = Q = Q_{RS} + Q_{SR}$$

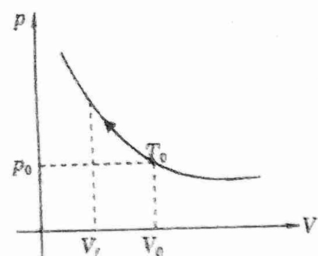
$$W = 2000 - 1500\,J$$

$$W = 500\,J$$

b) $\eta = \dfrac{\text{Trabajo neto}}{\text{Calor absorbido}} = \dfrac{500}{2000} = 0{,}25$

(06) Hallar el trabajo realizado para comprimir un gas de 20ℓ, $1{,}5atm.$ a 5ℓ, siendo el proceso isotérmico.

Solución:



Se conoce: $V_0 = 20\ell$, $V_f = 5\ell$

$p_0 = 1{,}5atm$

Considerando gas ideal:

$p_0 V_0 = \eta R T_0$

$$W = \int p dV = \int \frac{\eta R T_0}{V} dV = \eta R T_0 \int_{V_0}^{V_f} \frac{dV}{V}$$

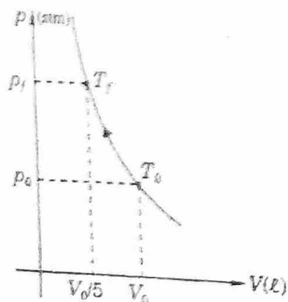
$$W = p_0 V_0 Ln(V_f / V_0)$$

$$W = 1{,}5 \times 1{,}103 \times 10^5 \times 20 \times 10^{-3} \operatorname{Ln}\left(\frac{5}{20}\right) J$$

$$W = -4213 J$$

(07) Se comprime adiabaticamente hasta la quinta parte de su volumen inicial, $3moles$ de un gas, si $\gamma = 1{,}67$, presión $1{,}5atm$. y temperatura a $37°C$. Hallar (a) la presión final (b) la temperatura final (c) El trabajo realizado sobre el gas.

Solución:



a) Se conoce $\gamma = 1{,}67$

$n = 3moles$, $p_0 = 1{,}5atm$

$T_0 = 37 + 273 = 310\ °K$

Se sabe para un proceso adiabatico.

$$p_0 V_0^\gamma = p_f V_f^\gamma \quad , \quad p_f = p_0 (V_0 / V_f)^\gamma$$

$$p_f = 1{,}5\left(\frac{V_0}{V_0/s}\right)^{1{,}67} = 22{,}0\,atm$$

b) Por ser gas ideal: $\frac{p_f V_f}{T_f} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \eta R$

$$T_f = \left(\frac{p_f}{p_0}\right)\left(\frac{V_f}{V_0}\right) T_0$$

$$T_f = \left(\frac{22}{1{,}5}\right)\left(\frac{V_0/5}{V_0}\right)(310°K) = 909{,}3°K$$

c) Para un proceso adiabático sabemos:

$$W = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1}[1 - (V_f / V_0)^{-\gamma + 1}]$$

$$W = \frac{\eta R T_0}{\gamma - 1}[1 - (V_f / V_0)^{-\gamma + 1}]$$

$$W = \frac{3 \times 8{,}31 \times 310}{1{,}67 - 1}[1 - (V_0 / 5V_0)^{-1{,}67 + 1}]$$

$$W = -22374{,}5J$$

(08) La masa de un gas ideal es de $20g$ y ocupa un volumen de 15ℓ a $27°C$ y a la presión atmosférica. Hallar (a) Su volumen a $100°C$ y $3atm$. (b) Si la temperatura es de $77°C$ y ocupa un volumen de 20ℓ, cuál es su presión (c) Si el volumen es 30ℓ y la presión de $1{,}5atm$, ¿cuál es su temperatura? (d) ¿El peso molecular del gas?.

Solución:

a) Se conoce: $m_0 = 2g$, $V_0 = 15\ell$, $p_0 = 1atm$, $T_0 = 273 + 27 = 300°K$

$T_f = 273 + 100 = 373°K$, $p_f = 3atm$.

Para hallar el volumen se usa la relación: $V_f = \left(\frac{p_0}{p_f}\right)\left(\frac{T_f}{T_0}\right) V_0$

$$V_f = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{373}{300}\right)(15) = 6{,}22\,\ell$$

b) $t'_f = 77 + 273 = 350\ °K$, $V'_f = 20\ell$

La presión final en este caso será: $p'f$

$$p'f = p_0\left(\frac{V_0}{V_f}\right)\left(\frac{T_f}{T_0}\right) = 1\left(\frac{15}{20}\right)\left(\frac{350}{300}\right)$$

$$p'f = 0{,}875\,atm$$

c) En este caso: $V''_f = 30\,\ell$, $p''_f = 1{,}5\,atm$

La temperatura final se halla así:

$$T''_f = \left(\frac{p_f}{p_0}\right)\left(\frac{V_f}{V_0}\right) T_0 = \left(\frac{1{,}5}{1}\right)\left(\frac{30}{15}\right) 300°K$$

$$T''_f = 900°K$$

d) Combinando las relaciones:

$$\eta = \frac{p_0 V_0}{RT_0} \quad \text{y} \quad \eta = \frac{m}{PM}$$

$$P.M. = \frac{mRT_0}{p_0 V_0} = \frac{20(0,08207)(300)}{1 \times 15}$$

$$P.M. = 32,8\, g/mol$$

(09) Un recipiente lleno de nitrógeno que tiene un volumen de 30ℓ y está a una presión de $10atm$. Por una abertura se extrae el nitrógeno, por ello la temperatura disminuye de $40°C$ hasta $15°C$ y la presión disminuye a $5atm$. ¿Cuánta masa de nitrógeno se retiró?

Solución:

Hallemos el número de moles al inicio: η_0

$$\eta_0 = \frac{p_0 V_0}{RT_0} = \frac{10 \times 30}{0,08207 \times 313} = 11,68\, moles$$

Se usó: $T_0 = 40 + 273 = 313\ °K$
$V_0 = 30\ell$
$p_0 = 10atm.$

Ahora hallemos el número de moles final que hay en el primer volumen:

$$\eta_f = \frac{p_f V_0}{RT_f} = \frac{5 \times 30}{0,08207 \times 288} = 6,35\, moles$$

Se usó: $p_f = 5atm$; $T_f = 273 + 15 = 288\ °K$

Luego el número de moles que se han retirado del recipiente es:

$$\Delta\eta = \eta_0 - \eta_f = 5,33 moles$$

La masa retirada que le corresponde es: $\Delta m = P.M. \Delta\eta$

$$\Delta m = 28 \frac{g}{moles} \times 5,33\ moles = 149,24\, g$$

(10) Un depósito de acero está a una temperatura de $20°C$ y se ha hecho el vacío de su presión es de $2 \times 10^{-9} mm\ Hg$, sabiendo que la presión atmosférica reinante es de $76cm$ de Hg. Hallar el número de moléculas por m^3 en el sistema al vacío.

Solución:

Considerando el gas ideal: $PV = \eta RT$, $\frac{\eta}{V} = \frac{P}{RT}$

Donde: $T = 27 + 273 = 300°K$ $\quad$ $1atm$ —— $760\ mm\ Hg$
p —— 2×10^{-9}
$p = 2 \times 10^{-9} / 760atm.$

Reemplazando valores: $\frac{\eta}{V} = \frac{(2 \times 10^{-9})/760}{0,08207 \times 300} = 1,068 \times 10^{-13} \frac{moles}{\ell}$

se usa: $1\ell = 10^{-3} m^3$

Sabemos en C.N. en $1mol$ hay $6,023 \times 10^{23}$ moléculas

$$\frac{\eta}{V} = 1,068 \times 10^{-13} \times 6,023 \times 10^{23} \frac{\text{moléculas}}{10^{-3}}$$

$$\frac{\eta}{V} = 6,43 \times 10^{13}\ \text{moléculas}/m^3$$

(11) A $1,5moles$ de un gas diatómico ideal se le dio $800\,J$ de energía calorífica. ¿Cuál es la variación de la temperatura cuando el proceso es (a) volumen constante (b) presión constante.

Solución:

a) A volumen constante el trabajo es nulo, $W = 0$ y $Q = 800\,J$

$$\Delta U = Q_v - W = Q = \eta C_v \Delta T \quad \text{y} \quad C_v = \frac{5cal}{mol - °K}$$

$$\Delta T_v = \frac{Q_v}{\eta C_v} = \frac{800/4,186}{1,5 \times 5} = 25,48°K$$

b) $\Delta U = Q_p - p\Delta V = Q_p - \eta R \Delta T_p$

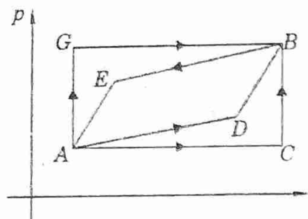
$$\eta C_v \Delta T_p = Q_p - \eta R \Delta T_p$$

$$Q_p = \eta (C_v + R) \Delta T_p = \eta C_p \Delta T_p$$

$$\Delta T_p = \frac{Q_p}{\eta C_p} = \frac{800/4,186}{1,5 \times 7} = 18,20\ °K$$

Se usó: $C_p = 7\ Cal/mol - °K$

(12) Un sistema gaseoso pasa del estado A al B, siguiendo la trayectoria AGB cuando recibe $200cal$ y realiza un trabajo de $90cal$.



Si el trabajo según la trayectoria ACB es de $20cal$ y si durante la trayectoria ADB el sistema recibe $120cal$. Cuando el sistema regresa según BEA a lo largo de la trayectoria curva, se realiza sobre él un trabajo de $50cal$.

Si: $U_A = 0$ y $U_G = 100cal$.

Hallar: Q_{ACB} , W_{ADB} , Q_{BEA} , Q_{AG}
W_{AG} , Q_{GB} , W_{GB}

Solución:

Hallando Q_{ACB} ; se conoce $W_{ACB} = 20cal$

$\Delta U_{ACB} = Q_{ACB} - W_{ACB}$

$\Delta U_{ACB} = \Delta U_{AGB}$ (independiente trayectoria)

$\Delta U_{AGB} = Q_{AGB} - Q_{AGB}$: $200 - 90cal =$

$\Delta U_{AGB} = 110cal$

Luego: $110 + Q_{ACP} - 20$

$Q_{ACB} = 130cal$

Hallando W_{ADB} ; se conoce $Q_{ADB} = 120cal$

$\Delta U_{ADB} = Q_{ADB} - W_{ADB}$

$\Delta U_{ACB} = \Delta U_{ADB}$ ...... (independiente trayectoria)

$110 = 120 - W_{ADB}$

$W_{ADB} = 10cal$

Hallando: Q_{BEA} ; se conoce $W_{BEA} = 0{,}50cal$

$\Delta U_{BEA} = Q_{BEA} - W_{BEA}$

$\Delta U_{BEA} = -\Delta U_{ACB} = -110cal$

$-110 = Q_{BEA} - (-50)$, $Q_{BEA} = -160cal$

El trabajo $W_{AG} = 0$, porque el proceso es a volumen constante.

Hallando W_{GB} :

$\Delta U_{GB} = Q_{GB} - W_{GB}$ .... (1)

$W_{AGB} = W_{AG} + W_{GB} = 0 + W_{GB}$

Se conoce $W_{AGB} = 90cal$ (dato)

$90 = 0 + W_{GB}$, $W_{GB} = 90cal$ .... (2)

$\Delta U_{AB} = \Delta U_{AG} + \Delta U_{GB}$

$110 = U_G - U_A + \Delta U_{GB}$

$110 = 100 - 0 + \Delta U_{GB}$

$\Delta U_{GB} = 10cal$ .... (3)

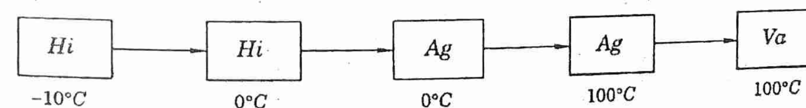
De (2) y (3) en (1): $10 = Q_{GB} - 90$

$Q_{GB} = 100cal$

(13) Dos pedazos iguales de hielo van el uno al encuentro del otro con velocidades iguales y al chocar, se transforman en vapor. Hallar las mínimas velocidades posibles de los pedazos de hielo, si antes de chocar la temperatura de los mismos era igual a $-10\ °C$.

Solución:

El hielo ($-10°C$) para que se convierta en vapor ($100°C$) debe seguir el proceso.



Para ello la cantidad de calor que se necesita para los dos bloques de hielo:

$$2(m\ Ce_{Hi}\ \Delta t + m\ L_f + m\ Ce_a\ \Delta t' + m\ L_v) \text{ en calorías.}$$

Este calor proviene del choque de los dos bloques de hielo, cuya energía cinética se transformara en energía calorífica, así: $2\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ Joules.

En calorías: $2\left(\frac{1}{2}\frac{mv^2}{4{,}186}\right)$ calorías

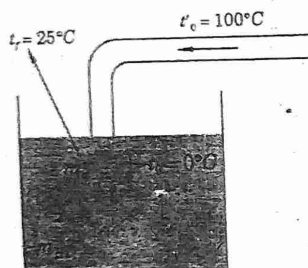
Luego: $2[m0{,}5(10)+m80+m\times 1\times(100)+m540]=\frac{mv^2}{4{,}186}$

$1552m=\frac{mv^2}{4{,}186}$

$v=77{,}9\,m/s$

(14) Un recipiente cuyas paredes están aisladas térmicamente, contiene $2000g$ de agua y $180g$ de hielo a $0°C$. Se introduce en el agua el extremo de un tubo que procede de una caldera en la que hierve agua a la presión atmosférica. ¿Cuántos gramos de vapor han de condensarse para elevar la temperatura del sistema a $25°C$? No considere la capacidad calorífica del recipiente.

Solución:



Se conoce: $m_a = 2000g$ $\quad m_{Hi} = 180g$

$t_0 = 0°C$ $\quad t'_0 = 100°C$

El calor proporcionado por el vapor eleva la temperatura del agua y del hielo.

$Q_g\,(agua + hielo) = Q_p(vapor)$

$m_a\,Ce_a\,\Delta t + m_{Hi}\,L_f + m_{Hi}\,Ce_{Hi}\,\Delta t$

$m_v\,L_v + m_v\,Ce_a\,\Delta t'$

Donde: $\Delta t = 25 - 0°C$ y

$\Delta t' = 100 - 25 = 75°C$

Reemplazando valores:

$2000\times 1\times 25 + 180\times 80 + 180\times 1\times 25 =$

$m_v\,540 + m_v\times 1\times 75$

$68900 = 615m_v$

$m_v = 112{,}0g.$

(15) Un gas realiza un trabajo de $10\,J$ en un proceso adiabático, si su energía interna final es de $22\,J$. Hallar la energía interna inicial.

Solución:

De la 1ra L.T.: $\Delta U = Q - W$

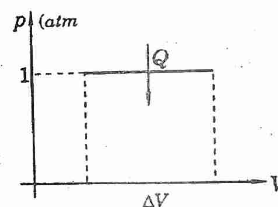
$U_f - U_0 = Q - W \quad , \quad Q = 0$ (Proced. adiabático)

$22 - U_0 = 0 - 10$

$U_0 = 22 + 10 = 32\,J$

(16) En un proceso isobárico de $1atm$. un gas se expande cuando absorbe $2\times 10^5 cal$. Si el cambio de energía interna es de $2\times 10^3 cal$. Hallar la variación de volumen del gas.

Solución:



De la 1ra L.T.: $\Delta U = Q - W$

$2\times 10^3 = 2\times 10^5 - 1{,}013\times 10^5\,\Delta V$

$\Delta V = \frac{(200-2)\times 10^3}{1{,}013\times 10^5} m^3$

$\Delta V = 1{,}95\,m^3$

(17) Cinco centímetros cúbicos de agua se transforman en $1585cm^3$ de vapor, cuando hierve a la presión de $1{,}5atm$. ¿Cuál es la variación de su energía interna?.

Solución:

De la 1ra L.T.: $\Delta U = Q - p\,\Delta V$

$\Delta U = m\,L_v - p\,\Delta V$

$\Delta U = 5\times 540\,cal - \frac{1{,}5\times 1{,}013\times 10^5}{4{,}186}(1585-5)\times 10^{-6}\,cal$

$\Delta U = 2700 - 57{,}35\,cal$

$\Delta U = 2642{,}65\,cal$

(18) Cuál es la temperatura final de $2kg$ de agua a $50°C$, si se realiza un trabajo sobre el de $20000\,J$ y se extraen $10000cal$. de calor.

Solución:

De la 1ra L.T.: $\Delta U = Q - W$

$$\Delta U = -10000cal - (-20000\,J)$$

$$\Delta U = -10000\,cal + \frac{20000}{4{,}186}cal$$

$$\Delta U = -10000 + 4777{,}8\,cal$$

$$\Delta U = -5222{,}2\,cal$$

Esto significa que se pierde más calor del que ingresa. Para hallar la temperatura final primero determinamos la variación de la temperatura, para ello usamos:

$\Delta U = m\,Ce\,\Delta t$ $\qquad -5222{,}2 = 2000 \times 1 \times \Delta t$

$\Delta t = -2{,}61°C$ $\qquad t - 50°C = -2{,}61°C$ $\qquad t = 47{,}39°C$

(19) Sea un cuerpo de masa m, calor específico Ce y que se halla a una temperatura inicial T_0, se lleva a un ambiente donde la temperatura es: $T_1 (T_0 > T_1)$ y se enfría el cuerpo por pérdida de calor por convección y radiación y obedece la ley de Newton y está dada así:

$$\frac{dQ}{dt} = hA(T - T_1)$$

hallar la temperatura en función del tiempo:

Solución:

Sabemos que un cuerpo al perder calor, su temperatura disminuye, luego:

$$dQ = -m\,Ce\,d\,T \quad \text{.......................} \quad (1)$$

De (1) se obtiene:

$$\frac{dQ}{dt} = -m\,Ce\frac{dT}{dt} \quad \text{.......................} \quad (2)$$

De la ley de Newton:

$$\frac{dQ}{dt} = hA(T - T_1) \quad \text{.......................} \quad (3)$$

De (2) y (3): $\quad -m\,Ce\frac{dT}{dt} = hA(T - T_1)$

$$\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{(T - T_1)} = -\frac{hA}{mCe}\int_0^T dt$$

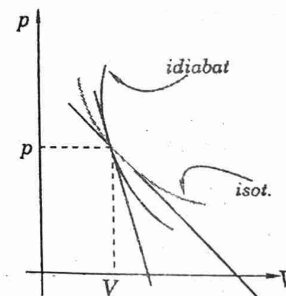
$$\text{Ln}(T - T_1)\Big|_{T_0}^{T} = -\frac{hA}{mCe}t$$

$$\text{Ln}\frac{(T - T_1)}{(T_0 - T_1)} = -\frac{hA}{mCe}t$$

$$T = T_1 + (T_0 + T_1)e^{-\frac{hA}{mCe}t}$$

(20) Hallar la relación entre las pendientes para una curva adiabática e isotérmica de un gas que pasa por el mismo punto en un diagrama $P - V$.

Solución:



Sabemos la relación para un proceso adiabático en un diagrama $P - V$.

$$pV^{\gamma} = C_1 \quad ; \quad p = C_1V^{-\gamma}$$

Derivando: $\left(\frac{dp}{dV}\right)_{adiab} = C_1V^{-8-1}(-\gamma) = \frac{\gamma C_1}{V^{\gamma+1}}$

Remplazando C_1: $\left(\frac{dp}{dV}\right)_{adiab} = -\frac{\gamma pV^{\gamma}}{V^{\gamma+1}}$

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{adiab} = -\frac{\gamma p}{V} - \gamma\left(\frac{p}{V}\right) \quad \text{...............................} \quad (1)$$

Para un proceso isotérmico: $p = \frac{C_2}{V} = C_2V^{-1}$

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{isot} = -C_2V^{-2} = -\frac{C_2}{V^2} = -\frac{pV}{V^2} = -\frac{p}{V} \quad \text{.............} \quad (2)$$

Dividiendo (1) ÷ (2): $\quad \dfrac{\left(\frac{dp}{dV}\right)_{adiab}}{\left(\frac{dp}{dV}\right)_{isot}} = \dfrac{-\gamma\left(\frac{p}{V}\right)}{-\frac{p}{V}} = \gamma$

La relación de la pendientes es la constante γ del gas.

SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

(01) Si el rendimiento de un motor es de 0,20. Por cada 3000J de calor absorbido por el motor. ¿Qué cantidad de calor se elimina?

Solución:

$\eta = 0{,}20$, $Q_1 = 3000\,J$, $\eta = \frac{W}{Q_1}$, $W = \eta\, Q_1 = 0{,}2 \times 3000 = 600\,J$

Luego: $W = Q_1 - Q_2$, $Q_2 = Q_1 - W$

$Q_2 = 3000 - 600\,J = 2400\,J$

(02) ¿Cuál es la variación de la entropía de 2*moles* de H_2O cuando pasa de hielo a agua a 0°C?. $L_f = 6{,}01\,KJ/mol$.

Solución:

Se conoce: $\eta = 2moles$, $m = 18g$, $T_0 = 0°C = 273°K$

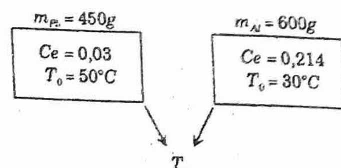
Por definición: $\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_0}\int dQ$

$$\Delta S = \frac{1}{T_0}Q = \frac{\eta L_f}{T_0} = \frac{2 \times 6{,}01\,KJ}{273\,°K}$$

$$\Delta S = 0{,}044\,KJ/°K = 10{,}52\,cal/°K$$

(03) Una pieza de 450g de plomo a la temperatura de 50°C, se pone en contacto con un bloque de aluminio de 600g a la temperatura de 30°C. Hallar (a) La variación de la entropía (b) Suponer que la masa de plomo aumenta a 100°C y la masa de aluminio desciende su temperatura a 0°C, hallar la variación de la entropía ¿es posible este proceso?

Solución:



a) Hallemos la temperatura de equilibrio usando la condición de calor perdido es igual a calor ganado.

$$Q_p\,(Pb) = Q_g\,(Al)$$

$$m_{Pb}\,Ce_{Pb}\,(50 - T_x) = m_{Al}\,Ce_{Al}\,(T_x - 30)$$

$$450 \times 0{,}03(50 - T_x) = 600 \times 0{,}214\,(T_x - 30)$$

$$T_x = 31{,}9°C$$

Luego: $\Delta S_{Pb} = \int_{T_0}^{T_x} \frac{dQ}{T} = m_{Pb}\,Ce_{Pb}\int_{T_0}^{T_x} dT$

$$\Delta S_{Pb} = 450 \times 0{,}03\,\text{Ln}\left(\frac{304{,}9}{323}\right) = -0{,}778\,\frac{cal}{°K}$$

$$\Delta S_{Pb} = -3{,}26\,J/°K$$

Por el aluminio:

$$\Delta S_{Al} = \int_{T_0'}^{T_x} \frac{dQ}{T} = m_{Al}Ce_{Al}\text{Ln}\left(\frac{T_x}{T_0'}\right)$$

$$\Delta S_{Al} = 600 \times 0{,}214\,\text{Ln}\left(\frac{304{,}9}{303}\right) = 0{,}802\,Cal/°K$$

$$\Delta S_{Al} = 3{,}36\,J/°K$$

Luego: $\Delta S = \Delta S_{Pb} + \Delta S_{Al}$

$\Delta S = -3{,}26 + 3{,}36\,J/°K = 0{,}10\,J/°K$

b) En este caso, la temperatura final del plomo es $T_f = 373°K$ y para el aluminio es $T_f' = 273°K$.

Luego: $\Delta S_{Pb} = m_{Pb}\,Ce_{Pb}\,\text{Ln}(T_f/T_0)$

$\Delta S_{Pb} = 450 \times 0{,}03\,\text{Ln}\,(373/323)$

$\Delta S_{Pb} = 1{,}943\,cal/°K$

$\Delta S_{Al} = m_{Al}\,Ce_{Al}\,\text{Ln}\,(T'_f/T'_0)$

$\Delta S_{Al} = 600 \times 0{,}214\,\text{Ln}\,(273/303)$

$\Delta S_{Al} = -13{,}38\,cal/°K.$

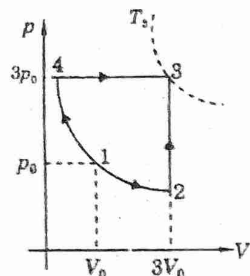
$\Delta S = \Delta S_{Pb} + \Delta S_{Al} = 1{,}943 - 13{,}38\,cal/°K$

$\Delta S = -11{,}437\,cal/°K$

Se observa que $\Delta S < 0$, lo que indica que este proceso no es posible.

(04) Dos moles de un gas diatómico se halla en el estado $1(p_0, V_0)$ y pasa al estado 3, según la trayectoria 1,2,3 y después según la trayectoria 1,4,3. Hallar el cambio de entropía para cada proceso.

Solución:



Se conoce:

$C_p = 7\ cal/mol\ °K$

$\eta = 2\ moles$

$C_V = 5\ cal/mol\ °K$

$R = 2\ cal/mol\ °K$

Estudiamos el proceso 1, 2, 3.

Proceso $1 \longrightarrow 2$: $\Delta S_{123} = \Delta S_{12} + \Delta S_{23}$ .... (1)

$$\Delta U_{12} = 0 \quad , \quad Q_{12} = W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV$$

$$Q_{12} = \eta R T_1 \,\text{Ln}(V_2/V_1) = \eta R T_1 \,\text{Ln}(3V_0/V_0)$$

$$Q_{12} = p_0 V_0 \,\text{Ln}\,3 \quad \text{.......................................} \quad (2)$$

$$\Delta S_{12} = \int \frac{dQ}{T_1} = \frac{Q_{12}}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_1} L\eta\, 3$$

Pero por ser gas ideal: $\frac{p_0 V_0}{T_1} = \eta R$

$$\Delta S_{12} = \eta R\, L\eta\, 3 \quad \text{.......................................} \quad (3)$$

Proceso $2 \longrightarrow 3$: $\Delta V = 0$, $W = 0$

Hallando T_3: Comparando los estados 1 y 3:

$p_0 V_0 = \eta R T_1$ y $3p_0(3V_0) = \eta R T_3$; $T_3 = 9\,T_1$

$$\Delta S_{23} = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_3} \frac{\eta C_v\, dT}{T} = \eta C_v \,\text{Ln}\left(\frac{T_3}{T_1}\right)$$

$$\Delta S_{23} = \eta C_v \,\text{Ln}(9T_1/T_1) = \eta C_v \,\text{Ln}\,9 \quad \text{.......................................} \quad (4)$$

De (3) y (4) en (1): $\Delta S_{123} = n\,R\,\text{Ln}\,3 + n\,C_V\,\text{Ln}\,9$

$$\Delta S_{123} = 2(2)\,\text{Ln}\,3 + 2(5)\,\text{Ln}\,9 = 26{,}3 Cal/°K$$

Ahora consideremos el proceso 1, 4, 3.

$$\Delta S_{143} = \Delta S_{14} + \Delta S_{43} \quad \text{.......................................} \quad (5)$$

Proceso $1 \longrightarrow 4$: $\Delta U_{14} = 0$, $Q_{14} = W_{14}$

$$Q_{14} = \eta E T_1 \,\text{Ln}(V_4/V_0) = \eta R T_1 \,\text{Ln}(V_0/3V_0)$$

Se usó la relación: $3p_0\, V_4 = \eta R\, T_1 = p_0\, V_0$

$$V_4 = V_0/3$$

$$Q_{14} = \eta R\, T_1 \,\text{Ln}(1/3) \quad \text{.......................................} \quad (6)$$

$$\Delta S_{14} = \int \frac{dQ}{T_1} = \frac{1}{T_1}\int_1^4 dQ = \frac{Q_{14}}{T_1}$$

Usando (6):

$$\Delta S_{14} = \frac{\eta R T_1}{T_1} \text{Ln}(1/3) = \eta R \,\text{Ln}(1/3) \quad \text{.......................................} \quad (7)$$

Proceso $4 \longrightarrow 3$:

$$\Delta S_{43} = \int \frac{dQ}{T} = \int_4^3 \frac{\eta C_p\, dT}{T} = \eta C_p \,\text{Ln}\frac{T_3}{T_4}$$

$$\Delta S_{43} = \eta C_p \,\text{Ln}\frac{T_3}{T_1} = \eta C_p \,\text{Ln}\,9 \quad \text{.......................................} \quad (8)$$

De (7) y (8) en (5):

$$\Delta S_{143} = \eta R \,\text{Ln}(1/3) + \eta\, C_p \,\text{Ln}\,9$$

$$\Delta S_{143} = 2(2)\,\text{Ln}(0{,}33) + 2(7)\,\text{Ln}\,9$$

$$\Delta S_{143} = 26{,}3 cal/°K$$

Los cambios de entropía son iguales $\Delta S_{123} = \Delta S_{143}$

(05) Un sistema gaseoso de $3moles$ se expande del estado inicial 30ℓ, $300°K$ al estado final 50ℓ, $300°K$ mediante un proceso cuasiestático e isotérmico. (a) Cuál es la variación de la entropía del gas (b) Cómo es la variación del universo (c) Si el proceso es no cuasiestático responder las preguntas (a) y (b).

Solución:

a) Por ser un proceso isotérmico $\Delta U = 0$; $dQ = dW = pdV$, luego:

$$\Delta S_g = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{pdV}{T} = \eta R \int_{V_f}^{V_0} \frac{dV}{V} \eta R \operatorname{Ln} \frac{V_f}{V_0}$$

$$\Delta S_g = 3 \times 2 \operatorname{Ln}\left(\frac{50}{30}\right) = 3{,}0\, cal/°K$$

b) Un proceso cuasiestático e isotérmico es un proceso reversible, luego: $\Delta S_U = 0$.

c) Sabemos que la entropía es una función de estado, que depende de los estados final e inicial, luego: $\Delta S_g = 3{,}0 \frac{cal}{°K}$ porque los estados final e inicial no han variado en este proceso no cuasiestático.

Como es un proceso no cuasiestático o irreversible, entonces: $\Delta S_U > 0$

(06) Durante un reversible de M a N un sistema absorbe $400J$ de un foco a $400°K$ y cede $150J$ a un foco a $200°K$ y realiza un trabajo de $100J$ hallar. (a) El cambio de energía interna del sistema (b) el cambio de entropía del sistema. (c) El cambio de entropía del universo. Si ahora el proceso es de M a N es irreversible, hallar. (d) El cambio de energía del sistema (e) El cambio de entropía del sistema (f) El cambio de entropía del universo.

Solución:

a) $\Delta U = Q - W = (Q_1 - Q_2) - W$ $\quad \Delta U = (400 - 150) - 100J = 150J$

b) El calor que ingresa a $400°K$ da lugar a un aumento en la entropía y el calor que se cede a $200°K$ da lugar a una disminución del la entropía, luego:

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = \frac{400}{400} - \frac{150}{200} \frac{J}{°K} \qquad \Delta S = 0{,}25\, J/°K$$

c) Por ser un proceso reversible $\Delta S_U = 0$ *(cambio de entropía del universo)*

d) Como U es la energía interna y es una función de estado, sólo depende de los estados final e inicial, por ello $\Delta U = 150J$

e) A igual la función S entropía $\Delta S = 0{,}25\, J/°K$, no depende de los procesos.

f) Por ser un proceso irreversible $\Delta S_U > 0$.

(07) Un gas absorbe de dos focos de calor a uno de ellos $400J$ a $T'°K$ y al otro $300J$ a $450°K$ y vuelve a su estado inicial, realizando un trabajo de $100J$ y entrega $500J$ a un foco que se halla a una temperatura $300°K$. Hallar (a) El cambio de entropía del sistema en un ciclo. (b) La temperatura, si el ciclo es reversible.

Solución:

a) Como el ciclo es reversible y vuelve a su estado inicial: $\Delta S_g = 0$

b) $\Delta S_g = \frac{Q_1}{T} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{(-Q_3)}{T_3} = 0$

$$\frac{400}{T} + \frac{300}{450} - \frac{500}{300} = 0$$

$$T = 400°K$$

(08) Una masa de $1kg$. se halla a una altura de $20m$, sobre el nivel del suelo, al soltarse queda en reposo al chocar con el suelo. Si inicialmente la temperatura del medio era de $30°C$. ¿Cuál es la variación de la entropía del universo?.

Solución:

En este problema la temperatura inicial y final permanece constante.

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int dQ = \frac{Q}{T}$$

El calor es proveído de una masa que cae y su energía potencial gravitatoria se convierte en energía térmica.

Luego: $\quad \Delta S = \frac{mgh}{T} = \frac{1 \times 9{,}8 \times 20\, J}{30 + 273°K}$

$$\Delta S = 0{,}65\, J/°K$$



(09) Un trozo de hielo de 30g a 0°C se lleva a un recipiente aislado lleno de agua que se halla a una temperatura ligeramente mayor de 0°C y el hielo se derrite. Hallar (a) El cambio de entropía del hielo (b) El cambio de entropía del agua (c) El cambio de entropía del hielo más el agua.

Solución:

a) La cantidad de calor que absorbe el hielo para fundirse es:

$$Q = m\,L_f = 30 \times 80cal = 2400cal.$$

Como la temperatura del hielo y del agua es la misma:

$$\Delta S_{Hi} = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int dQ = \frac{Q}{T}$$

$$\Delta S_{Hi} = \frac{2400\,cal}{273\,°K} = 8{,}79\ cal/°K$$

b) El cambio de entropía del agua es: $\Delta S_a = -8{,}79\ cal/°K$

c) $\Delta S_{Hi} + \Delta S_a = 0$

(10) Una porción de hielo de 120g a 0°C se introduce a un recipiente aislado que posee 150g de agua a 80°C. Hallar el cambio de entropía del universo.

Solución:

Para hallar el cambio de entropía del universo, se necesita conocer el cambio de entropía del hielo y del agua.

Usando la condición de calor ganado por el hielo es igual al calor perdido por el agua, se halla la temperatura de equilibrio.

$$m_{Hi}\,L_f + m_{Hi} \times Ce_A\,(T - 0) = m_a\,C_a\,(80 - T)$$

$$120 \times 80 + 120 \times 1(T) = 150(80 - T)$$

$$9600 + 120T = 12000 - 150T$$

$$270T = 2400 \quad , \quad T = 8{,}9°C$$

El cambio de entropía del hielo es:

$$\Delta S_{Hi} = \frac{m_{Hi}\,L_f}{T} + m_{Hi}\,Ce\int_{273}^{281{,}9}\frac{dT}{T}$$

$$\Delta S_{Hi} = \frac{m_{Hi}\,L_f}{T} + m_{Hi}\,Ce\,\mathrm{Ln}\left(\frac{281{,}9}{273}\right)$$

$$\Delta S_{Hi} = \frac{120 \times 80}{273} + 120 \times 1 \times \mathrm{Ln}\left(\frac{281{,}9}{273}\right)$$

$$\Delta S_{Hi} = 39{,}0\,cal/°K$$

El cambio de entropía del agua es:

$$\Delta S_a = m_a C_{ea}\mathrm{Ln}\left(\frac{281{,}9}{353}\right)$$

$$\Delta S_a = 150 \times 1 \times \mathrm{Ln}\left(\frac{281{,}9}{353}\right) = -33{,}7\,cal/°K$$

Luego el cambio de entropía del universo es:

$$\Delta S_U = \Delta S_a + \Delta S_{Hi} = -33{,}7 + 39\,cal/°K$$

$$\Delta S_U = 5{,}3\,cal/°K$$

(11) Si un cuerpo de 10Kg, que tiene una velocidad de 10m/s se desplaza sobre una superficie rugosa, suponiendo que la temperatura es de 27°C Ahora entre dos focos de temperatura 500°K y 300°K se transmite 1000J de calor a un gas. Hallar (a) Asumiendo un proceso ideal la energía calorífica que se genera cuando la masa se detiene por rozamiento (b) Qué cantidad de calor se puede convertir en trabajo realizado por el gas. (c) El cambio de entropía del universo en cada caso.

Solución:

a) La masa posee energía cinética y en un proceso ideal, toda esta energía se transforma en calor.

$$E_c = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(10)(10)^2 = 500J$$

b) Sabemos $W = \eta\,Q_{abs}$, donde: $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{500} = 0{,}4$

luego $W = 0{,}4 \times 1000J = 400J$

c) Para la masa; el cambio de entropía del universo:

$$\Delta S_U = \frac{Q}{T} = \frac{500J}{300\,°K} = 1,33\,J/°K$$

Para el gas; el cambio de entropía del universo:

$$\Delta S_U = \frac{Q}{T_2} - \frac{Q}{T_1} = \frac{500}{300} - \frac{500}{500}\frac{J}{°K}$$

$$\Delta S_U = 0,33\,J/°K$$

(12) Se tienen $5g$ de vapor a $100°C$ y a la presión de $760Torr$ y se deposita dentro de un calorímetro (se desprecia su capacidad calorífica) que posee $100g$ de agua y $90g$ de hielo a $0°C$. Hallar el cambio de entropía del universo.

Solución:

Hallemos la cantidad de vapor que libera el vapor al condensarse de $100°C$ a $0°C$

$$Q = m_V L_V + m_V C_e \Delta T$$

$$Q = 5 \times 540 + 5 \times 1 \times 100cal = 3200cal$$

Veamos qué cantidad de hielo funde:

$$m_{Hi} = \frac{Q}{L_f} = \frac{3200}{80} = 40\,g$$

La diferencia de masa de hielo: $90 - 40 = 50g$ quedará como hielo a $0°C$, junto con el agua también a $0°C$.

Hallemos el cambio de entropía del hielo:

$$\Delta S_{Hi} = \frac{m_{Hi} L_f}{T_0} = \frac{40 \times 80}{273} = 11,72\,cal/°K$$

El cambio de entropía del vapor:

$$\Delta S_V = -\frac{m_V L_V}{T_V} + m_V Ce_a \,\text{Ln}\left(\frac{T_0}{T_V}\right)$$

$$\Delta S_V = -\frac{5 \times 540}{373} + 5 \times 1\,\text{Ln}\left(\frac{273}{373}\right)$$

$$\Delta S_V = -7,20 - 1,56 = -8,76\,cal/°K$$

Luego el cambio de entropía del universo: $\Delta S_U = \Delta S_{Hi} + \Delta S_V$

$$\Delta S_U = 11,72 - 8,76\frac{Cal}{°K} = 2,96\frac{Cal}{°K}$$

(13) Una esfera metálica de $100kg$. choca con el piso con una velocidad de $10m/s$. en un día en que la temperatura del medio es de $30°C$. Hallar el cambio de entropía del universo.

Solución:

La energía cinética de la esfera se convierte en energía calorífica al chocar con el piso, este proceso se realiza prácticamente a temperatura de $30°C$, luego:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int dQ = \frac{Q}{T} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{T}$$

$$\Delta S = \frac{\frac{1}{2}(100)(10)^2}{(30+273)} = 16,5\frac{J}{°K} = 3,9\frac{Cal}{°K}$$

(14) Tres moles de un gas perfecto se comprimen isotérmicamente y cuasiestáticamente del estado 30ℓ, $500°K$ a 15ℓ, $500°K$. Hallar (a) el cambio de entropía del gas (b) El cambio de entropía del universo.

Solución:

a) Sabemos que la entropía es una función de estado, por ello depende únicamente de su estado inicial y final para un proceso isotérmico: $\Delta U = 0$, $dQ = dW = pdV$

Luego el cambio de entropía del gas:

$$\Delta S_g = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{dW}{T} = \int \frac{pdV}{T} = \eta R\,\text{Ln}\left(\frac{V_f}{V_0}\right)$$

$$\Delta S_g = 3 \times 2\,\text{Ln}(15/30) = -4,16\,cal/°K$$

b) El cambio de entropía del universo:

$$\Delta S_U = \eta R\,\text{Ln}(V_0/V_f) = 3 \times 2\,\text{Ln}(30/15)$$

$$\Delta S_U = 4,16\,cal/°K$$

(15) Hallar el rendimiento de un ciclo de Otto, que consta de dos adiábaticas y dos isócoras, como se muestra en la figura. Ingresa calor Q_1 en el proceso ab y se elimina calor Q_2 en el proceso cd.

Solución:

Los procesos bc y da son adiabáticos, los procesos ab y cd son isócoros.

Se define el rendimiento: $\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$

Para el proceso ab: $Q_1 = \eta\, C_V\,(T_b - T_a)$

Para el proceso cd. $Q_2 = -\eta\, C_v\,(T_d - T_c) = \eta\, C_v\,(T_c - T_d)$

Reemplazando: $\eta = 1 - \frac{\eta C_V (T_c - T_d)}{\eta C_V (T_b - T_a)}$

$$\eta = 1 - \frac{T_c - T_d}{T_b - T_a} = \frac{(T_b + T_d) - (T_a + T_c)}{T_b - T_a}$$

(16) El ciclo de Sterling consta de dos isotermas y dos isócoras como se muestra en la figura. Ingresa calor en los procesos ab y bc. Hallar la eficiencia del ciclo.

Solución:

Los procesos bc y da son isotermas y los procesos cd y ab son isócoros.

Se define el rendimiento o eficiencia.

$$\eta = \frac{W}{Q_{abs}} = \frac{W_1 + W_2}{Q_1 + Q_2'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

El trabajo neto realizado en el ciclo está dado por el área encerrada por las isotermas e isócoras.

En el proceso bc: $\Delta U = 0$, $Q_1 = W = \int p\,dV$

$$W_1 = \eta R T_1 \operatorname{Ln}(V_c/V_b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$Q_1 = W = \eta R T_1 \operatorname{Ln}(V_c/V_b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

En el proceso da: $W_2 = \eta R T_2\, Ln\,(Va/Vd) = -\eta R T_2\, Ln\,(Va/Vd)$

Como: $V_c = V_d$, $V_b = V_a$

$$W_2 = -\eta R T_2 \operatorname{Ln}(V_c/V_b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

En el proceso ab: $\Delta U = Q'_2 = \eta\, C_V\,(T_b - T_a)$ .... (5)

$W_{ab} = 0$ *(proceso isócoro)*

Reemplazando (2), (4) y (3), (5) en (1): $\eta = \frac{\eta R T_1 \operatorname{Ln}(V_c/V_b) + [-\eta R T_2 \operatorname{Ln}(V_c/V_b)]}{\eta R T_1 \operatorname{Ln}(V_c/V_b) + \eta C_v (T_b - T_a)}$

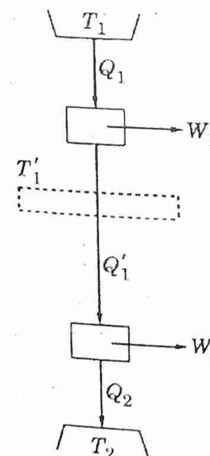
$$\eta = \frac{(T_1 - T_2)\operatorname{Ln}(V_c/V_b)}{T_1 \operatorname{Ln}(V_c/V_b) + \frac{C}{R}(T_b - T_a)}$$

Como: $T_b = T_1$ y $T_a = T_2$

$$\eta = \frac{(T_1 - T_2)\operatorname{Ln}(V_c/V_b)}{T_1 \operatorname{Ln}(V_c/V_b) + \frac{C}{R}(T_1 - T_2)}$$

(17) Sean máquinas térmicas que funcionan entre dos focos T_1 y T_2 ($T_1 > T_2$) como se muestra en la figura. Se observa que al calor eliminado o perdido por la primera se usa como calor que ingresa o se absorbe por la segunda máquina. Si η_1 y η_2 son las funciones de la primera y segunda máquina térmica respectivamente. Hallar la eficiencia del sistema.

Solución:



La eficiencia del sistema está dada por la función:

$$\eta = \frac{W_{TOTAL}}{Q_{abs}} = \frac{W_1 + W_2}{Q_1}$$

$$\eta = \frac{W_1}{Q_1} + \frac{W_2}{Q_2}$$

$$\eta = \frac{W_1}{Q_1} + \frac{Q'_1}{Q_1}\left(\frac{W_2}{Q'_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Por definición de eficiencia para la primera máquina térmica:

$$\eta_1 = \frac{W_1}{Q_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Para la segunda máquina térmica: $\eta_2 = \dfrac{W_2}{Q'_1}$ .... (3)

Además de (2): $\eta_1 = \dfrac{W_1}{Q_1} = \dfrac{Q_1 - Q'_1}{Q_1} = 1 - \dfrac{Q'_1}{Q_1}$

$\dfrac{Q'_1}{Q_1} = 1 - \eta_1$ .... (4)

Reemplazando (2), (3) y (4) en (1):

(18) Con relación al problema anterior, asumiendo que las dos máquinas son reversibles. La máquina térmica que funciona entre T_1 y T'_1 $(T_1 > T'_1)$ es la primera y la segunda funciona entre T'_1 y T_2 $(T'_1 > T_2)$. Hallar la eficiencia del sistema en función de las temperaturas.

Solución:

En el problema anterior se definió: $\eta_1 = 1 - \dfrac{Q'_1}{Q_1}$, se ha demostrado:

$\dfrac{Q'_1}{Q_1} = \dfrac{T'_1}{T_1} \Rightarrow \eta = 1 - \dfrac{T'_1}{T_1}$ .... (1)

De igual forma para: $\eta_2 = 1 - \dfrac{T_2}{T'_1}$ .... (2)

También se demostró:

$$\eta = \eta_1 + (1 - \eta_1)\eta_2 = \left(1 - \frac{T'_1}{T_1}\right) + \left[1 - \left(1 - \frac{T'_1}{T_1}\right)\right]\left(1 - \frac{T_2}{T'_1}\right)$$

$$\eta = 1 - \frac{T'_1}{T_1} + \left(1 - 1 + \frac{T'_1}{T_1}\right)\left(1 - \frac{T_2}{T'_1}\right)$$

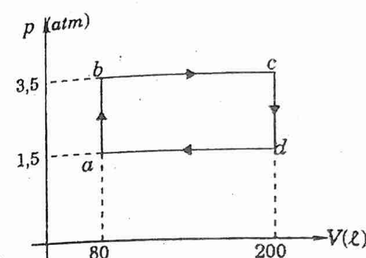
$$\eta = 1 - \frac{T'_1}{T_1} + \frac{T'_1}{T_1}\left(1 - \frac{T_2}{T'_1}\right)$$

$$\eta = 1 - \frac{T'_1}{T_1} + \frac{T'_1}{T_1} - \frac{T'_1 T_2}{T_1 T'_1}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

(19) A 5 moles de un gas perfecto $\gamma = 1{,}3$, se le somete a un proceso isobárico e isócoro como se muestra en la figura. Hallar la eficiencia del ciclo.

Solución:



Por definición de eficiencia:

$$\eta = \frac{\text{trabajo neto}}{\text{calor absorbido}}$$

Durante los procesos ab y bc hay absorción de calor, en cambio en los procesos cd y da hay eliminación del calor debido a disminución de temperatura, luego:

$\eta = \dfrac{W}{Q_{ab} + Q_{bc}}$ .... (1) $\quad W$ = Área encerrada

$W = \Delta p\, \Delta V = (3{,}5 - 1{,}5)\,(200 - 80) atm - \ell$

$W = 240 atm - \ell = 5808 cal$

Para el proceso ab: $\quad Q_{ab} = \eta\, C_V\, (T_b - T_a)$

Por ser gas ideal: $\quad T_a = \dfrac{p_a V_a}{\eta R} = \dfrac{1{,}5 \times 80}{5 \times 0{,}082}$

$T_a = 292{,}68\,°K$

$T_b = \dfrac{p_b V_b}{\eta R} = \dfrac{3{,}5 \times 80}{5 \times 0{,}082} = 6{,}82{,}93\,°K$

Luego: $\quad Q_{ab} = 5(7)\,(682{,}93 - 292{,}68) cal$

$Q_{ab} = 13658{,}75 cal$

Para el proceso bc: $\quad Q_{bc} = \eta\, C_p\, (T_c - T_b)$

Por ser gas ideal: $\quad T_c = \dfrac{p_c V_c}{\eta R} = \dfrac{3{,}5 \times 200}{5 \times 0{,}082} = 1707{,}32\,°K$

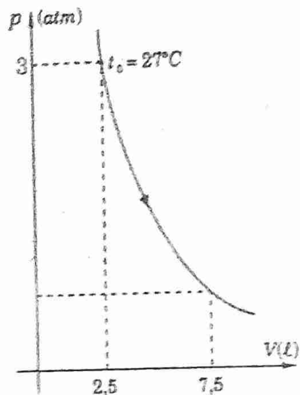
$Q_{bc} = 5(9)\,(1707{,}32 - 682{,}93)\,°K = 46097{,}55 cal$

Reemplazando en (1):

$$\eta = \frac{5808\ cal}{13658{,}75 + 46097{,}55\ cal} = 0{,}097 \quad , \quad \eta = 9{,}7\%$$

(20) Cierta masa de amoniaco se expande adiabáticamente y cuasiestáticamente desde el estado inicial de $3atm$, $2{,}5\ell$ y $27°C$ hasta tres veces su volumen inicial. ¿Cuál es el trabajo realizado por el gas?

Solución:



Se demuestra que el trabajo realizado es un proceso adiabático y está dado por la expresión:

$$W = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Necesitamos conocer p_2; para un proceso adiabático:

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma} \quad , \quad p_2 = p_1 (V_1/V_2)^{\gamma}$$

Donde: $\gamma = 1{,}31$, $V_1 = 2{,}5\ell$, $V_2 = 7{,}5\ell$

$$p_2 = 3\,atm\,(2{,}5\ell/7{,}5\ell)^{1{,}31} = 0{,}71\,atm$$

Reemplazando en (1): $W = \dfrac{3 \times 2{,}5 - 0{,}71 \times 7{,}5}{1{,}31 - 1}\,atm - \ell$

$$W = 7{,}02\,atm - \ell = 169{,}88\,cal = 40{,}6\,J$$

TABLA Nº 2 - PROPIEDADES ELÁSTICAS DE SÓLIDOS Y LÍQUIDOS

Material	Módulo de Young $E(N/m^2) \times 10^{10}$	Resistencia a la rotura $\sigma_r (N/m^2) \times 10^8$	Coeficiente de Poisson (μ)	Módulo de Compresibilidad $B(N/m^2) \times 10^{10}$
Aluminio	7,0	1,10	0,34	7,3
Acero	20,0	7,85	0,39	15,8
Cobre	13,0	2,45	0,34	13,5
Bronce	9,0	—	0,28	6,8
Cuarzo	7,0	—	0,17	3,6
Granito	5,0	—	—	4,7
Hueso	Tracción: 1,6 Compresión: 0,9	2,00 2,70	— —	— —
Hierro	19,0	2,45	0,104	8,0
Latón	9,0	—	0,39	6,1
Ladrillo	2,0	—	—	—
Mármol	6,0	—	0,36	7,0
Madera	1,0	—	—	—
Plomo	1,6	0,20	0,44	4,4
Vidrio	6,0	0,50	0,25	4,0
Tungsteno	35,8	—	0,35	20.0
Hormigón	2,3	—	—	—
Agua	—	—	—	0,22
Etanol	—	—	—	0,09
Mercurio	—	—	—	2,7

TABLA Nº 3 - DENSIDADES DE SUSTANCIAS

Sustancia	$\rho(g/cc)$	Sustancia	$\rho(g/cc)$	Sustancia	$\rho(Kg/m^3)$
Aluminio	2,7	Aceite	—	Aire	1,3 (0°C)
Bronce	—	Agua pesada	1,1	—	1,25 (10°C)
Cemento	2,8	Agua de Mar	1,02	—	1,20 (20°C)
Cobre	8,9	Glicerina	1,26	—	1,16 (30°C)
Corcho	0,20	Benceno	0,88	Nitrógeno	1,25
Hierro (acero)	7,8	Alcohol (etanol)	0,79	Amoníaco	0,77
Hueso	7,8	Mercurio	13,6	Hidrógeno	0.09
Ladrillo	1,8	Sangre	1,05	Oxígeno	1,43
Hielo	0,92	Agua	1,0 (4°C)	Metano	0,72
Madera	0,8	—	1,483 (20°C)	Gas carbónico	1,98
Oro	19,3	—	0,996 (30°C)	Cloro	3,21
Plomo	11,3	—	0,958 (100°C)	Helio	0.178
Plata	10,5	Aceite de ricino	0,9	Argón	1,78
Vidrio	2,6	Cloroformo	1,483	Dióxido de Carbono	1,98
Tierra	5,52	Plasma sanguíneo	1,03	—	—
Zinc	7,0	—	—	—	—
Granito	2,7	—	—	—	—

TABLA Nº 4 - CALOR ESPECIFICO Y COEFICIENTE DE TENSIÓN SUPERFICIAL Y DE DILATACIÓN TÉRMICA

Sustancia	$Ce(Cal/g-°C)$	$\sigma(N/m)$	$B \times 10^{-3}(°C^{-1})$
Agua	1,0074 (0°C)	—	—
—	1,0000 (15°C)	0,073	0,207
—	0,9988 (30°C)	—	—
—	1,0072 (100°C)	—	—
Glicerina	0,58	0,064	1,1
Eanol	0,581	0,0227	0,8
Mercurio	0,033	0,5	—
Kerosene	0,051	0,03	—
Aceite de ricino	0,43	0,035	—
Benzol	0,41	0,03	—
Alcohol etílico	0,573	—	1,1
GASES	—	—	3,66

TABLA Nº 5 - CALOR ESPECIFICO Y COEFICIENTE DE DILATACIÓN TÉRMICA

Sustancia	$Ce(Cal/g-°C)$	$\alpha \times 10^{-5}(°C^{-1})$
Aluminio	0,214	2,3
Acero	0,11	1,06
Cobre	0,094	1,6
Cuarzo	0,117	—
Granito	0,192	—
Hierro	0,119	1,2
Latón	0,0917	1,9
Grafito	—	0,79
Diamante	—	0,12
Vidrio Simple	0,161 (CROWN)	0,9
Vidrio Pyrex		0,32
Hielo	0,5	5,1
Madera	0,42	—
Plomo	0,030	2,9
Corcho	0,49	—
Plata	0,056	1,9
Zinc	0,093	2,9
Cuerpo Humano	0,83	—
Oro	0,030	—
Tungsteno	0,032	—

TABLA Nº 6 - CONDUCTIVIDAD TÉRMICA

Sustancia	$K(Cal/s-m-°C)$
Aluminio	50,16
Acero	10,9
Cobre	93,17
Corcho	0,012
Hierro	14,02
Hormigón	0,0287
Ebonita	0,04
Cuarzo	0,33
Madera	0,002
Hielo	0,141
Vidrio	0,2
Plata	109,89
Plomo	83
Agua	0,145
Tejido graso	0,048
Aire	0,0057
Oro	76,0

TABLA Nº 7 - VISCOSIDADES

Sustancia	η (poise)
Agua	0,0179 (0°C)
	0,01 (20°C)
	0,00691 (37°C)
	0,00282 (100°C)
Acetona	0,00316 (25°C)
Aceite ligero	1,13 (16°C)
	0,34 (38°C)
Aceite para máquinas	5,0
Aceite para transformadores	8,0
Mercurio	0,016 (20°C)
Glicerina	14,7 (20°C)
Etanol	0,0120 (37°C)
Sangre	0,04 (37°C)
Plasma sanguíneo	0,015 (37°)
Aceite de ricino	12,0
Aceite para motores (SAE 10)	2,0
Aire	0,000171 (0°C)
—	0,000183 (18°C)
—	0,000190 (40°C)
Helio	0,000194 (20°C)
Vapor de agua	0,000125 (100°C)

TABLA Nº 8 - CALOR LATENTE Y TEMPERATURA DE FISIÓN, CALOR LATENTE DE VAPORIZACIÓN Y TEMPERATURA DE EBULLICIÓN

SUSTANCIA	CALOR LATENTE DE FUSIÓN	TEMPERATURA DE FUSIÓN $L_f(cal/g)$	CALOR LATENTE DE VAPORIZACIÓN $T_f(°C)$	TEMPERATURA DE EBULLICIÓN $t_v(°C)$
Agua	80	0	540	373
Alcohol etílico	26	-114,5	210	77,5
Azufre	9,2	114,5	68,6	444,25
Cobre	48,97	1082,5	1129,0	2565,5
Mercurio	2,69	-39,5	70,7	356,5
Oro	15,0	1062,5	406,35	2807,5
Plata	25,1	960,5	554,9	2162,5
Plomo	5,9	326,5	204,9	1749,5

TABLA Nº 9 - INTENSIDAD DE ALGUNOS SONIDOS

FUENTE DEL SONIDO	INTENSIDAD (db)
Umbral de audición	0
Respiración normal	10
Susurro de las hojas	20
Murmullo	30
Ruido de pasos	40
Oficina tranquila	50
Conversación normal (a 1m)	60
Tráfico denso o conversación en voz alta	70
Oficina ruidosa	80
Taller de máquinas o ruido de construcción	110
Concierto de rock (a 2m) o taladro neumático (a 2m)	4120
Ruido de un motor de avión (a 3m)	130
Motor de cohete	180

TABLA Nº 10 - VELOCIDAD DEL SONIDO EN ALGUNAS SUSTANCIAS

Sustancia	V(m/s)	Sustancia	V(m/s)	Sustancia	V(m/s)
Cobre	3700	Agua	1495	Aire	331 (0°C)
Fierro	5500	Agua de Mar	1500		343 (20°C)
Plomo	2000	Kerosene	1310	Oxígeno	316 (0°C)
Granito	6000	Mercurio	1450	Hidrógeno	1270
Vidrio	5400			Nitrógeno	334 (0°C)
Lucita	2700			Helio	965 (0°C)
Oro	3000			Dióxido de Carbono	259 (0°C)

BIBLIOGRAFÍA

(1) TIPLER, PAUL. Física Vol. I. Tercera Edición. Edit Reverté 1994. España.

(2) CROMER, ALAN. Física para la ciencias de la vida. segunda edición. Edit. Reverté. 1982. España.

(3) VALERO, MICHEL. Física Fundamental. Vol. I. Edit. Norma 1986. Colombia.

(4) FISHBARRE, Paul, Thornton, Stephen. Física para Ciencias e Ingeniería, Vol I. Edit. Prentice-Hall Hispanoamericana. S.A. 1994. México.

(5) HALLIDAY- Ressnick, Física. Vol I. cuarta edición. Edit. Cecsa. 1994. México.

(6) ALVARENGA-MAXIMO. Física General. Edit. Harla 1983. México.

(7) SERWAY, RAYMOND- Física. Tomo I. Edit. Mc. Graw Hill. 1993. México.

(8) KELVEY-GROTH, Física para Ciencias e Ingeniería. Tomo I. Edit. Harla, 1981 México.

(9) FREDERICK BUECHE, Física para estudiantes de Ciencias e Ingeniería. Tomo I. Edit. MC. Graw Hill.

(10) CAROL W.Van der Merwe. Física General. Colección Schaum. 1970. México.

(11) VOLKENSHTEIN. Problemas de Física General. Edit. MIR. 1970. Moscú.

(12) IRODOV, I. Problemas de Física General. Edit. MIR. 1985. Moscú.

(13) BUJOVTSEV, B. Problemas seleccionados de Física elemental. Edit. MIR, 1979. Moscú.

(14) SEARS. Física. Tomo II. Edit. Aguilar. 1966. Madrid.

(15) FRISH-TIMOREVA. Curso de Física General. Edit MIR. 1977. Moscú.

(16) VASQUEZ, JOSÉ, Problemas de Física General. Edit. San Marcos. 1982. Lima.

(17) KOSEL. Problemas de Física. Edit. MIR. 1986. Moscú.

(18) VOGEL, H. Problemas de Física. Edit. Dorsat. 1979. Madrid.

(19) SCHERRER-STOLL. Problemas de Física. Tomo II. Edit. Alhambra. 1969. Madrid.

(20) LANDAU-LIFSHITZ. Curso de Física General. Edit. MIR. 1973. Moscú.

(21) ZEMANSKY. Calor y Termodinámica. Edit. Aguilar 1968. Madrid.

COLECCIÓN MOSHERA - UNIVERSITARIOS



